○ 高等学校教材

高等数学

第二版 下册

○ 王嘉谋 石 琳 编著

高等教育出版社

○高等学校教材

高等数学

第二版 下册

GAODENG SHUXUE

○王嘉谋 石 琳 编著

高等教育出版社·北京

内容简介

本书是依据最新修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，结合作者长期的教学实践和经验编写而成的。在保持传统教材理论体系科学完整的前提下，充分考虑到中学数学到大学数学的过渡与衔接，力求结构严谨，逻辑清晰，叙述详细，通俗易懂，富于启发性和便于自学。

全书分上、下两册，下册内容包括空间解析几何及向量代数，多元函数微分学，重积分，曲线积分和曲面积分，无穷级数等五章。书末附有习题答案与提示。

本书可作为高等学校工科类各专业高等数学课程的教材，也可作为从事高等教育的教师和科研工作者的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册／王嘉谋，石琳编著．--2版．--北京：高等教育出版社，2015.8
ISBN 978-7-04-043040-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王… ②石… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第139736号

策划编辑 杨 帆　　责任编辑 杨 帆　　封面设计 王凌波　　版式设计 余 杨
插图绘制 尹文军　　责任校对 王 雨　　责任印制 赵义民

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 北京市白帆印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 21.75
字 数 390千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版 次 2012年1月第1版
2015年8月第2版
印 次 2015年8月第1次印刷
定 价 36.80元

物 料 号 43040-00

目　录

第八章　空间解析几何及向量代数

数的基本特征可以按照某些运算律进行运算，利用这些运算律可以将一些概念、推理变成符号的演算，而图形间不能进行演算.

法国数学家笛卡儿在 17 世纪上半叶创造了坐标法，通过建立坐标系，用有序数组表述点的位置，用代数方程表示几何图形，便可用代数的方法来研究几何问题，也可通过几何直观来说明方程的代数性质，这种数形结合的方法开创了一门新的学科，这就是我们所要学习的解析几何学.

正像平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的一样，空间解析几何的知识对学习多元函数微积分也是必要的.

空间解析几何是平面解析几何的直接推广，但表示空间一点需要三个有序实数，随着空间维数的增加，演算无疑要复杂许多，不便作更深入的研究，因此，处理方法必须适当改进. 向量运算常常能更简便地解决一些几何问题，这就是向量代数在此的作用，它已成为空间解析几何的重要组成部分.

本章首先建立空间直角坐标系，引进向量的概念及其运算，并以向量为工具来研究空间的平面和直线，然后介绍空间曲面和空间曲线的部分内容，最后介绍二次曲面等空间解析几何的基本知识.

8.1　向量及其线性运算

一、空间直角坐标系

为了沟通空间图形与数之间的关系，引进空间直角坐标系.

取空间一定点 O，过点 O 作三条具有相同的长度单位且两两互相垂直的数轴，依次记为 x 轴 (横轴)、y 轴 (纵轴)、z 轴 (竖轴)，统称坐标轴. 它们构成一个空间直角坐标系，称为 $Oxyz$ 坐标系. 点 O 称为**坐标原点**. 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，让 z 轴是铅垂线；规定它们的正向要遵循右手规则，即以右手握住 z 轴，当四指从 x 轴的正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴的正向时，竖起的大拇指的指向就是 z 轴的正向 (图 8.1).

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，称为**坐标平面**. 由 x 轴和 y 轴确定的坐标平面称为 xOy 平面. 另外两个由 y 轴、z 轴及 z 轴、x 轴所确定的坐标面，分别称为 yOz 平面及 zOx 平面. 三个坐标面把空间划分为八个部分，称为八个卦限，每个部分称为一个卦限 (图 8.2).

