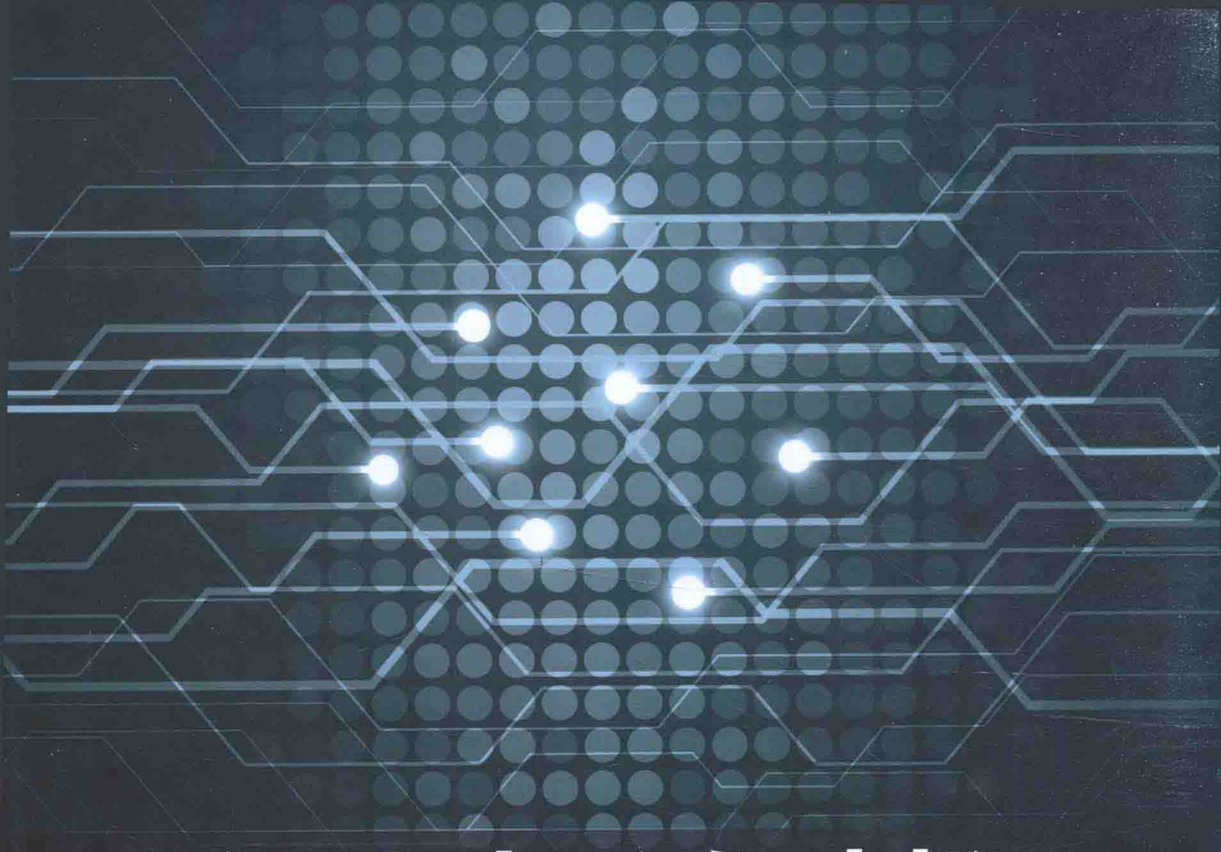

吸气式冲压发动机突变动力学与控制

Catastrophe Dynamics and Control of Airbreathing Ramjet Engine

崔 涛 于达仁/著

科学出版社

吸气式冲压发动机突变动力学与控制

崔 涛 于达仁 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书对吸气式冲压发动机突变动力学与控制问题进行了系统性的阐述。从物理现象、流动机理、流动规律和控制等层面较为系统地阐述了吸气式冲压发动机内部流动的突变现象、结构不稳定机理、流动失稳边界的几何规律、燃烧室-进气道相互作用模式的分类方法和准则，以及发动机突变控制系统设计方法。在这些内容之中，所解析证明的发动机物理过程的数学规律，以及所提出的控制方法，是本书的核心内容。

