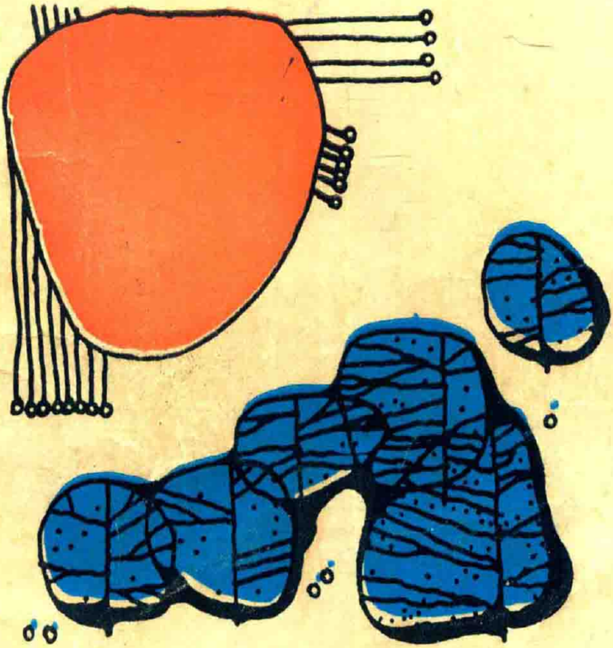
《中学学习向导丛书》

初中平面几何学习向导

（三年级用）

韩子阳　侯宝力　编



东北师范大学出版社

《中学学习向导丛书》

初中平面几何学习向导

三年级用

韩子阳　侯宝力　编

东北师范大学出版社

(吉)新登字 12 号

《中学学习向导丛书》

初中平面几何学习向导

CHUZHONG PINGMIAN JIHE XUEXI XIANGDAO

三年级用

韩子阳　侯宝力　编

责任编辑：李殿国　　封面设计：王　帆　　责任校对：张中敏

东北师范大学出版社出版　　吉林省新华书店发行
(长春市斯大林大街 110 号)　东北师范大学出版社激光照排中心制版
(邮政编码：130024)　　长春大学印刷厂印刷

开本：787×1092 毫米 1/32　　1991 年 12 月第 1 版
印张：10.75　　1991 年 12 月第 1 次印刷
字数：237 千　　印数：00 001—10 000 册

ISBN 7-5602-0657-3/G·259　　定价：4.50 元

出版说明

《中学学习向导丛书》共包括语文、英语、数学、物理、化学、生物等六个学科。它是针对当前中学各科教学的实际和开展学科教学改革，提高教学质量的需要而编写的。

现代教学论认为，学校教学的任务是教会学生学习，并不是单纯地传授知识。而目前的中学各科教学中，较普遍地存在着忽视实际应用能力的培养和智力的开发倾向，单纯灌输知识的现象仍然比较严重，学生学习的积极性调动不起来，基本能力训练得不到落实，教学质量得不到保证。要改变这种状况，除了端正教学思想，改革教学方法，加强对教学的管理和指导外，也需要编写出能体现新的教学思想，体现教学大纲要求和教材特点，有利于基础知识的掌握和基本能力训练的教学辅助材料。这套《丛书》的编写，就是吉林、辽宁、黑龙江、江苏等部分特级教师和教研员为改革当前课堂教学状况所做的一种努力，也是为帮助广大教师更好地指导学生学习所做的一点尝试。

这套《丛书》是以培养能力、发展智力为目标，同时注意学习方法的指导和良好学习习惯的培养，力求科学地处理

好知识与能力、课内与课外、动脑与动手等方面关系；并注意进行多角度、多层次的指导，以适应不同对象的需要。这是一套帮助教师改革课堂教学的新型参考书。当然，由于我们水平有限，难免疏漏，恳切希望老师和同学们在使用中注意研究和总结，及时提出宝贵意见。

编　者

1991年9月

目　　录

基础知识辅导

相似形

学习指导一　比例线段

一、比　例

【重点知识辅导】

1.　比和比例

(1)　比：给定了两个数 a 和 b，要想知道 a 是 b 的多少倍($a>b$)，或者 a 是 b 的几分之几($a<b$)，我们可以用 b 去除 a，所得的商叫做 a 和 b 两数的比；这里被除数 a 叫做比的前项，除数 b 叫做比的后项，两个数 a 和 b 的比表示成 $\frac{a}{b}$(或者 $a:b$)的形式，读作："a 比 b"，如 $17:9$.

(2)　比例：表示两个比相等的式子，叫做比例. 如果两个数 a 和 b 的比等于另外两个数 c 和 d 的比，那末我们说四个数 a,b,c,d 组成一个比例 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，或 $a:b=c:d$. 读作："a 比 b 等于 c 比 d". 如：$\frac{4}{7}=\frac{28}{49}$.