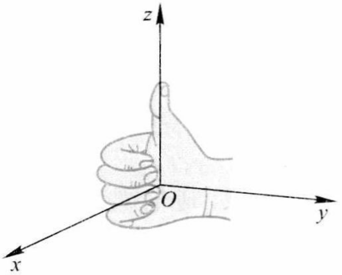

图 8.1

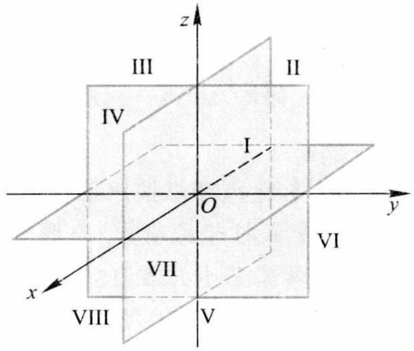

图 8.2

在分界面上含有 x 轴、y 轴及 z 轴正半轴的那个卦限称为第一卦限, 从第一卦限开始, 由 z 轴的正向往下看, xOy 面的上方部分按逆时针方向先后确定的卦限依次称为第二、第三、第四卦限; 第一卦限的下方是第五卦限, 从第五卦限开始, xOy 面的下方部分按逆时针方向先后确定的卦限依次称为第六、第七、第八卦限, 这八个卦限分别用字母 I、II、III、IV、V、VI、VII、VIII 表示.

建立了空间直角坐标系 $Oxyz$, 就可以建立有序的三个实数与空间点的一一对应关系.

设 M 为空间的一点, 过点 M 分别作与三条坐标轴垂直的平面, 分别交 x 轴、y 轴和 z 轴于点 P, Q, R. 点 P, Q, R 分别称为点 M 在 x 轴、y 轴及 z 轴上的投影 (图 8.3).

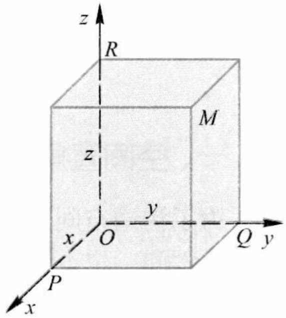

图 8.3

设点 P, Q, R 在三条坐标轴上的坐标依次为 x, y, z, 于是由空间一点 M 唯一地确定了在 x 轴、y 轴、z 轴上分别取坐标为 x, y, z 的三个点 P, Q, R; 反之, 过点 P, Q, R 分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的三个平面, 这三个平面必然交于点 M, 于是, 由三个有序数 x, y, z 可唯一确定点 M. 由此可见, 空间一点 M 与有序数组 (x, y, z) 之间存在着一一对应关系. 有序数组 (x, y, z) 称为点 M 的坐标, 依次称 x, y, z 为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标, 并记点 M 为 $M(x, y, z)$. 三元有序数组 (x, y, z) 的全体所构成的集合 $\{(x, y, z) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{R}\}$ 称为三维 (实) 欧氏空间, 记作 $\mathbf{R}^3$.

在坐标轴和坐标面上的点的坐标具有一定的特征: 坐标轴上的点至少有两个坐标等于 0, 坐标面上的点至少有一个坐标等于 0. 如 y 轴上点的坐标为 $(0, y, 0)$, xOy 平面上点的坐标为 $(x, y, 0)$, 原点的坐标为 $(0, 0, 0)$.

根据一点的坐标可得出该点关于坐标原点、坐标轴、坐标面的对称点的坐标. 例如点 $M(x,y,z)$ 关于坐标原点的对称点的坐标为 $(-x,-y,-z)$; 关于 x 轴的对称点的坐标为 $(x,-y,-z)$; 关于 xOy 面的对称点的坐标为 $(x,y,-z)$.

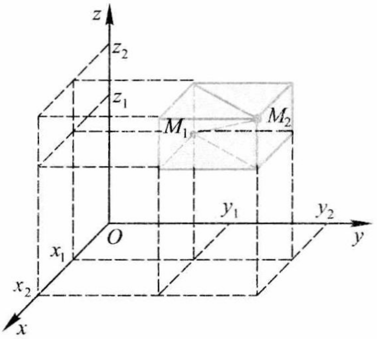

图 8.4

利用空间点的坐标可以表达空间两点间的距离. 设点 $M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点, 过点 M_1,M_2 分别作垂直于三条坐标轴的平面, 这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体 (图 8.4). 从图 8.4 可以看出, 该长方体的各棱长分别为

$$|x_2-x_1|,\quad |y_2-y_1|,\quad |z_2-z_1|,$$

因此点 M_1 和点 M_2 间的距离, 即该长方体的对角线的长度为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

特别地, 点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 1 已知点 $A(7,-1,12)$, $B(1,7,-12)$, 在 z 轴上求一点 C, 使 $\angle ACB$ 为直角.

解 因为所求的点在 z 轴上, 设该点为 $C(0,0,z)$, 依题意有

$$|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2,$$

即

$$\begin{aligned}&(1-7)^2+(7+1)^2+(-12-12)^2\\=&(0-7)^2+(0+1)^2+(z-12)^2+(0-1)^2+(0-7)^2+(z+12)^2,\end{aligned}$$

解得 $z=\pm12$, 故所求的点为 $C(0,0,\pm12)$.

