卓越工程技术人才培养特色教材

FUBIAN HANSHU YU
JIFEN BIANHUAN

复变函数与积分变换

刘红爱　咸亚丽　莫　晶　尚　林　编

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS

卓越工程技术人才培养特色教材

复变函数与积分变换

刘红爱　咸亚丽　莫　晶　尚　林　编

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS
镇　江

内容提要

本书主要内容包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、复级数、留数理论及其应用、Fourier 变换和 Laplace 变换共七章内容. 每节都配有适量的练习题，每章末附有内容小结和复习题，书后附有部分习题参考答案，以便学生自主学习. 书末附有 Fourier 变换和 Laplace 变换简表，便于读者查阅使用. 书中标有 * 号部分供读者选学使用.

全书层次清晰、结构严谨、重点突出. 精选了大量例题，题型较为丰富，且有一定的梯度，便于学生自学. 本书可作为高等院校理工科相关专业复变函数与积分变换课程教材，也可供科技工作者及工程技术人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换 / 刘红爱等编. — 镇江 ：江苏大学出版社，2015.8
ISBN 978-7-81130-973-7

Ⅰ.①复… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①复变函数—高等学校—教材②积分变换—高等学校—教材 Ⅳ.①O174.5 ②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 190978 号

复变函数与积分变换

编　　者/刘红爱　咸亚丽　莫　晶　尚　林
责任编辑/张小琴
出版发行/江苏大学出版社
地　　址/江苏省镇江市梦溪园巷 30 号(邮编：212003)
电　　话/0511-84446464(传真)
网　　址/http://press.ujs.edu.cn
排　　版/镇江华翔票证印务有限公司
印　　刷/虎彩印艺股份有限公司
经　　销/江苏省新华书店
开　　本/718 mm×1 000 mm　1/16
印　　张/14.25
字　　数/300 千字
版　　次/2015 年 8 月第 1 版　2015 年 8 月第 1 次印刷
书　　号/ISBN 978-7-81130-973-7
定　　价/28.00 元

如有印装质量问题请与本社营销部联系(电话:0511-84440882)

江苏省卓越工程技术人才培养特色教材建设

指导委员会

序

深化高等工程教育改革、提高工程技术人才培养质量，是增强自主创新能力、促进经济转型升级、全面提升地区竞争力的迫切要求。近年来，江苏高等工程教育飞速发展，全省 46 所普通本科院校中开设工学专业的学校有 45 所，工学专业在校生约占全省普通本科院校在校生总数的 40%，为“十一五”末江苏成功跻身全国第一工业大省做出了积极贡献。

“十二五”时期是江苏加快经济转型升级、发展创新型经济、全面建设更高水平小康社会的关键阶段。教育部“卓越工程师教育培养计划”启动实施以来，江苏认真贯彻教育部文件精神，结合地方高等教育实际，着力优化高等工程教育体系，深化高等工程教学改革，努力培养造就一大批创新能力强、适应江苏社会经济发展需要的卓越工程技术后备人才。

教材建设是人才培养的基础工作和重要抓手。培养高素质的工程技术人才，需要遵循工程技术教育规律，建设一套理念先进、针对性强、富有特色的优秀教材。随着知识社会和信息时代的到来，知识综合、学科交叉趋势增强，教学的开放性与多样性更加突出，加之图书出版行业体制机制也发生了深刻变化，迫切需要教育行政部门、高等学校、行业企业、出版部门和社会各界通力合作，协同作战，在新一轮高等工程教育改革发展中抢占制高点。

2010年以来，江苏大学出版社积极开展市场分析和行业调研，先后多次组织全省相关高校专家、企业代表就应用型本科人才培养和教材建设工作进行深入研讨。经各方充分协商，拟定了“江苏省卓越工程技术人才培养特色教材”开发建设的实施意见，明确了教材开发总体思路，确立了编写原则：

一是注重定位准确，科学区分。教材应符合相应高等工程教育的办学定位和人才培养目标，恰当地把握研究型工程人才、设计型工程人才及技能型工程人才的区分度，增强教材的针对性。

二是注重理念先进，贴近业界。吸收先进的学术研究与技术开发成果，适应经济转型升级需求，适应社会用人单位管理、技术革新的需要，具有较强的领先性。

三是注重三位一体，能力为重。紧扣人才培养的知识、能力、素质要求，着力培养学生的工程职业道德和人文科学素养、创新意识和工程实践能力、国际视野和沟通协作能力。

四是注重应用为本，强化实践。充分体现用人单位对教学内容、教学实践设计、工艺流程的要求以及对人才综合素质的要求，着力解决以往教材中应用性缺失、实践环节薄弱、与用人单位要求脱节等问题，将学生创新教育、创业实践与社会需求充分衔接起来。

五是注重紧扣主线，整体优化。把培养学生工程技术能力作为主线，系统考虑、整体构建教材体系和特色，包括合理设置课件、习题库、实践课题，以及在教学、实践环节中合理设置基础、拓展、复合应用之间的比例结构等。