在比例式 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 或 $a:b=c:d$ 中，a 和 d 叫做比例的外项，b 和 c 叫做比例的内项，d 叫做 a,b,c 的第四比例项.

如果比例中的两个比例内项相等，即 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ 或 $a:b=b:c$，那么 b 叫做 a 和 c 的比例中项.

比例外项、比例内项、第四比例项、比例中项这些概念都是根据数在比例中的位置定义(规定)的，不管谁在这个位置上，都应该这样叫.

比和比例是两个完全不同的概念，二者不能混为一谈，比是对两个数而言，表示两个数的倍数关系；比例是对四个数而言，表示两个比相等.

2. 比例的性质定理

定理 1 (比例的基本性质定理)

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc$$

即如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $ad=bc$(比例化成等积：外项之积等于内项之积)；

如果 $ad=bc$，那么 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$(等积化成比例).

定理 2 (反比定理)

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$.

定理 3 (更比定理)

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$(内项交换)或 $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$(外项交换).

定理 4 (合比定理)

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

定理 5 (分比定理)

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

定理 6 （合分比定理）

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

定理 7 （等比定理）

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}\,(b+d+\cdots+n\neq 0)$，那么 $\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{a}{b}$.

在这七个性质定理中，最重要的是比例的基本性质定理，它表明比例和等积式可以互化. 运用比例与等积式的互化，可以把比例由一种形式变形成另一种形式. 方法是：先把比例化成等积式，再把等积式化成所需要的比例. 反比定理和更比定理就是在这种互化中推出的. 它还可用于检查所作的比例变形是否正确：把变形的结果还原成等积式，看与原式所得的等积式是否相同.

b 是 a 和 c 的比例中项，可用以下三种表示形式：$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$（或 $a:b=b:c$）；$b^2=ac$；$b=\sqrt{ac}$.

符号"⇒"读作"推出". 它表示从左端的条件可以推出右端的结论. 此外，"$\alpha\Rightarrow\beta$"还表示一个正确的命题，它和正确的命题："若 α 成立，则 β 成立"的意义完全一致，这两种表达形式是同一事实的两种说法. 如："如果胡军是北京人，那么他就是中国人"，也可表示为："胡军是北京人⇒胡军是中国人". 又如："如果一个四边形是菱形，那么这个四边形的对角线互相垂直". 也可表示为："菱形⇒对角线互相垂直". 不正确的命题，不能用"⇒"表示.

符号"⇔"读作"等价于". 它表示从左端可以推出右端，从右端也可以推出左端. 等价的双方是同一事实的两种不

同的表现形式. “$\alpha\Leftrightarrow\beta$”就相当于“$\alpha\Rightarrow\beta$”和“$\beta\Rightarrow\alpha$”这两个互逆的真命题(正定理和逆定理)同时成立. 如“一元二次方程的判别式$\triangle\geqslant0\Leftrightarrow$方程有实根”. 又如:“菱形$\Leftrightarrow$四边相等”.

等比定理的条件$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}$表示各个比的前项对于它的后项都有同样的倍数关系,所以各前项之和对于各后项之和仍有同样的倍数关系,即 $\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{a}{b}$.

等比定理的证明方法:设等比的比值为 k,得 $a=kb,c=kd,\cdots,m=kn$,然后进行代换,是一种经常用到的证明方法,应该记住.

比例的性质不仅是后面学习比例线段和相似形的基础,而且在代数和三角中的等式变形中也是一种有力的工具,应该熟练掌握,善于运用.

【典型例题解析】

【例 1-1】 已知:$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. 证明 $ab+cd$ 是 a^2+c^2 和 b^2+d^2 的比例中项.

证明 令 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$. 则 $a=bk,c=dk$.

$$\therefore\quad \frac{a^2+c^2}{ab+cd}=\frac{b^2k^2+d^2k^2}{b^2k+d^2k}=k,$$

又 $$\frac{ab+cd}{b^2+d^2}=\frac{b^2k+d^2k}{b^2+d^2}=k.$$

因此 $$\frac{a^2+c^2}{ab+cd}=\frac{ab+cd}{b^2+d^2}.\text{(符合定义)}$$

$\therefore$ $ab+cd$ 是 a^2+c^2 和 b^2+d^2 的比例中项.