例 2 求点 $M(x,y,z)$ 到三条坐标轴的距离.

解 先求点 M 到 x 轴的距离. 设点 $P(x,0,0)$ 为点 M 在 x 轴上的投影, 则线段 MP 的长即为点 M 到 x 轴的距离. 由两点间距离公式有

$$|MP|=\sqrt{(x-x)^2+y^2+z^2}=\sqrt{y^2+z^2}.$$

类似地, 设点 $Q(0,y,0)$ 及点 $R(0,0,z)$ 分别为点 M 在 y 轴及 z 轴上的投影, 则点 M 到 y 轴及 z 轴的距离分别为

$$|MQ| = \sqrt{x^2+z^2}, \quad |MR| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

二、向量及其运算

1. 向量的概念

在自然界中, 我们经常碰到的一类量只有大小, 如长度、体积、时间、质量、温度、功等, 当单位规定后, 这一类量就可用一个数来确定, 这种只有大小的量称为数量 (标量). 另外还有一些较复杂的量, 如力、位移、速度、力矩、电场强度等, 它们不仅有大小, 而且有方向, 这种既有大小又有方向的量称为向量 (矢量).

定义 1 既有大小又有方向的量称为向量. 通常用有向线段来表示向量, 有向线段的长度表示向量的大小, 有向线段的方向表示向量的方向. 向量的大小叫做向量的模.

以 P_1 为起点, P_2 为终点的有向线段所表示的向量记作 $\overrightarrow{P_1P_2}$ (如图 8.5).

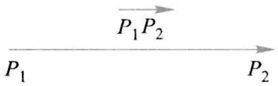

图 8.5

有时用黑体字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 或 $\vec{a},\vec{b},\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 表示向量. 向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的模分别记作 $|\overrightarrow{P_1P_2}|$ 与 $|\boldsymbol{a}|$.

在实际问题中, 有些向量与其起点有关 (如力与该力的作用点的位置有关), 有些向量与其起点无关. 由于一切向量的共性是它们都有大小和方向, 因此, 在数学上只研究与起点无关的向量, 并称其为自由向量 (简称为向量). 当遇到与起点有关的向量时, 可在一般原则下做特殊处理.

定义 2 以坐标原点 O 为起点, 向一个点 P 引向量 $\overrightarrow{OP}$, 这个向量叫做点 P 对于点 O 的向径, 通常用粗体 $\boldsymbol{r}$ 或 $\vec{r}$ 表示.

定义 3 模等于 0 的向量叫做零向量, 记作 $\mathbf{0}$, 它是起点与终点重合的向量, 规定零向量的方向任意.

定义 4 模等于 1 的向量叫做单位向量. 与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量记作 $\boldsymbol{e_a}$. 用 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别表示空间直角坐标系中与 x 轴、y 轴、z 轴同向的单位向量, 并称它们为空间直角坐标系 $Oxyz$ 的基本单位向量.

定义 5 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$, 如果它们的方向相同或相反, 则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行, 记作 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$. 规定零向量与任何向量都平行.

定义 6 如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等且方向相同, 则称向量 a 与 b 相等, 记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

当两个平行向量的起点放在同一点时, 则它们的终点与公共起点就在一条直线上, 因此, 两向量平行亦称为两向量共线.

考虑多个向量的情形, 将 $n(n \geqslant 3)$ 个向量的起点放在同一点时, 如果所有终点和公共起点都在同一平面上, 则称这 n 个向量共面.

2. 向量的加减法

定义 7 设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$, 任取一点 A, 作 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, 再以 B 为起点, 作向量 $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$, 连接 AC (如图 8.6), 那么称向量 $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和, 记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 即

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}.$$

求两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的运算叫做向量加法. 上述做出两向量之和的方法叫做向量加法的三角形法则.