该套教材组建了阵容强大的编写专家及审稿专家队伍，汇集了国家教学指导委员会委员、学科带头人、教学一

线名师、人力资源专家、大型企业高级工程师等。编写和审稿队伍主要由长期从事教育教学改革实践工作的资深教师、对工程技术人才培养研究颇有建树的教育管理专家组成。在编写、审定教材时，他们紧扣指导思想和编写原则，深入探讨、科学创新、严谨细致、字斟句酌，倾注了大量的心血，为教材质量提供了重要保障。

该套教材在课程设置上基本涵盖了卓越工程技术人才培养所涉及的有关专业的公共基础课、专业基础课、专业课、专业特色课等；在编写出版上采取突出重点、以点带面、有序推进的策略，成熟一本出版一本。希望大家在教材的编写和使用过程中，积极提出意见和建议，集思广益，不断改进，以期经过不懈努力，形成一套参与度与认可度高、覆盖面广、特色鲜明、有强大生命力的优秀教材。

江苏省教育厅副厅长 丁晓昌

2012 年 8 月

前　言

本书是根据教育部《高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划》的精神和要求，参照南京信息工程大学复变函数与积分变换课程教学大纲，在汲取国内许多同类教材的精华，并融入编者多年来在教学中积累的实际教学经验的基础上编写而成. 全书比较系统地介绍了复变函数与积分变换的基本思想与基本方法. 在本书编写过程中，我们力求做到如下几点：

(1) 突出应用型人才的培养，注重学生创新能力的培养，对基本概念的引入、基本理论的推导、基本方法的介绍富于启发性，培养学生善于发现问题、思考问题、解决问题的能力.

(2) 注重提高学生的学习兴趣，对具有应用背景的重要概念的引入尽可能联系实际，突出本课程的实用性；在保证科学性的前提下，概念、性质、定理等都以易于理解或易于应用的形式呈现.

(3) 加强解题方法的训练和思维能力的系统培养，每章除了配有丰富的例题外，每节还配有适量的练习题，每章末附有内容小结和复习题. 书后附有部分习题参考答案，便于学生自学.

(4) 考虑高等教育大众化的新形势，不同专业和不同层次的要求不同，对有关例题与习题做了分层处理，由易到难，循序渐进，便于进行分层次、立体化教学.

本书由南京信息工程大学刘红爱、咸亚丽、莫晶、尚林老师共同编写与校对，全书的框架、统稿、定稿由刘红爱老师承担.

南京信息工程大学张太忠教授仔细审阅了全部书稿，并提出了宝贵的修改意见，对此我们深表谢意. 还要感谢江苏大学出版社的大力支持才使本书得以尽早出版.

本书是在南京信息工程大学滨江学院第三期教学建设和改革项目资助下完成的. 本书的出版得到了院系领导的大力支持和帮助，这里表示衷心感谢. 本书编写过程中参考了众多相关教材和专著，在此对有关作者一并致谢.

限于编者水平，书中难免有缺点和疏漏，恳请各位专家、同行及广大读者批评指正.

编　者

2015年6月

目 录

第 1 章　复数与复变函数

复变函数是自变量为复数的函数,它是本课程研究的对象. 复变函数研究的是定义在复数域上的解析函数的性质,本章首先介绍复数的概念、表示方法和复数的运算,然后介绍复平面上的区域,以及复变函数的极限与连续等概念,为进一步研究解析函数理论和方法奠定基础.

1.1　复　　数

在初等代数中已经介绍过复数, 为了便于以后讨论和理解,本节将在原有的基础上做简要的复习和补充.

1.1.1　复数的概念

学过中学代数的读者都知道,一元二次方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内无解. 为求此类方程,引入了新的数 i,规定 $\mathrm{i}^2=-1$,且称 i 为虚数单位. 从而方程 $x^2+1=0$ 的根记为 $x=\pm\sqrt{-1}=\pm\mathrm{i}$;一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$,当 $b^2-4ac<0$ 时该方程的根为

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\mathrm{i}\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=\frac{-b}{2a}\pm\mathrm{i}\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}.$$

由此引入复数的定义.

定义 1.1.1　对任意的两个实数 x 与 y,称数 $z=x+\mathrm{i}y$ 或 $z=x+y\mathrm{i}$ 为复数,其中 x 与 y 分别称为复数 z 的实部和虚部,分别记为

$$x=\mathrm{Re}\ z,\ y=\mathrm{Im}\ z.$$

当 $x=0,y\neq0$ 时,$z=\mathrm{i}y$ 称为纯虚数;当 $x\neq0,y=0$ 时,$z=x$ 为实数. 因此,复数是实数的推广,而实数是复数的一种特例.

如果两复数的实部和虚部分别相等,则称两复数相等. 特别记 $0+\mathrm{i}0=0$,即当且仅当 $x=y=0$ 时,$z=0$.

注意　两个不全为实数的复数不能比较大小.

1.1.2 复数的共轭复数

定义 1.1.2 对于给定的复数 $z=x+\mathrm{i}y$,我们称数 $x-\mathrm{i}y$ 为 z 的共轭复数,记作 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$.

