实变函数论

王晶昕　王　炜　任咏红　著

科学出版社

实变函数论

王晶昕　王　炜　任咏红　著

阜阳师范学院图书馆
藏书

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书内容包括集合与点集、Lebesgue 测度、Lebesgue 积分、Lebesgue 积分意义下的微分与不定积分以及 L^p 空间.

本书可以作为高等院校数学及其他相关专业的教材和教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

实变函数论/王晶昕, 王炜, 任咏红著. —北京: 科学出版社, 2016.3

ISBN 978-7-03-047438-4

Ⅰ. ①实… Ⅱ. ①王… ②王… ③任… Ⅲ. ①实变函数论—高等学校—教材 Ⅳ. ①O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 043385 号

责任编辑: 胡庆家 / 责任校对: 张凤琴
责任印制: 肖 兴 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

文林印务有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016 年 3 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2016 年 3 月第一次印刷 印张: 9 1/2
字数: 185 000

定价: 38.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

实变函数是高等学校数学与应用数学专业、信息与计算科学专业以及其他一些相关专业的重要基础课, 是数学分析的后继课程. 它与复变函数有很大的不同. 复变函数是在数学分析的基础上研究复变量复值函数的微积分学, 所使用的方法类似于数学分析相应的手法, 而且所关注的函数都是“表现好”的函数, 比如考虑的函数大多是“全纯”或“半纯”函数. 而实变函数是基于数学分析中出现的“表现怪异”的函数: 有无穷多间断点的函数, 处处连续处处不可微的函数, 只有有限个函数值但不是 Riemann 可积的函数, 等等. 要深入探究数学分析的本质, 必须研究这些“怪函数”, 才能去伪存真, 而要达到这个目的, 就必须寻找新的方法. 于是, 点集分析的方法就应运而生. 运用这种方法对函数的连续、积分、微分等问题进行研究, 得到了许多重要的成果, 形成了一整套理论, 这就是实变函数论.

实变函数论的重要性还在于它构成了许多现代数学理论的基础, 比如泛函分析、调合分析、概率论等. 在现代数学理论及应用中, 说到积分, 一般都指的是 Lebesgue 积分，而许多定理, 如 Fatou 引理、Lebesgue 控制收敛定理、Riesz-Fisher 定理等也都在许多数学学科及应用中被频繁使用. 因此，很好地掌握这门课程的理论和方法对于进一步学习现代科学理论方法是非常重要的.

在我国高校数学专业课程设置中, 实变函数论主要是研究 Lebesgue 可测集与可测函数、Lebesgue 可积函数与不定积分的. 与我国的实分析课程不同, 在其他国家, 这些只是实分析课程的一部分, 而好多学校的数学分析课程已经包括了 Lebesgue 测度与 Lebesgue 积分的内容 (参见 Rudin 的《数学分析原理》). 这是我国数学专业课程设置上的不同. 因此, 本书也主要讨论 Lebesgue 测度、Lebesgue 积分以及 Lebesgue 积分意义下的微分问题.

如前面所说, 实变函数理论使用的是“点集分析”方法, 因此, 课程前面必须要有足够的关于集合与点集方面的准备知识. 这样, 这门课程的结构就明晰了: 集合与点集、Lebesgue 可测集、Lebesgue 可测函数、Lebesgue 积分、Lebesgue 微分问题.

本书是在笔者多年教授实变函数论课程的讲义的基础上不断修改而成的. 期间, 课程建设得到了辽宁师范大学教务处以及数学学院领导的大力支持. 在本书的写作及试用过程中，得到了我们的老师游若云教授的悉心指导. 谢琳教授、韩友发教授都提出过许多有益的意见和建议. 这些意见和建议对于我们修改讲义、提高课程教学水平都起到了重要作用. 特别地, 我的合作者王炜教授和任咏红副教授在多

次使用中经过细心的思考和研究, 发现了许多需要修改、完善的内容并加以修正, 在此一并感谢.

实变函数是一门相对难的课程, 因此, 我们尽量在书中把主题展开的目的、概念引入的原因、定理结论的意义说清楚, 并配以适当的例子和习题, 以便学习者进行练习和反思.

