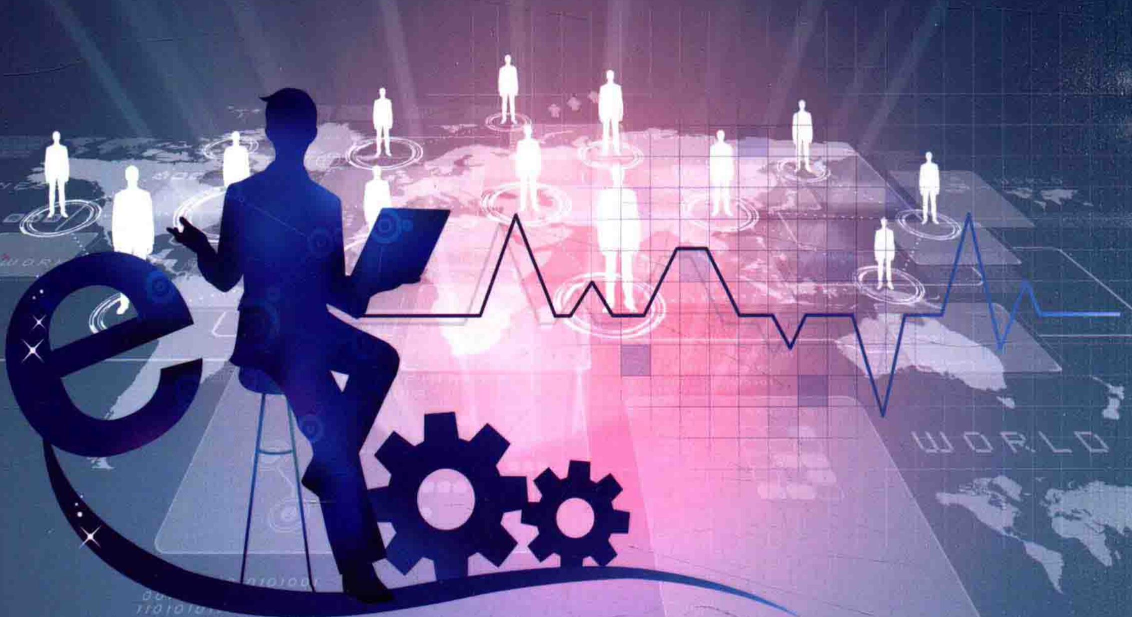
"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材
普通高等院校计算机类专业规划教材·精品系列

离散数学题解与分析

LISAN SHUXUE TIJIE YU FENXI

（第二版）

刘任任 主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材
普通高等院校计算机类专业规划教材·精品系列

离散数学题解与分析

（第二版）

刘任任　主　编
刘玉珍　肖　芬　孟国艳　副主编
周经野　谢慧萍　参　编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本书是“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材。

本书是《离散数学(第二版)》(刘任任、王婷、周经野主编,中国铁道出版社出版,2015年)的配套教材,对主教材中集合论与数理逻辑、图论与组合数学、代数结构与初等数论、形式语言与自动机理论基础等方面的习题进行了较详细的分析与解答,以帮助读者加深对基本概念、基本定理以及运算规律的理解。

本书适合作为高等院校计算机及相关专业的教材,也可供从事离散结构领域研究工作的人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学题解与分析/刘任任主编. —2版. —北京:中国铁道出版社,2015.8

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

普通高等院校计算机类专业规划教材·精品系列

ISBN 978-7-113-20807-3

Ⅰ.①离… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①离散数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第183370号

书　　名: 离散数学题解与分析(第二版)
作　　者: 刘任任　主编

策　　划: 周海燕　　　　**读者热线:** 400-668-0820
责任编辑: 周海燕　徐盼欣
封面设计: 穆　丽
封面制作: 白　雪
责任校对: 汤淑梅
责任印制: 李　佳

出版发行: 中国铁道出版社(100054,北京市西城区右安门西街8号)
网　　址: http://www.51eds.com
印　　刷: 北京华正印刷有限公司
版　　次: 2011年2月第1版　　2015年8月第2版　　2015年8月第1次印刷
开　　本: 787 mm×1 092 mm　1/16　**印张:** 10　**字数:** 239千
书　　号: ISBN 978-7-113-20807-3
定　　价: 23.00元

前言（第二版）

FOREWORD

离散数学是计算机及其相关专业的重要专业基础课，学好离散数学对于计算机专业课程的学习起着事半功倍的作用。

离散数学通过讲授离散数学中的基本概念、基本定理和运算技巧及其在计算机科学中的应用，来培养学生的数学抽象能力、用数学语言描述问题的能力、逻辑思维能力以及数学论证能力。但许多概念、定理等内容需要通过做习题来得到掌握和理解。本书是"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材。本书以主教材《离散数学（第二版）》（刘任任、王婷、周经野主编，中国铁道出版社出版，2015年）为主要依据，对书中集合论与数理逻辑、图论与组合数学、代数结构与初等数论、形式语言与自动机理论基础等方面的习题进行了较详细的分析与解答，以帮助读者加深对书中的基本概念、基本定理以及运算规律的理解。

全书共分四篇：第一篇（1～6章）是集合论与数理逻辑，第二篇（7～18章）是图论与组合数学，第三篇（19～22章）是代数结构与初等数论，第四篇（23、24章）是形式语言与自动机理论基础。

学好离散数学，一方面要深刻理解其有关概念、掌握重要结论，另一方面要多做练习以加深对离散数学内容的理解。这对于在计算机其他专业课程的学习中熟练运用离散数学的理论知识是至关重要的。

本书对主教材中每章的习题进行了较详细的解答，希望读者在做完习题后参考，相信能起到举一反三、加深对主教材相应内容的理解的作用。其中，解答过程中所引用的定理和定义均为主教材中相应编号，不再一一注明。

本书由刘任任担任主编，刘玉珍、肖芬、孟国艳担任副主编，周经野、谢慧萍参与编写。曹春红、邹娟等对本书的编写提出了许多宝贵意见和建议，在此一并表示感谢。由于编者水平所限，书中的疏漏和不足之处在所难免。欢迎读者提出宝贵意见。

