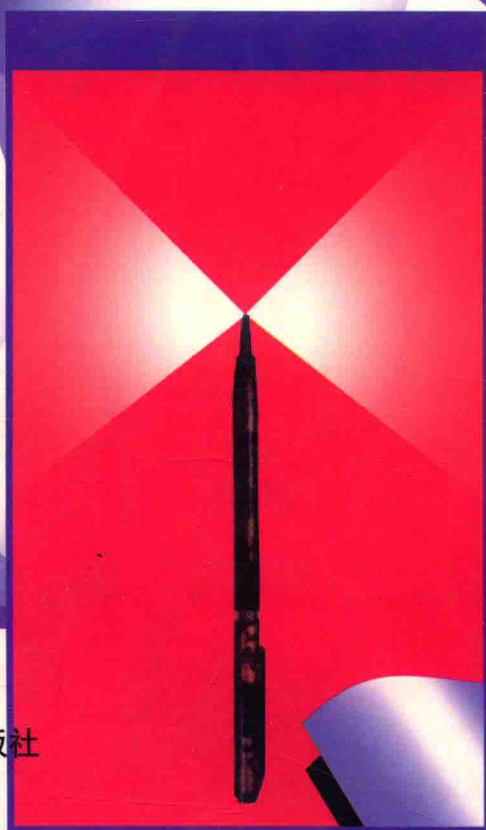
教育部师范司组织编写

小学教师进修高等师范专科小学教育专业教材

(理科方向)

# 高等数学(B)

主 编 邱 森



高等教育出版社

教育部师范司组织编写

小学教师进修高等师范专科小学教育专业教材

（理科方向）

# 高等数学(B)



主编　邱　森

编写人员　王家凤　邱森

高等教育出版社

(京)112 号

本书叙述微积分、线性代数和向量代数的初步知识，内容分为函数、极限、导数和微分、定积分与不定积分、线性代数、向量代数等 6 章，可供在职小学教师(自然常识)进修成人高等师范专科小学教育专业作为教材使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(B)/邱森主编 .—北京:高等教育出版社，1999

ISBN 7-04-007315-3

Ⅰ.高…　Ⅱ.邱…　Ⅲ.高等数学　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 04982 号

高等数学（B）

邱　森　主编

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | | |
| 社　　址 | 北京市东城区沙滩后街55号 | 邮政编码 | 100009 |
| 电　　话 | 010－64054588 | 传　　真 | 010－64014048 |
| 网　　址 | http://www.hep.edu.cn | | |
| 经　　销 | 新华书店北京发行所 | | |
| 印　　刷 | 北京民族印刷厂 | | |
| 开　　本 | 850×1168　1/32 | 版　　次 | 1999 年6月第1版 |
| 印　　张 | 13.125 | 印　　次 | 1999 年6月第1次印刷 |
| 字　　数 | 330 000 | 定　　价 | 12.70 元 |

# 目　　录

# 绪　言

本书包括微积分、线性代数和向量代数等内容.

微积分是研究函数的微分、积分及其应用的数学分支.16、17世纪,由于力学、航海、天文学的发展,提出了两大类科学问题.一类是在研究物体的运动时要求出它在任一时刻的速度和加速度,或者在研究光线通过透镜的规律时要求出光滑曲线上给定点的切线和法线等,由此产生了微分学.另一类是研究曲线的长度、物体的体积和曲面的面积等问题,由此产生了积分学.17世纪后期牛顿(I. Newton,1642—1727)和莱布尼茨(G. W. Leibniz,1646—1716)分别在研究物理和几何的过程中,总结前人经验,建立了微积分,为许多不同的物理和几何问题提供了统一的数学方法,第一次指出微分和积分是互逆的两种运算.微积分的建立促进了数学的飞速发展,也为天文、力学、物理、化学等学科提供了重要的数学工具.现在,在生物学、医学、海洋学、工程学、气象学和经济学等很多领域都要用到微积分.

线性代数和向量代数是代数和几何学科中重要的工具.它们不仅在自然科学和工程技术中,甚至在社会科学中,都得到了广泛的应用.