由于测度与积分还是概率论的基础, 为便于学习者了解, 本书还包括了一些基本的抽象测度与积分的内容, 但这部分内容, 除了符号不同、叙述抽象外, 基本方法和理论都与 Lebesgue 测度及 Lebesgue 积分相同, 留给学习者自行探讨. 为了学习方便, 我们在书中特别注意写了是从哪个角度出发把 Lebesgue 测度、Lebesgue 积分推广到抽象情形的. 希望这些对学习者有所帮助.

王晶昕
2015 年 11 月
大连　辽宁师范大学

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　　录

绪　论

实变函数论是数学专业继数学分析课程之后的一门重要的专业基础课程. 它由 Lebesgue 测度与 Lebesgue 积分理论组成.

在这个绪论里, 我们试图通过直观、简要的分析, 为读者导引出一个思路及整体框架, 以便对这门课程有个初步的印象, 以此为线索展开以后的学习研究. 希望读者在学习到某一阶段时再回来看看这段陈述, 做个简短的回味与思考.

1. 关于积分的几个问题

实变函数论是微积分课程的继续, 它是由积分问题引出来的.

大家知道, 与 Riemann 积分有关的很多重要问题没有在微积分这门课程中得到很好的解决, 比如下面的问题 0.0.1.

问题 0.0.1　Riemann 可积函数的范围问题.

例 0.0.1　设 $\mathbb{Q}$ 是全体有理数组成的集合. 记

$$f(x)=\begin{cases}2, & x\in[0,1]\bigcap\mathbb{Q};\\ -1, & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

易知, 它不是 Riemann 可积函数, 虽然它的构造是如此简单 (函数值只取 $2,-1$ 这两个实数).

那么, 什么样的函数 Riemann 可积? 一般的微积分教程 (或数学分析教程) 给出这样的回答:

(1) 定义在有限闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 Riemann 可积;

(2) 有限闭区间 $[a,b]$ 上只有有限个间断点的有界函数 Riemann 可积;

(3) 有限闭区间 $[a,b]$ 上的单调函数 Riemann 可积.

然而, 这些都是函数 Riemann 可积的充分条件. 比如下面例 0.0.2 中的 Riemann 函数不属于上述三种函数中任何一种, 但它也是 Riemann 可积的.

例 0.0.2　定义在 $[0,1]$ 上的 Riemann 函数为

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{p}, & x=\dfrac{q}{p},\ 0<q<p,\ p,\ q\ \text{是互素的自然数};\\ 0, & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

它有无穷多个间断点, 非单调, 但却是 Riemann 可积的.

我们知道, 函数 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的充要条件是:

任给 $\varepsilon>0$, 存在分划 T: $a=x_0<x_1<\cdots<x_k=b$, 使得

$$S(T,f)-s(T,f)=\sum_{i=1}^{k}\omega_i(x_i-x_{i-1})<\varepsilon.$$

这里, $\omega_i=M_i-m_i$ 为 f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅 (M_i 与 m_i 分别为 f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的上确界与下确界, $i=1,\cdots,k$).

可是, 这个判别方法本身是构造性的, 换句话说, 要判断函数 f 是否 Riemann 可积, 得动手构造函数 f 的积分和, 直到发现它的"大和"与"小和"不相互靠拢, 才知道这个函数 f 不是 Riemann 可积的.

实际上, 微积分理论本身未能给出根据一个函数的内在性质判断这个函数是否 Riemann 可积的方法.

问题 0.0.2　积分与极限换序条件要求过高.

用一个函数列 $\{f_k\}$ 逼近函数 f, 然后通过对这个函数列的性质的把握达到把握函数 f 的相应性质的目的, 这是分析学的重要理论及方法之一. 那么, 对 $[a,b]$ 上的函数列 $\{f_k\}$ 及函数 f, 如果在 $[a,b]$ 上有 $f(x)=\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)$, 且诸函数 f_k 都在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, f 是否也在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积? 若可积, 是否有

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x?$$

回答是否定的, 见下面两个例子.