特此致谢！

编　者

2015年7月

CONTENTS

目录

第一篇　集合论与数理逻辑

第 1 章　集合 …… 3
第 2 章　关系 …… 7
第 3 章　映射 …… 15
第 4 章　可数集与不可数集 …… 17
第 5 章　命题逻辑 …… 20
第 6 章　一阶逻辑 …… 31

第二篇　图论与组合数学

第 7 章　图与子图 …… 39
第 8 章　树 …… 48
第 9 章　图的连通性 …… 52
第 10 章　*E* 图与 *H* 图 …… 58
第 11 章　匹配与点独立集 …… 64
第 12 章　图的着色 …… 73
第 13 章　平面图 …… 80
第 14 章　有向图 …… 86
第 15 章　网络最大流 …… 91
第 16 章　排列和组合的一般计数方法 …… 98
第 17 章　容斥原理 …… 103
第 18 章　递推关系与生成函数 …… 106

第三篇　代数结构与初等数论

第 19 章　整数 …… 113
第 20 章　群 …… 120
第 21 章　环与域 …… 128
第 22 章　格与布尔代数 …… 136

第四篇　形式语言与自动机理论基础

第 23 章　形式语言 …… 145
第 24 章　有限自动机理论 …… 149
参考文献 …… 153

第一篇　集合论与数理逻辑

(Set theory & Mathematical logic)

第1章

集合(set)

1. 用列举法表示下列集合：

(1)1 到 100 之间的自然数的集合；　(2)小于 5 的正整数集合；

(3)偶自然数的集合；　(4)奇整数的集合.

分析：本题主要考察集合的定义及怎样用列举法表示集合.

解：(1)$A=\{1,2,3,\cdots,100\}$；　(2)$B=\{1,2,3,4\}$；

(3)$C=\{0,2,4,6,8,\cdots\}$；　(4)$D=\{\cdots,-5,-3,-1,1,3,5,\cdots\}$.

2. 用描述法表示下列集合：

(1)偶整数的集合；　(2)素数的集合；

(3)自然数 a 的整数幂的集合.

分析：本题主要考察集合的定义及怎样用描述法表示集合.

解：(1)$E=\{x \mid x$ 是能被 2 整除的整数$\}$；

(2)$P=\{x \mid x$ 是大于 1 且只能被 1 和自身整除的整数$\}$；

(3)$A=\{a^n \mid a$ 是自然数,n 是整数$\}$.

3. 设 $S=\{2,a,\{3\},4\}$,$R=\{\{a\},3,4,1\}$,请判断下面的写法正确与否：

(1)$\{a\}\in S$；　(2)$\{a\}\in R$；

(3)$\{a,4,\{3\}\}\subseteq S$；　(4)$\{\{a\},1,3,4\}\subset R$；

(5)$R=S$；　(6)$\{a\}\subseteq S$；

(7)$\{a\}\subseteq R$；　(8)$\varnothing\subseteq R$；

(9)$\varnothing\subseteq\{\{a\}\}\subseteq R\subseteq E$；　(10)$\{\varnothing\}\subseteq S$；

(11)$\varnothing\in R$；　(12)$\varnothing\subseteq\{\{3\},4\}$.

分析：本题主要考察集合的基本运算.

解：(1)错误；　(2)正确；　(3)正确；　(4)错误；　(5)错误；　(6)正确；　(7)错误；(8)正确；　(9)正确；　(10)错误；　(11)错误；　(12)正确.

4. 设 A,B 和 C 为任意三个集合. 以下说法是否正确？若正确则证明之,否则举反例说明.

(1)若 $A\in B$ 且 $B\subseteq C$,则 $A\in C$；

(2)若 $A\in B$ 且 $B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$；

(3)若 $A\subseteq B$ 且 $B\in C$,则 $A\in C$；

(4)若 $A\subseteq B$ 且 $B\in C$,则 $A\subseteq C$.

分析：本题主要考察集合的基本运算.

解：(1)正确. 因 $B\subseteq C$,所以,对任何 $x\in B$ 均有 $x\in C$,今 $A\in B$,故 $A\in C$.

(2)错误. 例如,令 $A=\{1\}, B=\{\{1\},2\}, C=\{\{1\},2,3\}$.

(3)错误. 例如,令 $A=\{1\}, B=\{1,2\}, C=\{\{1,2\}\}$.

(4)错误. 例如,令 $A=B=\{1\}, C=\{\{1\}\}$.

5. 设 $P=\{S \mid S$ 是集合且 $S \notin S\}$. P 是集合吗? 请证明你的结论.

分析:本题主要考察对集合定义的理解.

解:假设 P 是集合. 于是,

若 $P \in P$,则由集合的定义,有 $P \notin P$;

若 $P \notin P$,则由集合的定义,有 $P \in P$.

总之,有 $P \in P$ 当且仅当 $P \notin P$. 此为矛盾. 故 P 不是集合.

6. 设 $E=\{1,2,3,4,5\}, A=\{1,3\}, B=\{1,4,5\}, C=\{4,3\}$. 试求下列集合:

(1)$A \cap \overline{B}$;　　(2)$(A \cap B) \cup \overline{C}$;

(3)$(\overline{A \cap B})$;　　(4)$\overline{A} \cup \overline{B}$;

(5)$(A-B)-C$;　　(6)$A-(B-C)$;

(7)$(A \oplus B) \oplus C$;　　(8)$(A \oplus B) \oplus (B \oplus C)$.

分析:本题主要考察子集、交集、并集、补集、差集、对称差运算的基本定义.

解:(1)$A \cap \overline{B}=\{3\}$;　　(2)$(A \cap B) \cup \overline{C}=\{1,2,5\}$;

(3)$(\overline{A \cap B})=\{2,3,4,5\}$;　　(4)$\overline{A} \cup \overline{B}=\{2,3,4,5\}$;

(5)$(A-B)-C=\varnothing$;　　(6)$A-(B-C)=\{3\}$;

(7)$(A \oplus B) \oplus C=\{5\}$;　　(8)$(A \oplus B) \oplus (B \oplus C)=\{1,4\}$.