本书适合于航空航天推进领域的教学人员和科研人员阅读。

图书在版编目（CIP）数据

吸气式冲压发动机突变动力学与控制/崔涛，于达仁著. —北京：科学出版社，2016. 1

ISBN 978-7-03-046249-7

Ⅰ. ①吸… Ⅱ. ①崔… ②于… Ⅲ. ①冲压喷气发动机-动力学-研究 ②冲压喷气发动机-安全控制技术-研究 Ⅳ. ①V235.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 264538 号

责任编辑：杨春波 张 震 / 责任校对：李 影
责任印制：徐晓晨 / 封面设计：无极书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京京华虎彩印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016 年 1 月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2016 年 1 月第一次印刷 印张：15 5/8
字数：315 000

定价：99.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

吸气式冲压发动机作为高速度导弹和飞机的动力装置，是当前航空推进领域学术研究的热点，国家自然科学基金委员会连续发布两项重大研究计划“近空间飞行器的关键基础科学问题”、“空间飞行器重大若干基础问题”资助其基础问题的研究。吸气式冲压发动机工作过程涉及多物理效应（激波、边界层、燃烧反应和传热等）之间的耦合，机理比较复杂。所涉及的激波/边界层相互作用以及超声速环境下的燃烧反应，均是流动、燃烧领域的核心问题，基础学科支撑有限。而根据工程需求研究发动机复杂的物理过程，又面临数学模化困难，试验观测手段不足（充满不确定性）或高试验代价等诸多问题。我们认为多物理效应的相互耦合固然带来了复杂性和不确定性，但是反过来看，这些相互耦合关系往往也构成了物理约束，在一定层面上其规律因此可以被认识。有鉴于此，我们希望利用演绎的分析方法，从经典力学、数学等基础学科中寻找理论支撑，根据先验的数学规律进行演绎，试图获得确定性，并寻找简化物理问题的途径，建立简化的物理模型和数学模型，得到复杂过程中蕴含的定性规律，进而再逐步深入考虑实际复杂因素的影响。

我们考察问题的一个视角是注意到吸气式冲压发动机内部流动过程中呈现了明显的非连续性质，这种非连续性质反映在物理过程中往往对应于系统对扰动的放大机制。在特定条件下，外部扰动或局部状态的微小改变被反馈放大，造成系统稳定性和动力学性态的结构性变化，衍生多种流动燃烧模式并演化出复杂的系统行为。由于这些过程往往涉及不连续的变化，将对飞行安全和控制产生影响，必须予以重视，广受关注的几次高超声速飞行试验事故也验证了这一点。

吸气式冲压发动机内部流动的非连续性质是其燃烧室-进气道相互作用的结果。作为一种吸气式冲压发动机，它和火箭式发动机的主要区别在于它需要通过进气装置来捕获工质和氧化剂。由此带来的一个重要问题就是工质的捕获过程和热力循环的压缩和释热过程不得不关联在一起。在临界条件下，压缩-释热过程的相互作用会严重影响工质流量的捕获，其结果是不仅会较大影响发动机的推力性能还会引发流动不稳定，因此燃烧室-进气道相互作用问题一直是吸气式冲压发动机

领域的经典问题。对于吸气式冲压发动机，由于要形成正激波波系的压缩效应，就需要依赖管道流动的流量阻塞机制，这使得压缩-释热过程和流量捕获相互耦合问题更加突出，其结果是流动阻塞造成管道的通流能力有限，激波容易被推出进气道而导致不起动。而流动阻塞机制的产生和消失又会引发发动机模态转换的不稳定过程。因此相比之下吸气式冲压发动机的燃烧室-进气道相互作用问题更加突出，目前公开报道的高超声速飞行试验中屡次出现的进气道不起动事故均源于燃烧室-进气道之间复杂的相互作用。本领域知名学者柯伦（Curran）甚至认为燃烧室-进气道相互作用问题是多年来困扰发动机研制的两个核心问题之一。