例 0.0.3　将 $[0,1]$ 中的有理数全体排列为 $r_1,r_2,\cdots,r_k,\cdots$. 对 $k\in\mathbb{N}_+$, 令

$$f_k(x)=\begin{cases}2, & x\in\{r_1,\cdots,r_k\};\\ -1, & x\in[0,1]\setminus\{r_1,\cdots,r_k\}.\end{cases}$$

则函数列 $\{f_k\}$ 在 $[0,1]$ 上收敛于例 0.0.1 中的函数 f. 每个函数 f_k 都在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积, 但 f 在 $[0,1]$ 上非 Riemann 可积.

例 0.0.4　令

$$f(x)=0,\quad x\in[0,1],\quad f_k(x)=\begin{cases}k, & x\in\left(0,\ \dfrac{1}{k}\right];\\ 0, & x\in[0,1]\setminus\left(0,\ \dfrac{1}{k}\right];\end{cases}\qquad k=1,2,\cdots.$$

则 f_k 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积, 且 $\{f_k\}$ 在 $[0,1]$ 上处处收敛于 f, f 也在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积, 但

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x=1,\quad 而\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0.$$

对于积分与极限换序问题, 微积分中有这样的结果 (见菲赫金哥尔茨的《微积分学教程》第 12 章第 408 目定理 5):

若 $\{f_k\}$ 是 $[a,b]$ 上的 Riemann 可积函数列, 且在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f, 则 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 且有

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

但一致收敛的条件太强. 有时不一致收敛的函数列也是可以的. 如下面的例0.0.5.

例 0.0.5　令

$$f_k(x)=x^k,\quad x\in[0,1],\quad k=1,2,\cdots,\quad f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1);\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

则函数列 $\{f_k\}$ 在 $[0,1]$ 上处处收敛于函数 f, 但不一致收敛, 却也有

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

问题 0.0.3　Newton-Leibniz 公式

$$\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t=f(x)-f(a)$$

在什么条件下成立? 这也是微积分学中一个基本问题. 微积分中指出, 在 Riemann 积分情形下, 若 f' 连续, 则上述公式成立. 条件减弱到 f 在 $[a,b]$ 上处处存在着有限导数, f' 可积吗? 不一定, 见例 0.0.6.

例 0.0.6　令

$$f(x)=\begin{cases}x^{\frac{3}{2}}\sin\dfrac{1}{x}, & x\in(0,\ 1];\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

则 f 在 $[0,\ 1]$ 上处处有有限的导数, 但 f' 非 Riemann 可积.

另外, 由 Cantor 集出发构造的 Cantor 函数 $\Theta(x), x\in[0,1]$ (也称为 Lebesgue 奇异函数, 见第 5 章), 它几乎处处可导, 且导函数 Riemann 可积 (因为导函数几乎处处连续）, 但

$$\int_0^1\Theta'(t)\mathrm{d}t\neq\Theta(1)-\Theta(0).$$

能不能就函数本身的内在性质给出上述公式成立的充要条件? 微积分理论没能给出满意的回答.

问题 0.0.4 $R_1[a,b]$ 不完备.

用 $R_1[a,b]$ 记 $[a,b]$ 上全体 Riemann 可积函数组成的集合. 它依通常的加法及数乘运算组成线性空间. 对于 $f,g\in R_1[a,b]$, 令

$$d(f,g)=\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x.$$

则它定义了 $R_1[a,b]$ 上的一个距离, 但由此构成的距离空间 $(R_1[a,b],d)$ 不完备, 即这个距离空间中有不收敛的 Cauchy 列, 见下面的例 0.0.7.

例 0.0.7 将 $(0,1)$ 中的有理数全体排列为 $r_1,r_2,\cdots,r_k,\cdots$.

对任意的自然数 k, 取包含在 $(0,1)$ 内的、以 r_k 为中心、长度小于 $\frac{1}{3^k}$ 的开区间 I_k, 令

$$f_k(x)=\begin{cases} 1, & x\in\bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i; \\ 0, & x\in[0,1]\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i. \end{cases}$$

可以验证, 函数列 $\{f_k\}$ 是 $(R_1[0,1],d)$ 中的 Cauchy 列, 它在 $(R_1[0,1],d)$ 中不收敛. 这说明 $(R_1[0,1],d)$ 不完备.