仿照力学上求合力的平行四边形法则, 我们也有向量加法的平行四边形法则: 当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时, 作 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$, 以 AB, AD 为邻边作一平行四边形 $ABCD$, 连接对角线 AC (如图 8.7), 显然向量 $\overrightarrow{AC}$ 即等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

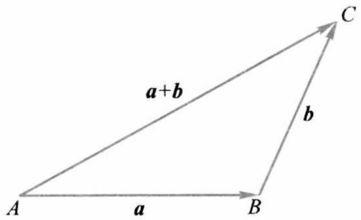

图 8.6

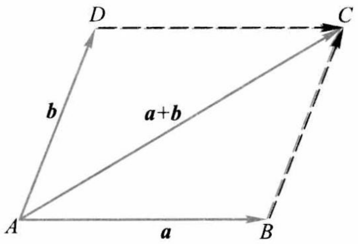

图 8.7

向量的加法符合下列运算规律:

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

事实上, 按向量加法的三角形法则, 由图 8.7 可见:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{c},$$
$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{c},$$

所以向量加法的交换律成立. 又如图 8.8 所示, 依次作向量 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{CD} = \boldsymbol{c}$, 由向量加法的三角形法则知

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD},$$
$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD},$$

所以向量加法的结合律成立.

由于向量的加法符合交换律和结合律, 故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 相加可写为

$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n.$$

按向量相加的三角形法则, 可得 n 个向量相加的一般方法如下: 自任意点 O 开始, 依次引 $\overrightarrow{OA_1} = \boldsymbol{a}_1, \overrightarrow{A_1A_2} = \boldsymbol{a}_2, \cdots, \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \boldsymbol{a}_n$, 由此得一折线 $OA_1A_2\cdots A_n$ (如图 8.9). 于是向量 $\overrightarrow{OA_n} = \boldsymbol{a}$ 就是 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的和, 即

$$\overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}.$$

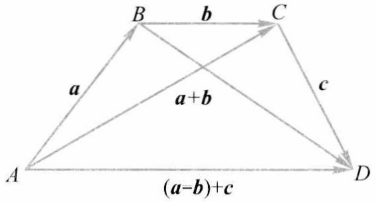

图 8.8

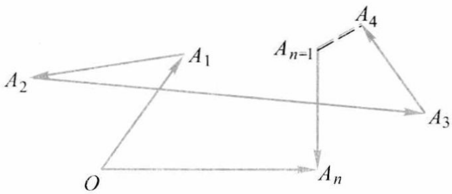

图 8.9

定义 8 设 $\boldsymbol{a}$ 为给定向量, 与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的负向量, 记作 $-\boldsymbol{a}$.

由此定义, 我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差为

$$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{a}),$$

即把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上, 便得 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 (如图 8.10).

特别地, 当 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ 时有

$$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}.$$

显然, 任给向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O, 有

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA},$$

因此向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差, 可通过下列作图法得到:

自空间任意点 O 引 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ (如图 8.11). 由三角形两边之和大于第三边的原理, 有

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|,$$

$$|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|,$$

其中等号在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向或反向时成立.

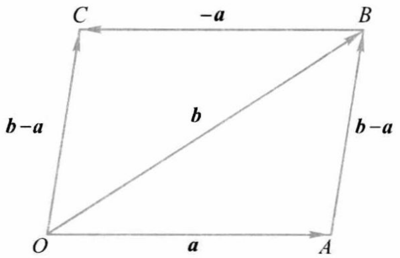

图 8.10

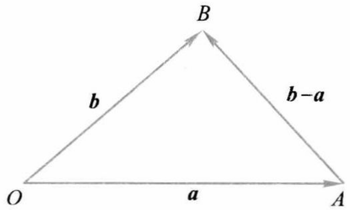

图 8.11

3. 向量与数的乘法

定义 9 向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘法记作 $\lambda\boldsymbol{a}$, 规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是这样一个向量, 它的模为向量 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍, 即 $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$, 它的方向当 $\lambda > 0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同, 当 $\lambda < 0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反, 当 $\lambda = 0$ 时, $|\lambda\boldsymbol{a}| = 0$, 即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量.

特别地, 当 $\lambda = -1$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}$ 即为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量.

可以验证, 向量与数的乘法符合下列运算规律:

(1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = \mu(\lambda\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2) 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}, \lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$.

设 $\boldsymbol{e_a}$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量, 由向量与数的乘法的定义可知, $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e_a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同, 模也相等, 因此有

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e_a},$$

从而

$$\boldsymbol{e_a} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|},$$

即任一非零向量 $\boldsymbol{a}$ 都可看成是 $\boldsymbol{a}$ 的模与 $\boldsymbol{e_a}$ 的乘积, 任一非零向量除以它的模的结果是一个与原向量方向相同的单位向量.

向量的加、减及向量与数相乘统称为向量的线性运算.