7. 设 A, B 和 C 为任意三个集合,以下说法是否正确? 若正确则证明之,否则举反例说明.

(1)若 $A \cup B=A \cup C$,则 $B=C$;

(2)若 $A \cap B=A \cap C$,则 $B=C$;

(3)若 $A \oplus B=A \oplus C$,则 $B=C$;

(4)若 $A \subseteq B \cup C$,则 $A \subseteq B$ 或 $A \subseteq C$;

(5)若 $B \cap C \subseteq A$,则 $B \subseteq A$ 或 $C \subseteq A$.

分析:本题主要考察包含、并、交、对称差运算的定义及其相互关系.

解:(1)错误. 例如,令 $A=\{1\}, B=\{1,2\}, C=\{2\}$.

(2)错误. 例如,令 $A=\{1\}, B=\{2\}, C=\{3\}$.

(3)正确. 若 $B \neq C$,不妨设 $x \in B$ 而 $x \notin C$. 于是:

(ⅰ)若 $x \in A$,则 $x \notin A \oplus B$,但 $x \in A \oplus C$;

(ⅱ)若 $x \notin A$,则 $x \in A \oplus B$,但 $x \notin A \oplus C$.

此与 $A \oplus B=A \oplus C$ 矛盾. 故结论成立.

(4)错误. 例如,令 $A=\{1,2\}, B=\{1\}, C=\{2\}$.

(5)错误. 例如,令 $A=\{2\}, B=\{1,2\}, C=\{2,3\}$.

8. 设 A, B 和 C 是任意三个集合,试证明:

(1)$A=B$ 当且仅当 $A \oplus B=\varnothing$;

(2)$A \oplus B=B \oplus A$;

(3)$(A \oplus B) \oplus C=A \oplus (B \oplus C)$;

(4)$A \cap (B \oplus C)=(A \cap B) \oplus (A \cap C)$;

(5)$A \cup (B \oplus C) \neq (A \cup B) \oplus (A \cup C)$.

分析:本题主要考察对称差、差、运算的相互转换以及集合相等的定义.

证明:(1)设 $A=B$. 于是 $A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)=A-A=\varnothing$. 反之,设 $A\oplus B=\varnothing$. 若 $A\neq B$,则不妨设 $x\in A$ 而 $x\notin B$. 于是 $x\in A\cup B$,而 $x\notin A\cap B$,从而 $A\oplus B\neq\varnothing$. 此为矛盾. 故 $A=B$.

(2)$A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)=(B\cup A)-(B\cap A)=B\oplus A$.

(3)左式 $=(A\oplus B)\oplus C$

$$\begin{aligned}
&=((A-B)\cup(B-A))\oplus C\\
&=((A\cap\bar B)\cup(B\cap\bar A))\oplus C\\
&=((A\cap\bar B)\cup(B\cap\bar A)\cup C)-(((A\cap\bar B)\cup(B\cap\bar A))\cap C)\\
&=((A\cap\bar B)\cup(B\cap\bar A)\cup C)\cap(\overline{((A\cap\bar B)\cup(B\cap\bar A))\cap C})\\
&=((((A\cap\bar B)\cup\bar A)\cap((A\cap\bar B)\cup B))\cup C)\cap\overline{(A\cap\bar B\cap C)\cup(\bar A\cap B\cap C)}\\
&=(((\bar A\cup\bar B)\cap(A\cup B))\cup C)\cap((\bar A\cup B\cup\bar C)\cap(A\cup\bar B\cup\bar C))\\
&=(\bar A\cup\bar B\cup C)\cap(A\cup B\cup C)\cap(\bar A\cup B\cup\bar C)\cap(A\cup\bar B\cup\bar C);
\end{aligned}$$

右式 $=A\oplus(B\oplus C)$

$$\begin{aligned}
&=A\oplus((B\cap\bar C)\cup(\bar B\cap C))\\
&=(A\cup(B\cap\bar C)\cup(\bar B\cap C))-(A\cap((B\cap\bar C)\cup(\bar B\cap C)))\\
&=(((A\cup B)\cap(A\cup\bar C))\cup(\bar B\cap C))\cap(\overline{A\cap((B\cap\bar C)\cup(\bar B\cap C))})\\
&=((A\cup B)\cup(\bar B\cap C))\cap((A\cup\bar C)\cup(\bar B\cap C))\cap(\bar A\cup((\bar B\cup C)\cap(B\cup\bar C)))\\
&=(A\cup B\cup C)\cap(A\cup\bar B\cup\bar C)\cap(\bar A\cup\bar B\cup C)\cap(\bar A\cup B\cup\bar C)\\
&=(\bar A\cup\bar B\cup C)\cap(A\cup B\cup C)\cap(\bar A\cup B\cup\bar C)\cap(A\cup\bar B\cup\bar C)\\
&=\text{左式}.
\end{aligned}$$

(4)　$A\cap(B\oplus C)$

$$\begin{aligned}
&=A\cap((B-C)\cup(C-B))\\
&=A\cap((B\cap\bar C)\cup(C\cap\bar B))\\
&=(A\cap B\cap\bar C)\cup(A\cap\bar B\cap C);
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
&(A\cap B)\oplus(A\cap C)\\
&=((A\cap B)-(A\cap C))\cup((A\cap C)-(A\cap B))\\
&=((A\cap B)\cap(\overline{A\cap C}))\cup((A\cap C)\cap(\overline{A\cap B}))\\
&=((A\cap B)\cap(\bar A\cup\bar C))\cup((A\cap C)\cap(\bar A\cup\bar B))\\
&=(A\cap B\cap\bar C)\cup(A\cap\bar B\cap C);
\end{aligned}$$

因此,$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$.

(5)取 $A\neq\varnothing$,且 $A\supseteq B,A\supseteq C$. 于是,$A\supseteq B\cup C\supseteq B\oplus C$,从而,$A\cup(B\oplus C)=A\neq\varnothing$.