注意到, “有理数系的完备化空间是实数系, 而实数系的完备性是微积分学理论的基石”, 就会意识到这个问题的重要性.

解决上述问题的关键是改进积分. 为此, 我们再回头考察 Riemann 积分, 以便找到解决问题的思路和方法.

2. *想法*

先回顾一下 Riemann 积分的构造过程.

R1 设 $M>0$. 对于函数 $f(x)=M, x\in[a,b]$, f 的下方图形是矩形 $G_f=[a,b]\times[0,M]$. f 的积分可定义为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=M(b-a)\quad(\text{矩形面积}).$$

R2 称在有限区间取常值的函数为阶梯函数.

考察阶梯函数

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k} c_i\chi E_i(x),$$

其中, $a=x_0<x_1<\cdots<x_k=b$, $E_1=[x_0,x_1]$, $E_i=(x_{i-1},x_i]$, $i=2,3,\cdots,k$.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

$c_1, \cdots, c_k$ 是 k 个非负实数. 其下方图形为

$$G_f = \bigcup_{i=1}^{k} (E_i \times [0, c_i]),$$

是 k 个互不相交的小矩形 $E_1 \times [0, c_1], \cdots, E_k \times [0, c_k]$ 的并集. f 在 $[a, b]$ 上的 Riemann 积分为

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k} c_i (x_i - x_{i-1}),$$

它是上述 k 个小矩形面积的和.

R3 对于 $[a, b]$ 上的连续函数 f, 做分割 T: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$, 取 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \cdots, k$. 记

$$f_T(x) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i) \chi_{(x_{i-1}, x_i]}(x), \quad x \in [a, b].$$

依 R2 知, f_T 在 $[a, b]$ 上的积分是

$$\int_a^b f_T(x) \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

它就是 f 在 $[a, b]$ 上关于分割 T 的 Riemann 积分和. 由此可知, f 在 $[a, b]$ 上的 Riemann 积分就是形如 f_T 的阶梯函数的积分的极限.

回头看例 0.0.1 中的函数 f. 它的值域是有限集 $\{2, -1\}$, 这个函数 "差不多" 就是阶梯函数了, 可是它仍然不是 Riemann 可积函数.

我们将值域为有限集的函数称为*简单函数*. 显然, 简单函数不一定是阶梯函数, 但值域为有限集的阶梯函数一定是简单函数.

记 $E_1 = [0, 1] \bigcap \mathbb{Q}$, $E_2 = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$. 则例 0.0.1 中的函数 f 的 "下方图形" 是 $A_1 \bigcup A_2$, 其中, $A_1 = E_1 \times [0, 2]$, $A_2 = E_2 \times [-1, 0]$. A_1, A_2 给我们的直观印象 "几乎" 就是矩形了.

我们不妨将形如 "$E \times [\alpha, \beta]$" 的点集称为*次矩形*, 其中 $E \subset \mathbb{R}$.

L1 设 $E \subset \mathbb{R}$, 则对于定义在 E 上的正的常值函数 $f(x) = \beta$, f 的下方图形 $G_f = E \times [0, \beta]$ 是一个 "次矩形".

从前面的 R1 可联想到, 如果我们能够量出 E 的 "长度", 就可以定义 f 的积分为 "$\beta \times$(E 的长度)".

L2 类似于 R2, 定义那些 "简单函数" 的积分. 比如, 例 0.0.1 中的函数 f 的积分定义为

$$[2 \times \text{“}E_1\text{的长度”}] + [(-1) \times \text{“}E_2\text{的长度”}].$$

L3　用“简单函数”的积分的极限定义其他函数的积分.

如果 f 是定义在 E 上的函数, T 是 E 的一个分割: $E=E_1\bigcup E_2\bigcup\cdots\bigcup E_k$, 诸 E_i 互不相交, f 在每个 E_i 上的振幅很小, 则取 $\xi_i\in E_i$, 构造函数

$$f_T(x)=\sum_{i=1}^{k}f(\xi_i)\chi_{E_i}(x),\quad x\in E. \tag{0.0.1}$$

由 L2, f_T 在 E 上的积分应为 $\sum\limits_{i=1}^{k}[f(\xi_i)\times$“$E_i$的长度”]. 然后, 用这种积分的极限定义 f 在 E 上的积分.