例 3 用向量的方法证明: 对角线互相平分的四边形是平行四边形.

证 设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 交于点 O 且互相平分 (图 8.12).

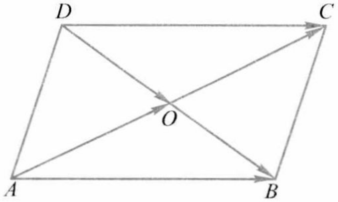

图 8.12

由图 8.12 可知,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DC},$$

因此 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$, 且 $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{DC}$, 因此四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

根据向量与数的乘法运算的定义, 可得两个向量平行的充要条件如下:

定理 1　设向量 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, 向量 $\boldsymbol{b} // \boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是存在唯一的实数 λ, 使 $\boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a}$ (称向量 b 可用向量 a 线性表出).

证　充分性是显然的, 下面证明必要性.

设 $\boldsymbol{b} // \boldsymbol{a}$. 当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时, 取 $\lambda = \dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$; 当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时, 取 $\lambda = -\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$, 则 $\lambda \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向, 且

$$|\lambda \boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}| = \frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|,$$

因此总有实数 λ, 使得 $\boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a}$ 成立.

再证实数 λ 的唯一性. 设有实数 λ, μ, 使 $\boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} = \mu \boldsymbol{a}$, 两式相减, 得

$$\lambda \boldsymbol{a} - \mu \boldsymbol{a} = (\lambda - \mu)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0},$$

由 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, 可得 $|\boldsymbol{a}| \neq 0$, 从而 $|\lambda - \mu| = 0$, 即 $\lambda = \mu$.

根据定理 1, 可得如下推论:

推论 1　向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充分必要条件是存在不全为零的两个数 α, β, 使 $\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ (称向量 a, b 线性相关).

推论 2　轴上点 P 的坐标为 x 的充要条件是 $\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}$, 其中 $\boldsymbol{i}$ 是与轴同向的单位向量.

事实上, 由数轴概念知, 给定一点 O 及单位向量 $\boldsymbol{i}$, 就可以确定一条数轴 (图 8.13).

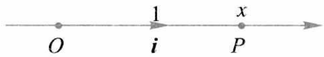

图 8.13

于是, 对于轴上任一点 P, 首先得到点 P 与它的坐标 x 间具有一一对应的关系, 其次就是点 P 与向量 $\overrightarrow{OP}$ 间具有一一对应的关系, 再由定理 1 知, 存在唯一的实数 λ, 使得 $\overrightarrow{OP} = \lambda \boldsymbol{i}$, 而由定理 1 的证明过程知 $\lambda = x$.

由推论 2 得, 如果已知轴上坐标为 x_1, x_2 的两点 A, B, 则 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i}$.

4. 向量在轴上的投影

定义 10　已知空间的一点 A 与一轴 λ, 过点 A 作垂直于 λ 的平面 π, 把这个平面与轴 λ 的交点 A' 叫做点 A 在轴 λ 上的投影 (如图 8.14).

定义 11　设向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B 在轴 λ 上的投影分别为点 A' 和 B', 那么向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 叫做向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 λ 上的投影向量, λ 轴称为投影轴 (如图 8.15).

设 $\boldsymbol{e}$ 是 λ 轴上与 λ 轴同向的单位向量, $\overrightarrow{A'B'}$ 是向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 λ 轴上的投影向量, 则由定理 1 知, 存在唯一实数 x 使得 $\overrightarrow{A'B'} = x\boldsymbol{e}$.

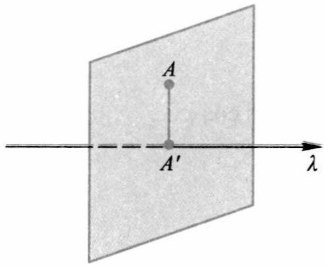

图 8.14

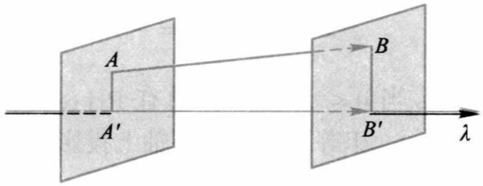

图 8.15

一般地, 称上述实数 x 为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 λ 轴上的投影, 记作 $\mathrm{Prj}_{\lambda}\overrightarrow{AB}$ 或 $(\overrightarrow{AB})_{\lambda}$, 即 $\mathrm{Prj}_{\lambda}\overrightarrow{AB} = x$ 或 $(\overrightarrow{AB})_{\lambda} = x$.