但$(A\cup B)\oplus(A\cup C)=A\oplus A=\varnothing$. 因此,$A\cup(B\oplus C)\neq(A\cup B)\oplus(A\cup C)$.

9. 设 $A=\{1,2\}$,$B=\{2,3\}$,试确定以下集合:

(1)$A\times\{1\}\times B$;　　　　(2)$A^2\times B$;

(3)$(B\times A)^2$.

分析:本题主要考察笛卡儿积的定义.

解:(1)$A\times\{1\}\times B=\{\langle1,1,2\rangle,\langle1,1,3\rangle,\langle2,1,2\rangle,\langle2,1,3\rangle\}$;

(2)$A^2\times B=(A\times A)\times B$

$$\begin{aligned}
&=\{\langle\langle1,1\rangle,2\rangle,\langle\langle1,1\rangle,3\rangle,\langle\langle1,2\rangle,2\rangle,\langle\langle1,2\rangle,3\rangle,\\
&\quad\langle\langle2,1\rangle,2\rangle,\langle\langle2,1\rangle,3\rangle,\langle\langle2,2\rangle,2\rangle,\langle\langle2,2\rangle,3\rangle\}\\
&=\{\langle1,1,2\rangle,\langle1,1,3\rangle,\langle1,2,2\rangle,\langle1,2,3\rangle,
\end{aligned}$$

$\langle 2,1,2\rangle,\langle 2,1,3\rangle,\langle 2,2,2\rangle,\langle 2,2,3\rangle\}$;

(3)$B\times A=\{\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$;

$$\begin{aligned}(B\times A)^2&=(B\times A)\times(B\times A)\\&=\{\langle\langle 2,1\rangle,\langle 2,1\rangle\rangle,\langle\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle\rangle,\langle\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle\rangle,\langle\langle 2,1\rangle,\\&\quad\langle 3,2\rangle\rangle,\langle\langle 2,2\rangle,\langle 2,1\rangle\rangle,\langle\langle 2,2\rangle,\langle 2,2\rangle\rangle,\langle\langle 2,2\rangle,\langle 3,1\rangle\rangle,\\&\quad\langle\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle\rangle,\langle\langle 3,1\rangle,\langle 2,1\rangle\rangle,\langle\langle 3,1\rangle,\langle 2,2\rangle\rangle,\langle\langle 3,1\rangle,\\&\quad\langle 3,1\rangle\rangle,\langle\langle 31\rangle,\langle 3,2\rangle\rangle,\langle\langle 3,2\rangle,\langle 2,1\rangle\rangle,\langle\langle 3,2\rangle,\langle 2,2\rangle\rangle,\\&\quad\langle\langle 3,2\rangle,\langle 3,1\rangle\rangle,\langle\langle 3,2\rangle,\langle 3,2\rangle\rangle\}.\end{aligned}$$

10. 证明:若 $A\times A=B\times B$,则 $A=B$.

分析:本题主要是根据集合相等以及笛卡儿积的定义证明.

证明:因为 $x\in A$ 当且仅当 $\langle x,x\rangle\in A\times A$ 当且仅当 $\langle x,x\rangle\in B\times B$ 当且仅当 $x\in B$,所以,当 $A\times A=B\times B$ 时,$A=B$.

11. 证明:若 $A\times B=A\times C$,且 $A\neq\varnothing$,则 $B=C$.

分析:本题主要是根据集合相等以及笛卡儿积的定义证明.

证明:任取 $y\in B$,因 $A\neq\varnothing$,所以存在 $x\in A$,使 $\langle x,y\rangle\in A\times B$,从而 $\langle x,y\rangle\in A\times C$. 因此 $y\in C$,即 $B\subseteq C$. 同理可证 $C\subseteq B$. 故 $B=C$.

12. 设 x,y 为任意元素,令 $\langle x,y\rangle=\{\{x\},\{x,y\}\}$,试证明:$\langle x,y\rangle=\langle u,v\rangle$ 当且仅当 $x=u,y=v$.

分析:本题根据集合相等之定义及集合的互异性证明.

证明:设 $\langle x,y\rangle=\langle u,v\rangle$,即 $\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{u\},\{u,v\}\}$.

(ⅰ)若 $\{x\}=\{u\}$,$\{x,y\}=\{u,v\}$,则有 $x=u,y=v$;

(ⅱ)若 $\{x\}=\{u,v\}$,$\{x,y\}=\{u\}$,则有　$x=y=u=v$.

反之,设 $x=u,y=v$,则由定义有 $\langle x,y\rangle=\langle u,v\rangle$.

13. 将三元有序组 $\langle x,y,z\rangle$ 定义为 $\{\{x\},\{x,y\},\{x,y,z\}\}$ 合适吗?为什么?

分析:本题根据有序组相等的定义及集合的互异性证明.

解:不合适. 例如,由定义

$$\langle 1,2,1\rangle=\{\{1\},\{1,2\},\{1,2,1\}\}=\{\{1\},\{1,2\}\}$$

而

$$\langle 1,1,2\rangle=\{\{1\},\{1,1\},\{1,1,2\}\}=\{\{1\},\{1,2\}\}$$

但显然

$$\langle 1,2,1\rangle\neq\langle 1,1,2\rangle$$

第 2 章

关系(relations)

1. 确定下列二元关系：

(1)$A=\{1,2,3\}, B=\{1,3,5\}, R=\{x,y \mid x,y\in A\cap B\}\subseteq A\times B$;

(2)$A=\{0,1,2,3,4,5,6,8\}, R=\{\langle x,y\rangle \mid x=2^y\}\subseteq A\times A$.

分析:本题主要运用知识为集合的交、关系以及笛卡儿积的定义.

解:(1) $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$;

(2)$R=\{\langle 1,0\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 8,3\rangle\}$.

2. 请分别给出满足下列要求的二元关系的例子：

(1)既是自反的,又是反自反的;

(2)既不是自反的,又不是反自反的;

(3)既是对称的,又是反对称的;

(4)既不是对称的,又不是反对称的.