我们知道,任何知识只有用较高的观点来审视,才能看清它的本质.通过高等数学的学习,可以学到一些近代的数学思想、方法以及数学的应用,从而提高我们思维的层次,使自己对数学从形式上的了解逐步进入实质性的理解,为学习自然科学概论、统计与概率等其它学科打下扎实的数学基础,也使我们能居高临下地分析处理好小学自然常识教材和教学中遇到的一些数学问题.

# 第一章　函　　数

函数是高等数学研究的主要对象,也是高等数学中最重要的基本概念之一,它是进一步学习微积分的基础.本章将在中学数学关于函数知识的基础上,对函数的概念、性质、运算等进行研究,并对基本初等函数、初等函数作概括的介绍.

## 一　函数概念

### 1.1　常量与变量

我们在日常生活和生产实践中,在科学技术研究中,经常会遇到各种不同的量,如物理学中的质量、温度、时间、速度、加速度、力等等.其中有些量在所研究的过程中,其数值保持不变,这种量叫做常量.有些量在所研究的过程中,其数值是不断变化的,这种量叫做变量.

例如,在自由落体运动中,落体的质量 $m$ 和重力加速度 $g$ 保持不变,$m$,$g$ 就是常量;而落体的速度 $v$、所经过的路程 $s$ 和下落的时间 $t$ 都是不断变化的,$v$、$s$、$t$ 都是变量.

通常,我们用字母 $a,b,c,\cdots$ 表示常量,用字母 $x,y,t,\cdots$ 表示变量.

一个量是常量还是变量并不是绝对的,而是相对于某一过程而言的.例如,上面提到的自由落体运动,在小范围内,$g$ 可以看作是常量;而在大范围内,如发射人造卫星的过程,就要考虑 $g$ 的差异,这时 $g$ 就是变量.又如,火车行驶的速度,在起动阶段和刹车阶段是变化的,因而在该过程中是变量;而在正常行驶阶段,变化

很小,速度相对地看作是不变的量,因而是常量.

## 1.2 区间与邻域

1. 区间

任何一个变量都有一定的变化范围,变量的变化范围有多种表示方法,本书主要用区间来表示.

区间分有限区间和无限区间两种.

有限区间指介于两个实数之间的一切实数所组成的数集,这两个实数叫做区间的端点,区间的端点可以包含在所论及的区间之内,也可以不包含在所论及的区间之内.

设 $a,b$ 为两个实数,且 $a<b$.有限区间有如下四种:

(1) 满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切实数 $x$ 所组成的数集叫做闭区间,记作 $[a,b]$,左、右端点 $a,b$ 都包含在区间内.

(2) 满足不等式 $a<x<b$ 的一切实数 $x$ 所组成的数集叫做开区间,记作 $(a,b)$,左、右端点 $a,b$ 都不包含在区间内.

(3) 满足不等式 $a<x\leqslant b$ 的一切实数 $x$ 所组成的数集叫做半开区间,记作 $(a,b]$,左端点 $a$ 不包含在区间内,而右端点 $b$ 包含在区间内.

(4) 满足不等式 $a\leqslant x<b$ 的一切实数 $x$ 所组成的数集叫做半开区间,记作 $[a,b)$,左端点 $a$ 包含在区间内,而右端点 $b$ 不包含在区间内.

以上四种有限区间用数轴来表示如图 1－1 所示.

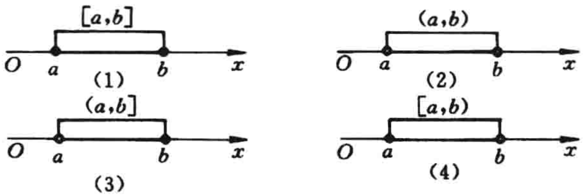



图 1－1

无限区间表示大于或小于、不大于或不小于某个实数所组成的数集,或者全体实数所组成的数集.

设 $a,b$ 为实数,无限区间有如下五种:

(1) 满足不等式 $x \geqslant a$ 的一切实数 $x$ 所组成的数集,用区间表示成 $[a,+\infty)$,左端点 $a$ 包含在区间内.

(2) 满足不等式 $x > a$ 的一切实数 $x$ 所组成的数集,用区间表示成 $(a,+\infty)$,左端点 $a$ 不包含在区间内.

(3) 满足不等式 $x \leqslant b$ 的一切实数 $x$ 所组成的数集,用区间表示成 $(-\infty,b]$,右端点 $b$ 包含在区间内.