【例 1-2】 a,b 是有理数,当 $a+\sqrt{3}b$ 是 $1+\sqrt{3}$ 和

$10+6\sqrt{3}$的比例中项时，a和b的值是多少？

解 依题意：$(a+\sqrt{3}b)^2=(1+\sqrt{3})(10+6\sqrt{3})$

$\therefore\quad (a^2+3b^2)+2\sqrt{3}ab=28+16\sqrt{3}\qquad(1)$

因为a,b是有理数，要使(1)式成立，必需有

$$\begin{cases}a^2+3b^2=28 & (2)\\ 2\sqrt{3}ab=16\sqrt{3} & (3)\end{cases}$$

由(3)得$b=\dfrac{8}{a}$，代入(2)得

$$a^2+3\times\frac{64}{a^2}=28$$

$\therefore\quad a^4-28a^2+192=0$

解得 $\quad a^2=16\quad$ 或 $\quad a^2=12$

$\therefore\quad a=\pm4$ 或 $a=\pm2\sqrt{3}$（舍）

由$a=\pm4$得$b=\pm2$

$\therefore\quad a=4,b=2$ 或 $a=-4,b=-2$.

【例 1-3】 若$(bcd+cda+dab+abc)^2-abcd(a+b+c+d)^2=0$，证明$a,b,c,d$按任意顺序成比例.

证明 已知等式的左边

$=[cd(a+b)+ab(c+d)]^2-abcd[(a+b)+(c+d)]^2$

$=c^2d^2(a+b)^2+a^2b^2(c+d)^2-abcd(a+b)^2-abcd(c+d)^2$

$=cd(a+b)^2(cd-ab)-ab(c+d)^2(cd-ab)$

$=(cd-ab)[cd(a+b)^2-ab(c+d)^2]$

$=(cd-ab)[cda^2+cdb^2-abc^2-abd^2]$

$=(cd-ab)[ac(ad-bc)-bd(ad-bc)]$

$=(cd-ab)(ad-bc)(ac-bd)]$

$\therefore\quad (cd-ab)(ad-bc)(ac-bd)=0.$

$\therefore\quad cd=ab$ 或 $ad=bc$ 或 $ac=bd$.

$$\therefore \quad \frac{c}{a}=\frac{b}{d} \text{或} \frac{d}{b}=\frac{c}{a} \text{或} \frac{c}{b}=\frac{d}{a}.$$

说明 1. 用以上三种结果，可以导出 a,b,c,d 按任意顺序的比例式.

2. 比例是有顺序的. 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，并不保证 $\frac{b}{a}=\frac{c}{d}$. 只有按比例的性质推出的结果才是正确的.

【例 1-4】 已知 $x\neq 0$，且 $x:y:z=\frac{1}{5}:\frac{2}{3}:\frac{1}{4}$

求 $\frac{x+2y-5z}{x-2y+5z}$ 的值.

解 设 $x:y:z=\frac{1}{5}:\frac{2}{3}:\frac{1}{4}=k$.

得 $x=\frac{1}{5}k, y=\frac{2}{3}k, z=\frac{1}{4}k$.

错误解法 由合分比定理得

$$\frac{x+2y-5z}{x-2y+5z}=\frac{(x+2y-5z)+(x-2y+5z)}{(x+2y-5z)-(x-2y+5z)}$$

$$=\frac{2x}{4y-10z}=\frac{\frac{2}{5}k}{\frac{8}{3}k-\frac{10}{4}k}=\frac{12}{5}$$

产生错误的原因是把比当成比例来处理了. $\frac{x+2y-5z}{x-2y+5z}$是比，是求一个比值，一个分式的值，而不是比例. 只为了化简式子而把比例的性质用在这个比上是错误的. 所以必须分清比和比例是两个不同的概念.

正确解答 $\frac{x+2y-5z}{x-2y+5z}=\frac{\frac{1}{5}k+\frac{4}{3}k-\frac{5}{4}k}{\frac{1}{5}k-\frac{4}{3}k+\frac{5}{4}k}$

$$=\frac{12+80-75}{12-80+75}=\frac{17}{7}=2\frac{3}{7}.$$

【**例 1-5**】已知：

$$\begin{cases}\dfrac{S}{S_1}=\dfrac{(a+mx)^2}{a^2}\\[2ex]\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{(a+mx+nx)^2}{a^2}\end{cases}\qquad\text{(式中字母均为正值)}$$

求证：$\sqrt{S}=\dfrac{m\sqrt{S_2}+n\sqrt{S_1}}{m+n}$.

证明　把已知二式两边同时开方，得

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{S}}{\sqrt{S_1}}=\dfrac{a+mx}{a} & (1)\\[2ex]\dfrac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}}=\dfrac{a+mx+nx}{a} & (2)\end{cases}$$

对(1)、(2)用分比定理，以消去分子上的 a. 得

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{S}-\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1}}=\dfrac{mx}{a} & (3)\\[2ex]\dfrac{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1}}=\dfrac{mx+nx}{a} & (4)\end{cases}$$

(3)÷(4)消去 a 及 x，得

$$\frac{\sqrt{S}-\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}}=\frac{m}{m+n}.$$

解出$\sqrt{S}$得　　$\sqrt{S}=\dfrac{m\sqrt{S_2}+n\sqrt{S_1}}{m+n}$

【**例 1-6**】　已知　$ax^3=by^3=cz^3$(a、b、c 为常数)，且 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$.