分析:本题主要考察关系的五个性质(自反性、反自反性、对称性、反对称性、传递性).

解:设 R 是定义在集合 A 上的二元关系.

(1)令 $A=\varnothing$,则 $R=\varnothing$,于是 R 既是自反又是反自反的;

(2)令 $A=\{1,2\}$,$R=\{\langle 1,1\rangle\}$,于是 R 既不是自反又不是反自反的;

(3)令 $A=\{1,2\}$,$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$,于是 R 既是对称又是反对称的;

(4)令 $A=\{1,2,3\}$,$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle\}$,于是 R 既不是对称又不是反对称的.

3. 设集合 A 有 n 个元素,试问：

(1)共有多少种定义在 A 上的不同的二元关系?

(2)共有多少种定义在 A 上的不同的自反关系?

(3)共有多少种定义在 A 上的不同的反自反关系?

(4)共有多少种定义在 A 上的不同的对称关系?

(5)共有多少种定义在 A 上的不同的反对称关系?

分析:本题主要考察知识为二元关系的自反性、反自反性、对称性、反对称性所对应的关系矩阵之性质,本题可以在做完第 4 题(根据满足某个性质的关系的关系矩阵)之后再来考虑.

解:设 $|A|=n$,于是

(1)共有 2^{n^2} 种定义在 A 上的不同的二元关系;

(2)共有 2^{n^2-n} 种定义在 A 上的不同的自反关系;

(3)共有 2^{n^2-n} 种定义在 A 上的不同的反自反关系;

(4)共有 $2^n\cdot 2^{n(n-1)/2}=2^{n(n+1)/2}$ 种定义在 A 上的不同的对称关系;

(5)共有$2^n\sum_{k=0}^{m}C_m^k\cdot 2^{m-k}=2^n\cdot 3^m$种定义在$A$上的不同的反对称关系,其中,$m=\frac{n(n-1)}{2}$.

4. 请分别描述自反关系、反自反关系、对称关系和反对称关系的关系矩阵以及关系图的特征.

分析:本题主要是根据自反关系、反对称关系、对称关系和反对称关系的定义来确定关系矩阵以及关系图.

解:(1)自反关系矩阵的主对角线上元素全为1;而关系图中每个结点上都有圈.

(2)反自反关系矩阵的主对角线上元素全为0;而关系图中每个结点上均无圈.

(3)对称关系矩阵为对称矩阵;而关系图中任何两个结点之间的有向弧是成对出现的,方向相反.

(4)反对称关系矩阵$\boldsymbol{M}_R=(r_{ij})_{n\times n}$的元素满足:当$i\neq j$时,$r_{ij}\times r_{ji}=0$.

5. 设$A=\{1,2,3,4\}$,$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,4\rangle\}$,$S=\{\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,2\rangle\}$,试求$R\cdot S$,$S\cdot R$,$R^2$,及$S^2$.

分析:主要考察关系的复合运算之定义.

解:$R\cdot S=\{\langle 1,4\rangle,\langle 1,3\rangle\}$;

$S\cdot R=\{\langle 3,4\rangle\}$;

$R^2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle\}$;

$S^2=\{\langle 2,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 3,3\rangle\}$.

6. 试举出使

$$R\cdot(S\cap T)\subset(R\cdot S)\cap(R\cdot T)$$
$$(S\cap T)\cdot P\subset(S\cdot P)\cap(T\cdot P)$$

成立的二元关系R,S,T,P的实例.

分析:本题主要说明关系的复合与关系的交运算不满足分配律.

解:设$R=\{\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$,$T=\{\langle 1,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$,$S=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$,$P=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle\}$,于是,有$S\cap T=\varnothing$,$R\cdot(S\cap T)=\varnothing$,$R\cdot S=\{\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$,$R\cdot T=\{\langle 3,3\rangle\}$,因此

$$(R\cdot S)\cap(R\cdot T)=\{\langle 3,3\rangle\}\neq\varnothing$$

从而

$$R\cdot(S\cap T)\subset(R\cdot S)\cap(R\cdot T).$$

又,$(S\cap T)\cdot P=\varnothing$,$S\cdot P=\{\langle 1,1\rangle\}$,$T\cdot P=\{\langle 3,1\rangle,\langle 1,1\rangle\}$,因此

$$(S\cdot P)\cap(T\cdot P)=\{\langle 1,1\rangle\}\neq\varnothing$$

从而

$$(S\cap T)\cdot P\subset(S\cdot P)\cap(T\cdot P)$$

7. 设R和S是集合A上的二元关系. 下面的说法正确吗?请说出理由.

(1)若R和S是自反的,则$R\cdot S$也是自反的;

(2)若R和S是反自反的,则$R\cdot S$也是反自反的;

(3)若R和S是对称的,则$R\cdot S$也是对称的;

(4)若R和S是反对称的,则$R\cdot S$也是反对称的;

(5)若R和S是传递的,则$R\cdot S$也是传递的.

分析:本题主要是考察两个满足同一种性质的关系之复合运算是否保持该性质,正确的可以根据定义给出证明,不正确的请给出反例. 一般如果正确相对容易证明,不正确给出反例相对较难.

解:(1)正确. 因为对任意$x\in A$,有xRx,xSx,所以$x(R\cdot S)x$. 故$R\cdot S$是自反的.

(2)错误. 例如,设$x,y\in A$,$x\neq y$,且xRy,ySx,于是$x(R\cdot S)x$. 故$R\cdot S$不是反自反的.

(3)错误. 例如,设对称关系$R=\{\langle x,z\rangle,\langle z,x\rangle\}$,$S=\{\langle z,y\rangle,\langle y,z\rangle\}$. 于是,$\langle x,y\rangle\in R\cdot S$,但

$\langle y,x\rangle \notin R\cdot S$. 故 $R\cdot S$ 不是对称的.

(4)错误. 例如,设反对称关系 $R=\{\langle x,z\rangle,\langle y,w\rangle\}$,$S=\{\langle z,y\rangle,\langle w,x\rangle\}$,$x\neq y$. 于是,$\langle x,y\rangle$,$\langle y,x\rangle\in R\cdot S$. 故 $R\cdot S$ 不是反对称的.