上述想法能否实现首先取决于如何测量一般的点集 E 的“长度”.

我们知道, 原来用来测量区间长度的“工具”不能再用来测量一般的点集的“长度”了. 比如前面提到的 $E_1=[0,1]\bigcap\mathbb{Q}$ 就是这样的点集. 因此, 现在的首要任务是解决“测量工具”问题.

我们希望找到这样一个“测量工具”, 它能测量任意一个点集的“长度”, 并且要满足以下三个条件:

(1) 用它测量 $[0,1]$ 的“长度”时测量值仍为 1;

(2) 对于可列个互不相交的点集 $E_1,E_2,\cdots$,

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)\text{的“长度”}=\sum_{k=1}^{\infty}(E_k\text{的“长度”});$$

(3) 保证在等距变换之下测量值不变, 即对任意实数 x_0, E 的“长度”$=E+x_0$ 的“长度”.

事实上这办不到.

那么我们退而求其次: 设法寻找一个“测量工具”, 不要求它能测量任意一个点集的“长度”, 只要求它满足刚提到的三个条件, 且能够测量包括区间在内的更多一些的点集的“长度”即可.

这种“工具”是存在的, 本课程中提到的 Lebesgue 测度就是一个. 它不能用来“测量”全部点集, 但它可“测量”的点集包括了区间在内的更大范围的一类点集. 将可以被它测量的点集称为 Lebesgue 可测集.

把这一步做个简短总结就是:

找一个测量工具, 确定它能测量哪些点集. 这就是测度与可测集问题.

下一个问题是, 能够保证在前面 L3 中那个分割 T 使 f 在每个 E_i 上的振幅足够小的同时还保证诸 E_i 一定可测吗? 这就与函数 f 本身有关了.

比如, 对于 $E=[a,b]$ 上的有界函数 f, 设其满足条件 $0\leqslant A<f(x)<B$. 分割定义域 E 为一些小集合的并集:

在 $[A,B]$ 内取一组点 $\{y_i\}_{i=1}^k$, 使得 $A=y_0<y_1<\cdots<y_k=B$. 记

$$E_i=\{x\mid x\in E,\ y_{i-1}<f(x)\leqslant y_i\},$$

则 E 就被分割成为一些互不相交的子集 $E_1,\cdots,E_k$ 的并集了. 记这个分割为 T.

在 E_i 上, f 的振幅不超过 $y_i-y_{i-1}, i=1,\cdots,k$.

只要这些 E_i 的“长度”能够被测量，则即可用前面提到的方法 (见 (0.0.1) 式) 定义 f_T 的积分了.

注意到 E_i 是形如 $E_{ts}=\{x\mid x\in E,\ t<f(x)\leqslant s\}$ $(t<s)$ 的点集, 而

$$\begin{aligned}E_{ts}&=\{x\mid x\in E,\ t<f(x)\leqslant s\}\\&=\{x\mid x\in E,\ f(x)>t\}\setminus\{x\mid x\in E,\ f(x)>s\},\end{aligned}$$

故 f 只要具有条件 “对任意的实数 t, $\{x\mid x\in E,\ f(x)>t\}$ 为可测集” 即可.

我们将满足这个条件的函数 f 称为*可测函数*. 对这类函数, 才可以实现上述定义新积分的想法.

综上所述，我们要做下面的事情:

(1) 找到一个新的、更有效的测量工具 (即测度);

(2) 确定哪些点集是可测集;

(3) 考察一下什么样的函数是可测函数;

(4) 定义新的积分.

实现上述方案所创造的理论方法构成了 Lebesgue 测度与 Lebesgue 积分理论.

3. 技术方法

按以下三个步骤进行.

步骤 1　构造测度

对于实数 a,b（设 $a\leqslant b$）, 我们用 $\langle a,b\rangle$ 记以 a,b 为端点的区间, 它可以包含端点, 也可能不包含端点.