本书从发动机控制的视角来考察燃烧室-进气道相互作用这一基础问题，取得了新的研究结果。基于科学问题的提炼并借助拓扑学、离散数学等理论，解析发现了吸气式冲压发动机燃烧室-进气道相互作用物理过程存在的两个数学规律，并在此基础上提出了新的发动机控制方法：① 吸气式冲压发动机流动失稳边界具有确定的拓扑结构。其创新点是把发动机流动失稳边界抽象为退化的奇点集的概念，利用奇异性理论中奇点集的拓扑结构来演绎发动机流动失稳边界的几何规律，解析地推导出发动机物理系统和奇异理论中的标准拓扑模型之间的拓扑映射关系。它为在工程研制中搜索发动机的流动失稳边界，解释和预测试验中各种物理现象提供了一种标准的模型结构。应用该模型结构分析美俄联合高超声速飞行试验进气道状态误判故障，发现了导致试验事故的一种特殊的迟滞现象。② 吸气式冲压发动机燃烧室-进气道相互作用模式具有有限个严格可分的类别。其创新点是从发动机控制的工程问题中抽象出基于离散数学的迟滞函数分类这一数学问题，在函数空间中考察无穷个函数的几何相似性并分类。由此提出了基于离散数学的多稳定性系统迟滞行为分类的一般性方法，该方法应用于吸气式冲压发动机，推导出燃烧室-进气道相互作用的有限个类别，并推导出新的相似参数来解析描述燃烧室-进气道相互作用的分类准则。通过分类，同一类别中的无限个燃烧室-进气道相互作用均具有相同属性，这奠定控制律的相似性基础。③ 在此基础上，我们提出了基于函数分类的吸气式冲压发动机突变控制思路，通过分门别类控制从原理上解决发动机控制面临的不确定性问题，其创新点是构造出基于迟滞函数分类的离散化控制问题，通过离散化方法把迟滞函数分类成有限个类别，各种类别被定义为各种离散状态，而不同种类别之间的转换则被定义为各种离散事件，这样可以在有限个可列的离散状态和离散事件集合的幂集的子集上讨论控制问题，从而可以把发动机无穷维系统的复杂动力学行为及控制过程归结为有限个模式及控制逻辑。

这些新的研究结果构成了本书的核心内容，而从阐述问题的系统性方面来讲，本书内容也包括了物理现象、流动机理、流动规律和控制四个层面，较为系统地阐述了吸气式冲压发动机燃烧室-进气道相互作用的突变现象、结构不稳定机理、流动失稳边界的几何规律、燃烧室-进气道相互作用模式的分类方法和准则，以及发

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

动机突变控制系统设计方法。综上所述，本书对吸气式冲压发动机燃烧室-进气道相互作用这一基础问题进行了系统性的研究，并取得了新的研究结果，希望书中的观点和方法能够得到同行专家的指正，更希望本书能在我国吸气式冲压发动机自主创新进程中发挥一点作用。

感谢国家自然科学基金项目（No. 51476041、No. 90816028、No. 50906015、No. 51421063）的资助，感谢北京大学力学系王勇老师多年来的指导，感谢硕士研究生唐顺林、刘凯、何学刚、武彩，以及本科生吕仲、张超、金建人对本研究所作的贡献。