于是, 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 λ 轴上的投影向量和投影有如下关系:

$\overrightarrow{AB}$ 在 λ 轴上的投影向量 $\overrightarrow{A'B'} = (\mathrm{Prj}_{\lambda}\overrightarrow{AB})\boldsymbol{e}$.

为了讨论向量投影的性质, 我们引入两向量夹角、向量与轴夹角及轴与轴夹角的概念.

设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是两个非零向量, 以空间任意点 O 为起点作 $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, 把由射线 OA 和 OB 构成的不超过 π 的角 $\angle AOB$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角, 记作 $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}})$, 即 $0 \leqslant (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) \leqslant \pi$.

完全类似地可规定向量与轴及轴与轴间的夹角.

定理 2 $\mathrm{Prj}_{\lambda}\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$, 其中 φ 为向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 λ 轴的夹角.

证 当 $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ 时, 命题显然成立. 当 $\varphi \neq \dfrac{\pi}{2}$ 时, 如图 8.16, 过 A, B 两点分别作垂直于 λ 轴的平面 α, β, 它们与轴 λ 的交点分别是 A', B', 那么向量 $\overrightarrow{AB}$ 的投影向量为 $\overrightarrow{A'B'}$, 再作 $\overrightarrow{A'B_1} = \overrightarrow{AB}$, 易知终点 B_1 必在 β 平面上. 因为轴 $\lambda \perp$ 平面 β, 所以 $B'B_1 \perp$ 轴 λ, 进而可知 $\triangle A'B'B_1$ 为直角三角形, $(\widehat{\lambda, \overrightarrow{A'B_1}}) = (\widehat{\lambda, \overrightarrow{AB}}) = \varphi$. 设 λ 上的与 λ 轴同向的单位向量为 $\boldsymbol{e}$, 那么 $\overrightarrow{A'B'} = x\boldsymbol{e}$, 所以 $\overrightarrow{AB}$ 在 λ 轴上的投影为 x.

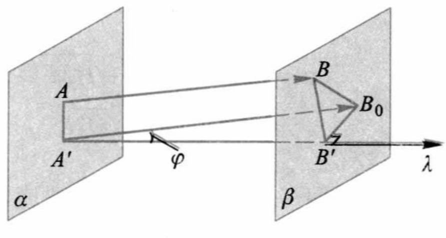

图 8.16

当 $0 \leqslant \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ 时, $\overrightarrow{A'B'}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 同向,

$$x = |\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{A'B_1}|\cos\varphi = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi;$$

当 $\dfrac{\pi}{2} < \varphi \leqslant \pi$ 时, $\overrightarrow{A'B'}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 反向,

$$x = -|\overrightarrow{A'B'}| = -|\overrightarrow{A'B_1}|\cos(\pi - \varphi) = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

从而, 当 $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ 时, 总有 $\mathrm{Prj}_{\lambda}\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$.

推论 3　相等向量在同一轴上投影相等.

利用向量加法, 数乘向量及定理 2 可得.

推论 4　对向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 和任意实数 k, 有

$$\mathrm{Prj}_{\lambda}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \mathrm{Prj}_{\lambda}\boldsymbol{a} + \mathrm{Prj}_{\lambda}\boldsymbol{b},$$

$$\mathrm{Prj}_{\lambda}(k\boldsymbol{a}) = k\mathrm{Prj}_{\lambda}\boldsymbol{a}.$$

两向量和在 λ 轴上的投影等于它们在 λ 轴上投影的和, 并可推广到 n 个向量的情况, 即

$$\mathrm{Prj}_{\lambda}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n) = \mathrm{Prj}_{\lambda}\boldsymbol{a}_1 + \mathrm{Prj}_{\lambda}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mathrm{Prj}_{\lambda}\boldsymbol{a}_n.$$

5. 利用向量坐标作向量线性运算

为将向量运算的几何方法转化为代数的运算法, 特引进向量的坐标.