(5)错误. 例如,设传递关系 $R=\{\langle x,w\rangle,\langle y,v\rangle\}$,$S=\{\langle w,y\rangle,\langle v,z\rangle\}$,$w\neq v$. 于是,$x(R\cdot S)y$,$y(R\cdot S)z$,但因为 $w\neq v$,所以,$\langle x,z\rangle\in R\cdot S$.

8. 设 R_1 和 R_2 是集合 A 上的二元关系,试证明:

(1)$r(R_1\cup R_2)=r(R_1)\cup r(R_2)$;

(2)$s(R_1\cup R_2)=s(R_1)\cup s(R_2)$.

(3)$t(R_1\cup R_2)\supseteq t(R_1)\cup t(R_2)$.

并举出使 $|A|>1$ 时使 $t(R_1\cup R_2)\supset t(R_1)\cup t(R_2)$ 的实例.

分析:(1)本题根据自反闭包的定义,它一个关系 R 的自反闭包应该包含 R^0,然后根据 $(R_1\cup R_2)^0=R_1^0\cup R_2^0$ 即可证得.

(2)本题根据对称闭包的定义,它一个关系 R 的对称闭包应该包含 R^{-1},然后根据 $(R_1\cup R_2)^{-1}=R_1^{-1}\cup R_2^{-1}$ 即可证得.

(3)由于传递闭包的特殊性,它不满足类似与(1)(2)的情形,所以要进行相对麻烦的证明,主要运用集合的包含关系的证明方法.

证明:(1)
$$\begin{aligned}r(R_1\cup R_2)&=(R_1\cup R_2)\cup(R_1\cup R_2)^0\\&=(R_1\cup R_2)\cup(R_1^0\cup R_2^0)\\&=(R_1\cup R_1^0)\cup(R_2\cup R_2^0)\\&=r(R_1)\cup r(R_2);\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}s(R_1\cup R_2)&=(R_1\cup R_2)\cup(R_1\cup R_2)^{-1}\\&=(R_1\cup R_2)\cup(R_1^{-1}\cup R_2^{-1})\\&=(R_1\cup R_1^{-1})\cup(R_2\cup R_2^{-1})\\&=s(R_1)\cup s(R_2);\end{aligned}$$

(3)由定义

$$t(R_1)=R_1\cup R_1^2\cup\cdots$$
$$t(R_2)=R_2\cup R_2^2\cup\cdots$$
$$t(R_1\cup R_2)=(R_1\cup R_2)\cup(R_1\cup R_2)^2\cup\cdots$$

于是

$$t(R_1)\cup t(R_2)=R_1\cup R_1^2\cup R_2\cup R_2^2\cup\cdots=(R_1\cup R_2)\cup(R_1^2\cup R_2^2)\cup\cdots$$

下证对任意 $n\geqslant 1$,有 $R_1^n\cup R_2^n\subseteq(R_1\cup R_2)^n$.

任取 $\langle x,y\rangle\in R_1^n\cup R_2^n$,不妨设 $\langle x,y\rangle\in R_1^n$. 于是,存在 $z_1,z_2,\cdots,z_n\in A$,使得 $\langle x,z_1\rangle\in R_1\subseteq R_1\cup R_2$,$\langle z_1,z_2\rangle\in R_1\subseteq R_1\cup R_2$,$\cdots$,$\langle z_{n-1},z_n\rangle\in R_1\subseteq R_1\cup R_2$,$\langle z_n,y\rangle\in R_1\subseteq R_1\cup R_2$. 从而,$\langle x,y\rangle\in(R_1\cup R_2)^n$. 举例说明"$\subset$"成立. 设 $A=\{1,2,3\}$,$R_1=\{\langle 1,2\rangle\}$,$R_2=\{\langle 2,3\rangle\}$,于是

$$\begin{aligned}t(R_1\cup R_2)=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,3\rangle\}&\supset t(R_1)\cup t(R_2)\\&=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}\end{aligned}$$

9. 设 R_1 和 R_2 是集合 A 上的二元关系,试证明:

(1)$r(R_1\cap R_2)=r(R_1)\cap r(R_2)$;

(2)$s(R_1\cap R_2)\subseteq s(R_1)\cap s(R_2)$;

(3)$t(R_1\cap R_2)\subseteq t(R_1)\cap t(R_2)$.

并请给出 $|A|>1$ 时使 $s(R_1\cap R_2)\subset s(R_1)\cap s(R_2)$ 和 $t(R_1\cap R_2)\subset t(R_1)\cap t(R_2)$ 的实例.

分析:(1)本题主要是根据自反关系的定义得到一个特殊的等式 $R_1^0=R_2^0=(R_1\cap R_2)^0$ 进行变

换，只要想到这个等式，下面的工作就比较容易做.

(2)本题主要是根据对称关系的定义及定理 2.2.6 得到如下三个公式：

$$s(R_1 \cap R_2) = (R_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap R_2)^{-1}$$

$$s(R_1) = R_1 \cup R_1^{-1}, s(R_2) = R_2 \cup R_2^{-1}$$

$$s(R_1) \cap s(R_2) = (R_1 \cup R_1^{-1}) \cap (R_2 \cup R_2^{-1})$$

有这三个公式以及集合之间包含关系的证明方法就可得到结论.

(3)本题根据传递闭包的定义及定理 2.2.6 得

$$t(R_1) = R_1 \cup R_1^2 \cup \cdots$$

$$t(R_2) = R_2 \cup R_2^2 \cup \cdots$$

$$t(R_1 \cap R_2) = (R_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap R_2)^2 \cup \cdots$$

有了上面三个等式以及集合之间包含关系证明方法可得结论.