由于作者基础理论水平有限，书中难免有有失严谨和不足之处，敬请读者批评指正。

崔　涛

2015 年 6 月

目　　录

1 数学基础

1.1 引言

经典理论的支撑使得可以用演绎的方法来分析和解决所面临的问题。对于工程研究，任务之一是运用概念和逻辑来寻找物理问题和数学问题之间的关联，然后再基于数学的严谨性来演绎物理过程的确定性。托姆（Thom）分类定理是本书的主要数学基础，所构造的奇异性分类方法构成了考察吸气式冲压发动机流动规律和控制问题的主要依据。为方便阐述研究过程，本章将对 Thom 分类定理作简单的介绍，该部分内容引用文献[1]，更为详细的内容请参考文献[2]～文献[5]。

1.2 基本概念

1.2.1 结构稳定性

结构稳定性是指外界对系统施加扰动时，系统的状态不发生定性的变化。基于势函数分析系统稳定性，如果任意扰动不影响它的定性性态，就说势函数是结构稳定的。

设势函数为 $V(x)=V(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，扰动为 $\varepsilon f(x)=\varepsilon f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。若 $\nabla V(x)=0$ 而 $\det V_{ij}\neq 0$，则系统存在 Morse（非退化）临界点。现在分析扰动对势函数在 Morse 临界点附近的性态有何影响，很明显如果势函数 $V(x)$ 在临界点 $x_0\in R^n$ 是稳定的，则通过一个连续的坐标变换 $x'_j=x'_j(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，使被扰动势函数 $V'(x')=V(x)+\varepsilon f(x)$ 在新坐标系中与原来未被扰动的势函数 $V(x)$ 在旧坐标系中有相同的结构，即

$$V'(x')=V(x) \tag{1.1}$$

假设在 Morse 临界点势函数 $V(x)$ 为二次型：

$$V(x)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \tag{1.2}$$

扰动函数为

$$\varepsilon f(x)=\varepsilon_1 x_1+\varepsilon_2 x_2+\cdots+\varepsilon_n x_n \tag{1.3}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

于是被扰动的势函数有下面形式：

$$V(x)+\varepsilon f(x)=\left(x_1+\frac{1}{2}\varepsilon_1\right)^2+\cdots+\left(x_n+\frac{1}{2}\varepsilon_n\right)^2-\frac{1}{4}\left(\varepsilon_1^2+\cdots+\varepsilon_n^2\right) \tag{1.4}$$

进行坐标变换：

$$x_i'=x_i'+\frac{1}{2}\varepsilon_i \tag{1.5}$$

则

$$V'(x')=x_1'^2+\cdots+x_n'^2-\frac{1}{4}(\varepsilon_1^2+\cdots+\varepsilon_n^2) \tag{1.6}$$

由于常数项在决定函数在临界点的局部特性时没有影响，可以通过选择新的坐标原点将常数项$\frac{1}{4}(\varepsilon_1^2+\cdots+\varepsilon_n^2)$消去，所以可得下式：

$$V'(x')=V(x) \tag{1.7}$$

可见势函数$V(x)$具有局部稳定性，也就是说式（1.2）所表示的势函数在 Morse 点附近是稳定的。

事实上，扰动的意义相当于使函数在变量的邻域中作拓扑映射。例如，一个m参数的函数族，在参数连续变化时，就在m维空间中确定了一个超曲面，每一个函数对应于空间中的一个点。如果f_p是对应于p点的函数，若在p的邻域内的q点，有一个相应的函数f_q与f_p有相同的形式，则称f_p为函数族的一个结构稳定的函数。简言之，如果q是p的邻域，则f_q是f_p的邻域，f_p便是结构稳定的，f_q是f_p的满映射。而相应函数为结构稳定函数的p点构成了结构稳定点的集合，这个集合的补集，称为分岔点集。分岔点集就是m维空间超曲面在垂直方向上对平面的投影，具有拓扑不变性质。分岔集所对应的系统状态集合被称为奇点集。