一个自然的想法是: 定义有限区间 $\langle a,b\rangle$ 的长为 $b-a$, 定义矩体 $I=\prod\limits_{i=1}^n\langle a_i,b_i\rangle$ 的体积为 $|I|=\prod\limits_{i=1}^n(b_i-a_i)$.

我们用 mE 来记 E 的测度.

如果 E 是几个不相交的有限区间 (或矩体) 的并, 则可将 mE 定义为这几个区间的长度 (或矩体的体积) 的和.

点集理论告诉我们, 一个 $\mathbb{R}$ (或 $\mathbb{R}^n$) 中的开集 G 可以分解为至多可列个互不相交的左开右闭区间 (或矩体) 的并, 因此, 自然想到将开集 G 的测度定义为这些构成 G 的区间的长 (或矩体的体积) 的和 $\sum\mid I_k\mid$.

而有界闭集 F 可以分解为一个有界开集 G_1 与它的一个开子集 G_2 的差: $F = G_1 \setminus G_2$, 自然地, 有界闭集 F 的测度可定义为 $mF = mG_1 - mG_2$.

对于一般的点集 E , 我们把所有包含 E 的开集的测度的下确界定义为 E 的**外测度**, 记为 m^*E, 即

$$m^*E \triangleq \inf\left\{mG \mid E \subset G,\ \ G\text{为开集}\right\}.$$

实际上, 可以用更简洁的方式定义:

$$m^*E \triangleq \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|I_i| \;\middle|\; E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, I_i\text{是有界开矩体}, i = 1, 2, \cdots\right\}.$$

显然, 任何点集都有外测度. 那么, m^* 可以当作测度吗?

为慎重起见, 还需再从另一个方面加以考察.

对于点集 E, 将所有含于 E 中的闭集的测度的上确界

$$m_*E \triangleq \sup\left\{mF \mid F \subset E, F\text{为闭集}\right\}.$$

称为点集 E 的内测度.

显然, 任何点集都有内测度. 内测度 m_* 与外测度 m^* 都源于区间长度 (或长方体的体积).

如果点集 E 的内测度与外测度相等, 就可以用外测度当作测度了.

但是, 却存在这样的集合 E, 它使 $m_*E < m^*E$, 因而外测度不是所有点集的测度. 等价地, 这个外测度 m^* 可能使得对某个互不相交的集列 $\{E_k\}$, 等式 $m^*\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} m^*E_k$ 不成立, 即不满足可列可加性 (或称为完全可加性).

外测度 m^* 可以当哪些点集的测度呢?

对于有界点集 E, 我们必须考察是否有 $m_*E = m^*E$, 也就是说, 要用这个条件挑选适合于用 m^* 测量的点集, 此时, 这个相等的值可以当作这种点集 E 的测度.

这种方法自然直观, 但是同时用到内外测度, 太繁琐, 不方便.

Carathéodory(卡拉西奥多利) 发现:

$m^*E = m_*E$ 的充要条件是对于任意点集 T, 都有

$$m^*T = m^*\left(T \bigcap E\right) + m^*\left(T \bigcap E^C\right). \tag{0.0.2}$$

于是, 可以将 (0.0.2) 式作为一个判断标准. 这样, 仅用外测度 m^* 就可以判明点集 E 是否可测. 可测时, 其外测度就是它的测度, 并记之为 mE.

步骤 2　定义可测函数

根据前面的分析, 我们必须考虑函数 f 是否满足:

$$\text{对任意的 } t \in \mathbb{R}, \{x \mid f(x) > t\} \text{ 是可测集}$$

这一条件. 我们称满足这个条件的函数为*可测函数*.

这样, 我们就可以针对可测函数定义新的积分了.

步骤 3　建立新积分

首先, 定义 E 上非负可测简单函数的积分:

设 $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i \chi_{E_i}(x)$, 其中 $E_1, E_2, \cdots, E_k$ 是互不相交的可测集, 它们的并集是 E. 定义

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m = \sum_{i=1}^{k} c_i mE_i.$$

直观上看, f 在 E 上的积分就是有限个 "次矩形的面积" 的和.