证明：设 R_1 和 R_2 是集合 A 上的二元关系. 注意到 $R_1^0 = R_2^0 = (R_1 \cap R_2)^0$，于是

(1)$r(R_1 \cap R_2) = (R_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap R_2)^0$

$= (R_1 \cap R_2) \cup R_1^0$

$= (R_1 \cup R_1^0) \cap (R_2 \cup R_1^0)$

$= (R_1 \cup R_1^0) \cap (R_2 \cup R_2^0)$

$= t(R_1) \cap t(R_2)$；

(2)$s(R_1 \cap R_2) = (R_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap R_2)^{-1}, s(R_1) = R_1 \cup R_1^{-1}, s(R_2) = R_2 \cup R_2^{-1}$，

$s(R_1) \cap s(R_2) = (R_1 \cup R_1^{-1}) \cap (R_2 \cup R_2^{-1})$.

任取 $\langle x,y \rangle \in s(R_1 \cap R_2) = (R_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap R_2)^{-1}$

(ⅰ)若$\langle x,y \rangle \in (R_1 \cap R_2)$，则$\langle x,y \rangle \in R_1 \subseteq R_1 \cup R_1^{-1}$，且$\langle x,y \rangle \in R_2 \subseteq R_2 \cup R_2^{-1}$，从而

$$\langle x,y \rangle \in (R_1 \cup R_1^{-1}) \cap (R_2 \cup R_2^{-1}) = s(R_1) \cap s(R_2)$$

(ⅱ)若$\langle x,y \rangle \in (R_1 \cap R_2)^{-1}$，则$\langle y,x \rangle \in (R_1 \cap R_2)$，即$\langle y,x \rangle \in R_1$，且$\langle y,x \rangle \in R_2$，从而

$$\langle x,y \rangle \in R_1^{-1} \subseteq R_1 \cup R_1^{-1}，且\langle x,y \rangle \in R_2^{-1} \subseteq R_2 \cup R_2^{-1}$$

于是

$$\langle x,y \rangle \in (R_1 \cup R_1^{-1}) \cap (R_2 \cup R_2^{-1}) = s(R_1) \cap s(R_2)$$

故

$$s(R_1 \cap R_2) \subseteq s(R_1) \cap s(R_2)$$

举例说明"$\subset$"成立.

设 $A = \{1,2\}, R_1 = \{\langle 1,2 \rangle\}, R_2 = \{\langle 2,1 \rangle\}$，于是

$$s(R_1 \cap R_2) = (R_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap R_2)^{-1} = \varnothing \cup \varnothing^{-1} = \varnothing$$

而

$$s(R_1) = R_1 \cup R_1^{-1} = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle\}$$

$$s(R_2) = R_2 \cup R_2^{-1} = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle\}$$

因此

$$s(R_1) \cap s(R_2) = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle\}$$

故

$$s(R_1 \cap R_2) \subset s(R_1) \cap s(R_2)$$

(3)因为 $t(R_1) = R_1 \cup R_1^2 \cup \cdots$

$$t(R_2)=R_2\cup R_2^2\cup\cdots$$

$$t(R_1\cap R_2)=(R_1\cup R_2)\cup\cdots(R_1\cap R_2)^2\cup\cdots$$

于是
$$t(R_1)\cap t(R_2)=(R_1\cup R_1^2\cup\cdots)\cap(R_2\cup R_2^2\cup\cdots)$$
$$=\bigcup_{l,m\geqslant 1}(R_1^l\cap R_2^m)\ \forall\langle x,y\rangle\in t(R_1\cap R_2)$$
$$=(R_1\cap R_2)\cup(R_1\cap R_2)^2\cup\cdots$$

则存在 i,有 $\langle x,y\rangle\in(R_1\cap R_2)^i$,也就有 $z_1,z_2,\cdots,z_i$ 使得 $\langle x,z_1\rangle\in R_1\cap R_2$,$\langle x,z_2\rangle\in R_1\cap R_2$,$\cdots$,$\langle x,z_i\rangle\in R_1\cap R_2$,因为 $R_1\cap R_2\subseteq R_1$ 且 $R_1\cap R_2\subseteq R_2$,所以就有

$$\langle x,z_1\rangle\in R_1,\quad\langle x,z_2\rangle\in R_1,\quad\cdots\quad,\langle x,z_i\rangle\in R_1$$

所以有 $\langle x,y\rangle\in R_1^i$,同时也有 $\langle x,z_1\rangle\in R_2$,$\langle x,z_2\rangle\in R_2$,$\cdots$,$\langle x,z_i\rangle\in R_2$.
所以也有 $\langle x,y\rangle\in R_2^i$,就有 $\langle x,y\rangle\in R_1^i\cap R_2^i$,即 $(R_1\cap R_2)^i\subseteq R_1^i\cap R_2^i$.

又因为 $R_1^i\cap R_2^i\subseteq\bigcup_{l,m\geqslant 1}(R_1^l\cap R_2^m)$,所以结论成立.

又设 $A=\{1,2,3\}$,$R_1=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$,$R_2=\{\langle 1,3\rangle\}$,于是,$R_1\cap R_2=\varnothing$,$t(R_1\cap R_2)=\varnothing$,而

$$t(R_1)=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle\}$$
$$t(R_2)=R_2=\{\langle 1,3\rangle\}$$
$$t(R_1)\cap t(R_2)=\{\langle 1,3\rangle\}$$

故
$$t(R_1\cap R_2)\subset t(R_1)\cap t(R_2)$$

10. 有人说,“如果集合 A 上的二元关系 R 是对称和传递的,则 R 必是自反的. 因此,等价关系定义中的自反性可以去掉”. 并给出如下证明,如果 $\langle x,y\rangle\in R$,由 R 的对称性有 $\langle y,x\rangle\in R$,再由 R 的传递性知,$\langle x,x\rangle\in R$ 且 $\langle y,y\rangle\in R$,即 R 是自反的. 你的看法如何?

分析:本题错误之处主要是没有弄明白对称和传递都是满足一定前提条件的,而自反关系则是 A 中每个元素都必须满足这个条件.

解:说法不正确. 对任意 $x\in A$,对称性并不要求一定有 $\langle x,y\rangle\in R$,因此也就不一定有 $\langle y,x\rangle$. 于是 $\langle x,x\rangle\notin R$.