奇点集是对应于$\det V_{ij}=0$的情形，假如势函数V与k个控制参数c_i有关，那么 Hessen 矩阵V_{ij}及其本征值λ_i也必然与这k个控制参数有关。如果对于控制参数c_i的某些特征值λ_i的值为零，也就是说$\det V_{ij}=0$，这时由：

$$\nabla V(x)=0\text{；}\quad \det V_{ij}=0 \tag{1.8}$$

确定的临界点被称为奇点或非 Morse 点。结构不稳定性是通过结构稳定性表现出来的，在拓扑学的意义上，在结构稳定的势函数族中包含着维数较低的奇点集或分岔点集是产生突变的原因。

1.2.2 开折

判断一个函数是不是结构稳定的，通常用任意扰动来观察函数的性质有无变化。如果一个函数不论具有何种形式，它既在原来的函数族中，又在受扰动的函数族中，并保持分岔集的拓扑结构不变，则该函数是结构稳定的。设所研究的函数族是单变量 x 的多项式，最高阶次 N 为有限的。多项式各系数的不同取值就构成了一个多项式函数族，如果族中两个多项式的同次幂的系数相互接近，则称这两个多项式互相接近，当它们在 x=0 的临界点附近有相同的性态，亦即有相同的临界点配置时，则这两个多项式是相同类型的，所谓函数 f_q 与 f_p 有相同的形式，就是指它们有相同的临界点配置。以 $f(x)=x^4$ 为例，为了判断它是否稳定，可以和被扰动多项式：

$$F(x)=x^4+\varepsilon x^m \tag{1.9}$$

相比较，$f(x)$ 有三重零点，这可以从 $f'(x)=4x^3$ 看出。若对 $F(x)$ 求导数，则有

$$F'(x)=4x^3+\varepsilon m x^{m-1} \tag{1.10}$$

$$F''(x)=12x^2+\varepsilon m(m-1)x^{m-2} \tag{1.11}$$

若 m=3，无论 ε 为正还是为负，$F(x)$ 在 x=0 处都有一个拐点，在 $x=-3/4\varepsilon$ 有极小值。若 m=2，当 $\varepsilon<0$ 时，$F(x)$ 在 $x=0$ 有极大值，而在 $x=\pm\sqrt{(-\varepsilon/2)}$ 有极小值。若 m=1，$F(x)$ 在 $x=\sqrt[3]{(-\varepsilon/4)}$ 有极小值。其次，当 m=5 时，$F(x)$ 在 $x=-4/5\varepsilon$ 处有临界点。从扰动的意义来说，当 ε 为任意小时，若外加的临界点位于未扰函数临界点的 ε 邻域内，同时临界点的配置相同，则该函数是结构稳定的。在 $x^4+\varepsilon x^m$ 的例子中，当 m=5 时临界点为 $x=-4/5\varepsilon$，ε 任意小反而使临界点远离原点。可见，x^4 不是结构稳定的函数。同样，对 m=2 时的函数 $x^4+\varepsilon x^2$ 也不是结构稳定的。对于下面的多项式：

$$W(x)=x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4 \tag{1.12}$$

其一阶与二阶导数分别为

$$W'(x)=4x^3+3a_1x^2+2a_2x+a_3 \tag{1.13}$$

$$W''(x)=12x^2+6a_1x+2a_2 \tag{1.14}$$

在临界点 x_0 处 $W''(x_0)\neq 0$，所以由 $W'(x)=0$ 确定的临界点 x_0 的性质（极大、极小或拐点）完全由 $W''(x_0)$ 的符号决定，不需要考察高阶导数，因此高于四次的扰动函数不会影响 $W(x)$ 的定性特性。而式（1.12）通过变量代换和选取新的坐标原点就可以将三次项和常数项消去，因此式（1.12）可以简化为

$$V(x)=x^4+ux^2+vx \tag{1.15}$$

顺便指出，式（1.12）是一个四次多项式，即使添加低次项，也只是改变系

数值，不改变多项式的结构，所以$W(x)$与$V(x)$是结构稳定的。

若函数$f(x)$与$F(x,a)$有如下关系：

$$f(x)=F(x,a)\big|_{a=0},\ x=(x_1,x_2,\cdots,x_n);\ a=(a_1,a_2,\cdots,a_r) \tag{1.16}$$