关于复数的共轭复数,有下列性质:

(1) $\bar{\bar{z}}=z$;

(2) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$;

(3) $z\bar{z}=(\mathrm{Re}\ z)^2+(\mathrm{Im}\ z)^2$;

(4) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}\ z$, $z-\bar{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}\ z$.

这些性质作为练习,由读者自己证明.

1.1.3 复数的代数运算

设两个复数为 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,它们的加、减、乘、除运算定义如下:

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2) \tag{1.1.1}$$

$$z_1 z_2=(x_1 x_2-y_1 y_2)+\mathrm{i}(x_2 y_1+x_1 y_2) \tag{1.1.2}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{x_1 x_2+y_1 y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2 y_1-x_1 y_2}{x_2^2+y_2^2} \tag{1.1.3}$$

不难证明,复数的加、减、乘、除运算和实数的情形一样,也满足如下规律:

交换律:$z_1+z_2=z_2+z_1$, $z_1 z_2=z_2 z_1$;

结合律:$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$, $(z_1 z_2)z_3=z_1(z_2 z_3)$;

分配律:$z_1(z_2+z_3)=z_1 z_2+z_1 z_3$.

例 1 设 $z_1=1+2\mathrm{i}$, $z_2=3-4\mathrm{i}$,求$\dfrac{z_1}{z_2}$与$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解 为求$\dfrac{z_1}{z_2}$,在分子分母同乘$\overline{z_2}$将分母实数化,

$$z=\frac{1+2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}=\frac{(1+2\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}=\frac{3+4\mathrm{i}+6\mathrm{i}-8}{25}=\frac{-1+2\mathrm{i}}{5}.$$

所以

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{-1-2\mathrm{i}}{5}.$$

例 2 设 $z=2\mathrm{i}^{41}+3\mathrm{i}^{42}-\mathrm{i}^{43}$,求 $\mathrm{Re}\ z$, $\mathrm{Im}\ z$, $z\bar{z}$.

解 利用复数 i 的性质:

$$\mathrm{i}^{4n}=1,\ \mathrm{i}^{4n+1}=\mathrm{i},\ \mathrm{i}^{4n+2}=-1,\ \mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i}\ (n\in\mathbf{N}).$$

可得

$$z=2\mathrm{i}^{41}+3\mathrm{i}^{42}-\mathrm{i}^{43}=2\mathrm{i}-3+\mathrm{i}=-3+3\mathrm{i},$$

故

$$\mathrm{Re}\ z=-3,\ \mathrm{Im}\ z=3,$$

$$z\bar{z}=(\mathrm{Re}\ z)^2+(\mathrm{Im}\ z)^2=18.$$

例 3 设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 为两个任意的复数,证明:

$$z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}).$$

证明 证法一：利用复数的代数运算证明.

$$\begin{aligned}z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2&=(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)+(x_1-\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)\\&=(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1-x_1y_2)+(x_1x_2+y_1y_2)+\\&\quad\ \mathrm{i}(x_1y_2-x_2y_1)\\&=2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}).\end{aligned}$$

证法二：由于 $z_1\overline{z_2}$ 与 $\overline{z_1}z_2$ 是对共轭复数，因此可以利用复数共轭的性质证明.

$$z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=z_1\overline{z_2}+\overline{\overline{z_1\overline{z_2}}}=2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}).$$

习题 1.1

1. 求下列复数 z 的实部、虚部、共轭复数.

(1) $\dfrac{3-2\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}$； (2) $\dfrac{\mathrm{i}}{(\mathrm{i}-1)(\mathrm{i}-2)}$；

(3) $-\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$； (4) $\mathrm{i}^{16}+5\mathrm{i}^{31}+\mathrm{i}$.

2. 当 x,y 为何值时，等式 $\dfrac{x+1+\mathrm{i}(y-3)}{5+3\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$ 成立？

3. 证明 $\mathrm{Re}(\mathrm{i}z)=-\mathrm{Im}\,z$，$\mathrm{Im}(\mathrm{i}z)=\mathrm{Re}\,z$ 对任何复数 z 都成立.

4. 设 $\dfrac{x+\mathrm{i}y}{x-\mathrm{i}y}=a+\mathrm{i}b$，求 a^2+b^2（x,y,a,b 为实数）.

5. 证明下列关于复数的共轭复数的性质.

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$； (2) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\ \overline{z_2}$；

(3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$； (4) $z\bar{z}=(\mathrm{Re}\,z)^2+(\mathrm{Im}\,z)^2$；

(5) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}\,z$； (6) $z-\bar{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}\,z$.

6. 设 z_1,z_2 是两个复数，且满足 z_1+z_2，z_1z_2 都是负实数，证明 z_1,z_2 必为实数.

1.2 复数的表示法

1.2.1 复平面

由于一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 本质上由一对有序实数 (x,y) 唯一确定，所以对于平面上给定的直角坐标系，复数集合与该平面上点的全体一一对应，从而复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可以用该平面上坐标为 (x,y) 的点来表示. 相应地，由于平面上的 x 轴对应着实数，故 x 轴称为实轴，y 轴上的非原点对应着纯虚数，故 y 轴称为虚轴，这样表