例如:设 $A=\{1,2,3\}$,$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,1\rangle\}$,则 R 是对称和传递的,但是 R 不是自反的,因为 R 中不包含 $\langle 2,2\rangle$,$\langle 3,3\rangle$,这是因为 R 如果是自反的必须包含 R^0.

11. 设 R 是集合 A 上的自反关系. 试证明 R 是等价关系当且仅当若 $\langle x,y\rangle$,$\langle x,z\rangle\in R$,则 $\langle y,z\rangle\in R$.

分析:本题主要是利用等价关系中自反性、对称性、传递性的定义来证明.

证明:设 R 是等价关系. 若 $\langle x,y\rangle$,$\langle x,z\rangle\in R$,则由 R 的对称性知,$\langle y,x\rangle\in R$.

再由 R 的传递性有 $\langle y,z\rangle\in R$.

反之,假设只要 $\langle x,y\rangle$,$\langle x,z\rangle\in R$,就有 $\langle y,z\rangle\in R$.

(1)对称性. 设 $\langle x,y\rangle\in R$,由自反性有 $\langle x,x\rangle\in R$. 于是 $\langle y,x\rangle\in R$.

(2)传递性. 设 $\langle x,y\rangle$,$\langle y,z\rangle\in R$. 由对称性有 $\langle y,x\rangle\in R$,再由假设有 $\langle x,z\rangle\in R$.

12. 设 R_1 和 R_2 都是集合 A 上的等价关系,试证明 $R_1=R_2$ 当且仅当 $A/R_1=A/R_2$.

分析:本题主要是根据等价类的定义及性质可以得到.

证明:设 $R_1=R_2$,则显然 $A/R_1=A/R_2$.

反之,设 $A/R_1=A/R_2$. 若 $R_1\neq R_2$,则不妨设 $\langle x,y\rangle\in R_1$　但 $\langle x,y\rangle\notin R_2$. 于是

$$[x]_{R_1}=[y]_{R_1},\quad [x]_{R_2}\neq[y]_{R_2}$$

由划分之定义得知 $A/R_1\neq A/R_2$,矛盾. 故 $R_1=R_2$.

13. 设 $R=\{\langle x,y\rangle \mid x\equiv y(\bmod 5)\}$是定义在整数集 $\mathbf{Z}$ 上的模 5 同余关系,求 $\mathbf{Z}/R$.

分析:本题主要是根据等价类的定义及性质可以得到.

解:设 $R=\{\langle y,x\rangle \mid x\equiv y(\bmod 5)\}$. 于是

$$[0]_R=\{\cdots-15,-10,-5,0,5,10,15\cdots\}$$
$$[1]_R=\{\cdots-14,-9,-4,1,6,11,16,\cdots\}$$
$$[2]_R=\{\cdots-13,-8,-3,2,7,12,17,\cdots\}$$
$$[3]_R=\{\cdots-12,-7,-2,3,8,13,18,\cdots\}$$
$$[4]_R=\{\cdots-11,-6,-1,4,9,14,19,\cdots\}$$
$$A/R=\{[0]_R,[1]_R,[2]_R,[3]_R,[4]_R\}.$$

14. 设 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_r\}$和 $B=\{B_1,B_2,\cdots,R_s\}$是集合 X 的两个划分,令

$$S=\{A_i\cap B_j \mid A_i\cap B_j\neq\varnothing,1\leqslant i\leqslant r,1\leqslant j\leqslant s\}$$

试证明 S 也是 X 的一个划分.

分析:本题主要是根据划分的定义以及集合的性质可以得到.

证明:因为 $S=\{A_i\cap B_i \mid A_i\cap B_i\neq\varnothing\}$.

(1)由 S 定义知,$A_i\cap B_i\neq\varnothing$;

(2)任取 $A_i\cap B_i\in S$ 和 $A_l\cap B_m\in S,1\leqslant i,j\leqslant r,1\leqslant j,m\leqslant s$.

$$(A_i\cap B_i)\cap(A_l\cap B_m)=(A_i\cap A_m)\cap(B_j\cap B_m)=\varnothing\cap\varnothing=\varnothing$$

(3)$$X=X\cap X=(A_1\cup\cdots\cup A_r)\cap(B_j\cup\cdots\cup B_m)$$
$$=\bigcup_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant r\\1\leqslant j\leqslant s}}(A_i\cap B_j)=\bigcup_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\1\leqslant j\leqslant s\\A_i\cap B_j\neq\varnothing}}(A_i\cap B_j)=S$$

故 S 是 X 的一个划分.

15. 定义在 4 个元素的集合 A 之上的等价关系共有多少个? 若 $|A|=n$ 呢?

分析:本题是根据等价关系与划分的一一对应关系,利用划分来处理,由特殊推到一般. 有几种证明方法.

解:设 $A=\{1,2,3,4\}$,则 A 上的等价关系数目即 A 上的划分的数目共有 15 个.

(1)最大划分$\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$;

(2)最小划分$\{\{1,2,3,4\}\}$;

(3)将 A 分成两个集合 $S=\{A_1,A_2\}$,共有两种可能:

(i)$|A_1|=|A_2|$,共有 $1/2C_4^2=3$ 种,即

$$\{\{1,2\},\{3,4\}\}$$
$$\{\{1,3\},\{2,4\}\}$$
$$\{\{1,4\},\{2,3\}\}$$

(ii)$|A_1|=1,|A_2|=3$,共 $C_4^3=4$ 种,即

$$\{\{1\},\{2,3,4\}\}$$
$$\{\{2\},\{1,3,4\}\}$$
$$\{\{3\},\{1,2,4\}\}$$
$$\{\{4\},\{1,2,3\}\}$$

(4)将 A 分成三个集合,则恰有一个集合为 2 个元素,故共有 $C_4^2=6$ 种分法,即

$$\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$$
$$\{\{1,3\},\{2\},\{4\}\}$$
$$\{\{1,4\},\{2\},\{3\}\}$$