那么$F(x,a)$称作函数$f(x)$的r维开折。如果通过坐标变换使得$f(x)$的其他r维开折能够从$F(x,a)$求得，则称$F(x,a)$为$f(x)$的完全开折。如果$F(x,a)$是$f(x)$的维数最少的开折，则称$F(x,a)$为万有开折。这里所定义的开折是结构稳定的开折，那些不能保证结构稳定的开折则称为不完全开折。

1.2.3 有限确定

一个函数在状态变量空间中的临界点附近的性态，可以通过研究 Taylor 级数在该临界点的展开式来加以确定，将函数$f(x)$在原点展开为

$$f(x)=f(0)+x_i f_i(0)+\frac{1}{2!}x_i x_j f_{ij}(0)+\cdots \tag{1.17}$$

若$\nabla f(x)\neq 0$，则$f(x)$的性态完全由变量x的一次项决定，略去二次项及以后各项并不影响函数在临界点的性态；若$\nabla f(x)=0$，$\det f_{ij}\neq 0$，则函数的性态将由 Taylor 级数展开式的二次项来决定，因此可以略去二次项以后的所有项；若$\nabla f(x)=0$，$\det f_{ij}=0$，则函数的性态需要由高阶项来决定，不过仍然可以认为可以由 Taylor 级数展开式的k次项决定，不必考察其后各项，这样略去k次项以后各项的方法是很有用的，为此将这种方法定义为k次截断，并用k–jet或$j^k(f)$表示。一个函数的 Taylor 级数能否被截断，以及截断的次数如何确定，是较为复杂的问题，即所谓“确定”问题。若一个函数与任何有同样k次截断的函数类型相同，则称该函数是k次确定的。当k为有限数时，则称之为有限确定的。定义截断和确定的概念可用于构造开折的方法。

1.2.4 剖分引理

多数系统都不能用单一状态变量来恰当地予以描述，故需要考虑更一般的多状态变量情况下会发生什么情况。设$f(x,y)$是x与y的光滑函数，若在原点有一个临界点，则一阶偏导数均等于 0，于是 Taylor 级数不包括常数项和一次项。在研究$f(x,y)$的临界点的性质之前，首先对函数的退化给出定义。如果函数的二阶导数为零，则临界点的性质由三阶导数来决定；若三阶导数为零，则必须考察四阶导数，依此类推，如果除了二阶导数以外必须考察n阶导数才能决定临界点的性质，则称这个函数为n重退化的，需要加添n个开折参数才能使原来的函数稳定。定义$f(x,y)$的二次项为

$$a=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=y=0},\quad b=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{x=y=0},\quad a=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{x=y=0} \tag{1.18}$$

于是 $f(x,y)$ 的 Taylor 级数表达式简化为

$$f(x,y)=\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)+O(x,y) \tag{1.19}$$

其中 $O(x,y)$ 表示高次项，而二次项则表示二次曲线，它或者是椭圆或双曲线。为了确定临界点的类型，引入：

$$\Delta(a,b,c)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2 \tag{1.20}$$

如果 $\Delta(a,b,c)>0$，$a<0$，则 $f(x,y)$ 有极大点；如果 $\Delta(a,b,c)>0$，$a>0$，则 $f(x,y)$ 有极小点；如果 $\Delta(a,b,c)<0$，则 $f(x,y)$ 有鞍点。而当 $\Delta(a,b,c)=0$ 时，函数是不稳定的。$\Delta(a,b,c)=0$ 可能是所有二次偏导数均为零，函数是二重退化的，必须进而考察三阶偏导数项，若并不是二阶偏导数分别为零，如 $ac-b^2=0$，这时 $\left|ax^2+2bxy+cy^2\right|=\left|\left(\sqrt{a}x\right)^2+2\sqrt{ac}xy+\left(\sqrt{c}y\right)^2\right|=(px+qy)^2$，$p=\sqrt{|a|}$，$q=\sqrt{|c|}$。引入新坐标 u 和 v：

$$u=\frac{px+qy}{\sqrt{(p^2+q^2)}};\quad v=-\frac{qx-py}{\sqrt{(p^2+q^2)}} \tag{1.21}$$