求$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}$的值.

解 把等式 $ax^3=by^3=cz^3$ 变形成比例式得$\frac{ax^2}{\frac{1}{x}}=\frac{by^2}{\frac{1}{y}}=\frac{cz^2}{\frac{1}{z}}$,并由等比定理得:

$$\frac{ax^2}{\frac{1}{x}}=\frac{by^2}{\frac{1}{y}}=\frac{cz^2}{\frac{1}{z}}=\frac{ax^2+by^2+cz^2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}.$$

即 $ax^2+by^2+cz^2=\frac{a}{\frac{1}{x^3}}=\frac{b}{\frac{1}{y^3}}=\frac{c}{\frac{1}{z^3}}$

两边开立方,并应用等比定理,得

$$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt[3]{b}}{\frac{1}{y}}=\frac{\sqrt[3]{c}}{\frac{1}{z}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$$

二、 比例线段

【重点知识辅导】

1. 两条线段的比:在同一单位下,两条线段长度的比叫做两条线段的比,设线段 AB 和 CD 的比值为 k,则可记作:$\frac{AB}{CD}=k$ 或 $AB:CD=k$.

"在同一单位下"这句话,是要强调求线段的比时,分子分母的长度单位要一致. 设想用厘米去度量线段 AB,而用寸去度量线段 CD,然后把所得的数据放到一起去比,看

AB 是 CD 的多少倍，这显然是错误的. 因为它缺乏比较的基础，没有共同的标准. 讨论线段的比时，一般不指明长度单位，但这里面包含着相比的线段的长度是用同一单位度量出来的意思. 如果遇到给出的线段长度使用不同的单位时，要先化成同一单位.

然而，两条线段的比值，又与所采用的长度单位没有关系. 这一点，课本上已举例作了说明. 一般的，可以这样证明：

设 u 是长度单位，$AB=mu$，$CD=nu$，

$$\therefore\quad \frac{AB}{CD}=\frac{mu}{nu}=\frac{m}{n}.$$

设 v 是另一长度单位，用 v 来量 u，得长度是 p，即 $u=pv$，那么，$AB=mpv$，$CD=npv$.

$$\therefore\quad \frac{AB}{CD}=\frac{mpv}{npv}=\frac{m}{n}.$$

这就证明了不论用 u 或 v 作长度单位，都是 $AB:CD=m:n$.

因为线段的长度都是正数，所以线段长度的比值也是正值. 线段的长度可以是正整数、正分数、正无理数(如边长是一个单位长度的正方形的对角线的长度为 $\sqrt{2}$ 单位长度)，总之线段的长度可以是单位长度的正实数倍，所以两条线段的比值是一个正实数.

两条线段的比，是两个数的比的概念在几何图形中的推广和应用.

2. 比例线段：在四条线段 a、b、c、d 中，如果 a 和 b 的比等于 c 和 d 的比，那么，这四条线段叫做成比例线段，简称比例线段.

比例的有关性质对于比例线段完全适用.

要判断四条线段是否成比例，就把这四条线段从小到大（或从大到小）排列好，然后计算前两线段的比和后两线段的比，若比值相等，这四条线段就成比例，否则就不成比例；也可计算第一和第四线段的积及第二和第三线段的积，如果这两个积相等，这四条线段就成比例，否则就不成比例.

3. 比例尺：在地图上、建筑图纸上或机器设备及零件的图纸上，一般都有比例尺.

$$比例尺=\frac{图上距离}{实际距离}.$$

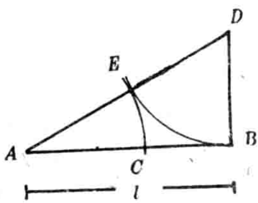
例如在比例尺为 1∶4 000 000（或说四百万分之一）的地图上，1 厘米等于地面距离 40 公里.

图上距离、实际距离和比例尺这三个量中，知道任何两个量，就可以根据上面的公式求出第三个量.

4. 黄金分割：把一条线段（AB）分成两条线段，使其中较大的线段（AC）是原线段（AB）与较小的线段（BC）的比例中项，叫做把这条线段黄金分割，这个分点 C 叫做黄金分割点.

已知线段 $AB=l$，设 $AC=x$，则 $BC=l-x$.

由黄金分割的定义得 $x^2=l(l-x)$. 整理成标准方程为 $x^2+lx-l^2=0$，解得 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}l\approx 0.618l$，即黄金分割所得较长线段（$x$）约是全线段（$l$）的0.618倍.



（图 1）

黄金分割的作图：（如图 1）