其次, 定义非负可测函数 f 在 E 上的积分:

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m = \sup_{h(x)\leqslant f(x)} \left\{ \int_E h(x)\mathrm{d}m \,\middle|\, h \text{ 是 } E \text{ 上非负可测简单函数} \right\}.$$

最后, 定义 E 上可测函数 f 在 E 上的积分:

将可测函数 f 分解为正部 f^+ 与负部 f^- 的差: $f = f^+ - f^-$, 其中

$$f^+(x) = \sup\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\}, \quad x \in E.$$

如果 $\int_E f^+\mathrm{d}m$ 与 $\int_E f^-\mathrm{d}m$ 中至少有一个为有限数, 则定义 f 在 E 上的 Lebesgue 积分为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}m = \int_E f^+\mathrm{d}m - \int_E f^-\mathrm{d}m.$$

$\int_E f^+\mathrm{d}m$ 和 $\int_E f^-\mathrm{d}m$ 都为有限值时, 则称 f 为 E 上的 Lebesgue 可积函数.

以上是建立 Lebesgue 测度与 Lebesgue 积分的大体思路.

Lebesgue 曾经为 Lebesgue 积分与 Riemann 积分的区别打过一个形象的比喻.

问题 0.0.5　*设公司中的职员全体组成的集合为 E. 对于 $x \in E$, $f(x)$ 是 x 的当月工资数额. 公司当月支付全体职员的工资总额是多少?*

按固有的花名册依次将职员的工资数加起来, 这就是 Riemann 积分思想; 将工资相同的职员分为同一组, 每组职员工资总值为工资数乘以员工数, 然后再将这样算出来的数相加, 这就是 Lebesgue 积分思想.

4. Lebesgue 积分的重要意义

(1) 扩大了可积函数的范围.

(2) 给出了通过函数的内在特性来判断 $[a,b]$ 上定义的函数 f 是否 Riemann 可积的充要条件:

$[a,b]$ 上的函数 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积当且仅当 f 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续.

(3) 给出了积分与极限交换次序的更宽松的条件:

若可测函数列 $\{f_k\}$ 在 E 上依测度收敛于 f, F 在 E 上 Lebesgue 可积, 且 $|f_k(x)| \leqslant F(x)$ 在 E 上几乎处处成立, 则诸 f_k 以及 f 都在 E 上 Lebesgue 可积, 且

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}m = \int_E f(x)\mathrm{d}m.$$

(4) 在新的积分意义下，给出了 Newton-Leibniz 公式成立的充要条件:

f 在 $[a,b]$ 上成立着等式

$$\int_a^x f^{'}(t)\mathrm{d}m = f(x) - f(a)$$

当且仅当 f 在 $[a,b]$ 上绝对连续.

(5) 给出了 $R_1[a,b]$ 的完备化空间:

$R_1[a,b]$ 的完备化空间就是 $[a,b]$ 上的 Lebesgue 可积函数组成的空间 $L_1[a,b]$.

(6) 虽然 Lebesgue 积分不像 Riemann 积分那样可以给出具体的运算方法与技术, 但是 Lebesgue 积分的性质灵活, 即使在涉及 Riemann 积分运算的情形时, 适时将其转化为 Lebesgue 积分, 就可以运用 Lebesgue 积分的性质加以灵活变通, 使其转化为比较容易运算的形式.

(7) Lebesgue 测度与 Lebesgue 积分理论意义之重大, 影响之深远, 还在于人们籍此所做的进一步思考:

测度是什么? 测度就是定义在由满足条件 “$m_*E = m^*E$” 的那些点集 E 组成的集族上的函数.

细致分析发现, Lebesgue 可测集有以下特性:

1) $\varnothing$ 可测;

2) E 可测时, E^C (E 的余集) 也可测;

3) 若 E_k 可测, $k=1,2,\cdots$, 则 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ 可测.

这三个基本属性启发引导人们进一步思考如下问题:

若一个集族满足与上述三个条件类似的条件, 能在这个集族上定义 “测度” 吗?

以这个问题为源头，人们建立起来了抽象测度的理论:

对任意非空集合 X, 若 X 的一些子集组成的集族 $\mathcal{R}$ 满足下列条件:

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com