在坐标原点可得

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=0;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}=\pm(p^2+q^2)\neq 0 \tag{1.22}$$

可见 $f(x,y)$ 在 v 方向上是二重退化的，相应的 Taylor 级数在 v 方向上的展开式为

$$f(x,y)=\frac{1}{8!}v^3\frac{\partial^3 f}{\partial v^3}+\frac{1}{4!}\frac{\partial^4 f}{\partial v^4}+\cdots \tag{1.23}$$

与变量 u 无关，也就是说在选取一个适当的坐标变换后，二变量函数 $f(x,y)$ 被约化为对单变量函数的研究。退化使函数不稳定，但 u 不影响 $f(x,y)$ 的稳定性，只有 v 与 $f(x,y)$ 的结构不稳定性有关。这个结果可以推广到任何变量个数有限的情况，这就是以 Hessen 矩阵为基础的“剖分引理”，具体内容如下。

设 $f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是临界点在原点的有 n 个独立变量的函数，在原点 $f(x)$ 和它的所有一阶偏导数均为零，二阶偏导数组成 Hessen 矩阵为

$$v_{ij}=\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial y_j}=-\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial y_j},\quad 1\leqslant i,j\leqslant n \tag{1.24}$$

若矩阵的秩为 n，即它的行列式 $\det V_{ij}\neq 0$ 则 $f(x)$ 可以写成二次型：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2+\frac{1}{3!}\sum_{ijk}f_{ijk}x_i x_j x_k+\cdots \tag{1.25}$$

式中，λ_i 的符号均为±1，从正负号的个数可以看出函数临界点的类型，并且 $f(x)$ 是结构稳定的。如果 Hessen 矩阵的秩是 $n-l$，且 $l>0$，则也存在一个坐标变换，能将函数 $f(x)$ 写成：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_{NM}(x_1,x_2,\cdots,x_l)+\sum_{i=l+1}^{n}\lambda_i x_i^2 \tag{1.26}$$

结构不稳定性只局限在变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，其余变量均与函数的性态无关，因而可以略去。这一结果被称为“剖分引理”，它将函数剖分成 Morse 部分和非 Morse 部分。同时也将状态变量剖分成两部分，与结构稳定性有关的“实质性变量”和与之无关的“非实质性变量”，分析函数在临界点的性态时，可以将非实质性变量略去。由此可知，可能出现的奇异性类型的数目并不取决于状态变量的数目 n，而仅仅取决于实质性状态变量的数目 l，它被称作 Hessen 矩阵的余秩数，也是函数的余秩数。它确定了函数独立退化方向的数目，即函数不稳定而需要开折的参数个数。

1.2.5 余维数

拓扑学中一个很重要的概念是拓扑变换中的不变量，也就是变换的等价性。Thom 分类定理与拓扑学、奇点理论密切相关，选择余维数作为对高阶项降维处理的不变量。几何对象的维数与所在空间的维数之差，称作几何对象的余维数，它表示描述对象所需要的方程数目。例如，在时-空四维几何空间中，一个方程表示一个三维超曲面，二个方程确定一个二维曲面，一条曲线需要三个方程。余维数有以下两个重要性质：其一是剖分性。当余维数为 1 时，表示对象的维数比空间的维数少 1，因此该对象可以将所在空间剖分为两部分。例如，一个点剖分直线为两部分，而一直线可将平面剖分成两部分，一个平面剖分一个三维空间。其二是不变性。在讨论剖分引理时指出，对象的维数或一个函数的变量个数可以分成实质性的与非实质性的两部分，如果略去非实质性变量，则对象的维数与所在空间的维数均同时减少同样的数目，因而余维数是不变的。因此在降低问题的维数使之简化为较容易处理时，余维数保持不变则意味着问题的基本特性保留下来，不会因为降维而丢失，至于状态变量的真实个数倒不是重要的，甚至可以是未知的，这是 Thom 分类定理的一个非常重要的特点，它说明当问题的内部结构不能确知时，也可以预测对象的行为状态，由实质性变量建立起必要的数学模型。