设在空间直角坐标系中有一向量 $\boldsymbol{a}$, 将 $\boldsymbol{a}$ 平行移动, 使其起点与坐标原点重合, 这时设其终点为 $M(x, y, z)$. 过点 M 分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的三张平面, 其交点分别为 P, Q, R, 如图 8.17. 由向量加法的三角形法则, 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM'} + \overrightarrow{M'M} \\ &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR},\end{aligned}$$

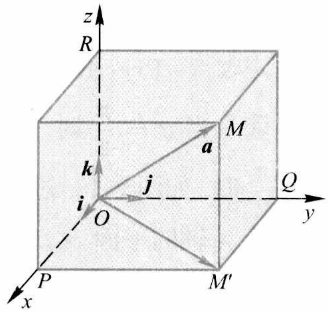

图 8.17

这说明任何一个向量都可以分解成与坐标轴平行的三个向量之和, 这三个向量 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 沿三个坐标轴方向的分向量.

根据向量与数的乘法运算可得

$$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}, \quad \overrightarrow{OQ} = y\boldsymbol{j}, \quad \overrightarrow{OR} = z\boldsymbol{k},$$

从而

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

上式称为向量 a 的按基本单位向量的分解式.

显然, 给定向量 $\boldsymbol{a}$, 可唯一确定点 M 及三个分向量 $\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OR}$, 进而唯一确定三个有序数 x, y, z; 反之, 给定三个有序数 x, y, z, 也唯一确定一点 M 及向量 $\boldsymbol{a}$. 于是, 空间一向量 $\boldsymbol{a}$ 与有序数组 x, y, z 之间存在着一一对应关系. 有序数组 x, y, z 称为向量 a 的坐标, 记为

$$\boldsymbol{a}=(x,y,z).$$

由上面的定义可以看出, 当向量 $\boldsymbol{a}$ 是以原点为起点的向径 $\overrightarrow{OM}$ 时, 向量 $\overrightarrow{OM}$ 与点 M 有着相同的坐标, 此时 (x,y,z) 既表示点 M, 又表示向径 $\overrightarrow{OM}$.

当向量 $\boldsymbol{a}$ 是以 $A(x_1,y_1,z_1)$ 为起点, 以 $B(x_2,y_2,z_2)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{AB}$ 时, 如图 8.18 所示, 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

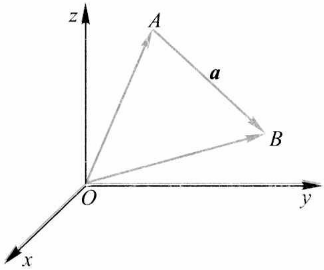

图 8.18

令

$$a_x=x_2-x_1,\quad a_y=y_2-y_1,\quad a_z=z_2-z_1,$$

则有

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},$$

即向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ 的坐标依次为 a_x,a_y,a_z. 向量 $a_x\boldsymbol{i},a_y\boldsymbol{j},a_z\boldsymbol{k}$ 分别是向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的分向量.

由于向量与它的坐标一一对应, 所以向量的加减法及向量与数的乘法运算可以通过向量坐标的代数运算进行.

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$, 即

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k},$$

利用向量加法的交换律与结合律, 以及向量与数的乘法的结合律与分配律, 有

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k},$$

由此可见, 对向量进行加、减及数乘运算, 只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算即可.

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$, 由定理 1 知, $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 相当于 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$, 其中

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}$$

$$(b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z),$$

这相当于向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的对应坐标成比例, 即

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}=\lambda. \tag{1}$$

注意 (1) 式中若有分母为零 (参见本节例 6), 则应理解为相应的分子也为零. 若两向量相等, 则两向量的对应坐标相等.

由以上讨论可知, 若向量 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$, 则 $a_x=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}, a_y=\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a}, a_z=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}$. 由此也可以证明前面的推论 4.

例 4 已知有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的起点为 $A(x_1,y_1,z_1)$, 终点为 $B(x_2,y_2,z_2)$, 在直线 AB 上求点 M, 使 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$ $(\lambda\neq-1)$.

解 设点 $M(x,y,z)$ 为所求的点, 则有

$$\overrightarrow{AM}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1),$$

$$\overrightarrow{MB}=(x_2-x,y_2-y,z_2-z),$$

由已知条件 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$ 可得

$$(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=\lambda(x_2-x,y_2-y,z_2-z).$$

因为两向量相等, 对应的坐标必相等, 所以有

$$x-x_1=\lambda(x_2-x),$$

$$y-y_1=\lambda(y_2-y),$$

$$z-z_1=\lambda(z_2-z),$$

由以上三式可解得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda},$$

因此, 所求的点为 $M\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$.

本例中的点 M 称为有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的定比分点. 特别地, 当 $\lambda=1$ 时, 点 M 是有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的中点, 其坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$