一般来说，一个 p 维对象的单参数连续族是 $p+1$ 维对象，一个 p 维对象的 r 参数族是一个 $p+r$ 维对象。换句话说余维数为 p 的对象的 r 参数族是一个余维数

为 $p-r$ 的对象，因为空间的维数不变，而对象的维数由于增加了 r 个控制参数而增加了 r 维，因此余维数将相应减小 r，即 $p-r$。

如果 Hessen 矩阵的秩为零，也就是说 n 个变量的二次型为零，则函数 $f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是不稳定的，在 n 个方向上退化，因为：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}=0\text{，}1\leqslant i,j\leqslant n \tag{1.27}$$

注意到二次型的对称性 $x_i x_j = x_j x_i$，式（1.27）共有 n（n+1）/2 个独立方程，因此其最小余维数也等于 n（n+1）/2，明显它就是 Hessen 对称矩阵中独立元素的个数。假若只有一个变量，由式（1.27）可得唯一的一个方程 $f_x''=0$，对象在 x 方向上退化，需要一个方程来描述，余维数为 1；假若 n=2，则可以得到三个方程：$f_{x_1}''=f_{x_2}''=f_{x_1x_2}''=0$，对象在两个方向上退化，余维数为 3。对于单变量 x 的多项式，每一项都是结构不稳定的，可见函数本身的余维数就是万有开折中参数的个数。

根据余秩数 l 与余维数为 l（l+1）/2 的关系可知，当 l=3 时，即有 3 个实质性状态变量时，余维数为 l（l+1）/2=6，因而需要 6 个开折参数。由此可知，当开折参数不多于 5 时，实质性状态变量不多于 2。Thom 分类定理证明，如果开折参数为 4 个，实质性变量不多于 2 个，则奇异性类型不多于 7 个。

1.3 奇异性分类

Thom 分类定理构造了奇异性分类的方法（定义了不同类型分岔集的拓扑性质），奇异性的标准形式用势函数来描述。令状态参数为 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和控制参数为 $c=(c_1, c_2, \cdots, c_k)$，并令 $(x^*;c^*)$ 为势函数 V（x; c）的一个临界点，不失一般性，假定 $(x^*;c^*)=(0;0)$，V（0; 0）=0，这种变换不改变函数的性质。令 Hessen 矩阵 V_{ij} 在（0; 0）的余秩为 l，并令 $\lambda_i\,(i=l+1, \cdots, n)$ 是非零特征值。那么根据剖分引理，在（0; 0）的一个开邻域内可以存在一个与势函数 V（x; c）等价的函数形式：

$$f_{NM}[y_1(x;c), y_2(x;c),\cdots,y_l(x;c);c]+f_M[y_{l+1}(x;c),y_{l+2}(x;c),\cdots,y_n(x;c);c] \tag{1.28}$$

其中：

$$f_M=\sum_{i=l+1}^{n}\lambda_i(c)y_i^2(x) \tag{1.29}$$

映射 $y_i\,(i=1, \cdots, n)$ 为同胚映射。如此势函数可以被分解为两部分：Morse 部分和非 Morse 部分，在 f_M 中 y_i 仅是状态参数的函数，λ_i 仅是控制参数的函数。Morse 是结构稳定的，非 Morse 部分则决定了函数的结构稳定性的变化，而可能

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com