(4) 满足不等式 $x < b$ 的一切实数 $x$ 所组成的数集,用区间表示成 $(-\infty,b)$,右端点 $b$ 不包含在区间内.

(5) 满足不等式 $-\infty < x < +\infty$ 的一切实数 $x$ 所组成的数集,即全体实数组成的数集用区间表示成 $(-\infty,+\infty)$.

注意: $+\infty$ 和 $-\infty$ 分别读作"正无穷大"和"负无穷大".它们不是数,仅仅是记号.

以上五种无限区间用数轴来表示,如图 1-2 所示.

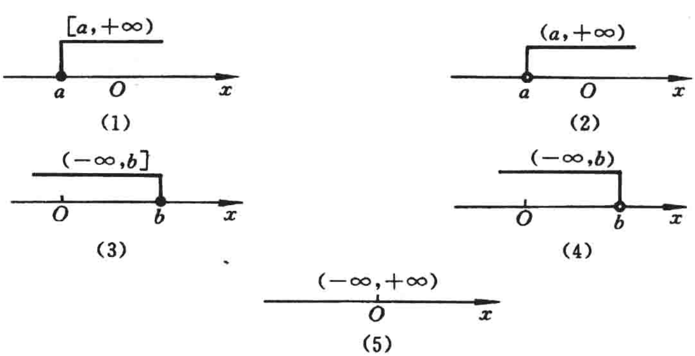



图 1-2

**例 1.1** 解下列不等式,并将解集用区间记号表示:

(1) $2x-1>x+1$； (2) $|x-3|<1$； (3) $|x-2|\geqslant 1$.

**解** (1) 显见，不等式的解集为 $x>2$，用区间记号表示为 $(2,+\infty)$.

(2) 由原不等式得 $-1<x-3<1$，它的解集为 $2<x<4$，用区间记号表示为 $(2,4)$.

(3) 原不等式等价于

$$x-2\geqslant 1 \quad 或 \quad x-2\leqslant -1,$$

所以，不等式的解集为 $x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant 1$，用区间记号表示为 $[3,+\infty)$ 或 $(-\infty,1]$.

2. 邻域

设 $a$ 与 $\delta$ 为两个实数，且 $\delta>0$，满足不等式

$$|x-a|<\delta$$

的一切实数 $x$ 称为点 $a$ 的 $\delta$ 邻域. 点 $a$ 称为邻域的中心，$\delta$ 称为邻域的半径.

不等式 $|x-a|<\delta$ 又可以写成

$$-\delta<x-a<\delta \quad 或$$

$$a-\delta<x<a+\delta,$$

因此，点 $a$ 的 $\delta$ 邻域是以点 $a$ 为中心，长度为 $2\delta$ 的开区间 $(a-\delta,a+\delta)$，如图 1－3 所示.

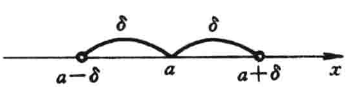



图 1－3

### 1.3 函数的概念

在具体问题中出现的变量往往不止一个，而且这些变量之间也不是彼此独立的，而是互相联系，互相制约的，当一个变量变化时，会引起另一个变量按一定的规律变化.

例如，在初速度为零的自由落体运动中，路程 $s$ 和时刻 $t$ 都是

变量,它们的变化并不是独立的,而是互相联系的.当 $t$ 变化时,会引起 $s$ 的相应变化,联系它们之间变化的对应规律是

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 $g=9.8\mathrm{m/s^2}$ 是常量.

根据上述规律,对于下落过程中的每一个时刻 $t$,都有确定的路程 $s$ 与之相对应.

例如当 $t=1\mathrm{s}$ 时,

$$s=\frac{1}{2}\cdot g\cdot 1^2=4.9\mathrm{m};$$

当 $t=2\mathrm{s}$ 时,

$$s=\frac{1}{2}\cdot g\cdot 2^2=19.6\mathrm{m}.$$

从上面这个例子可知,在具体变化过程中,两个变量(如 $t,s$)的变化是互相联系,互相依赖的.当一个变量(如 $t$)的值确定时,另一个变量(如 $s$)就按一定的对应规律,有唯一确定的值与之相对应,这种变量之间的相互依赖关系叫做函数关系.

一般地,在某变化过程中有两个变量 $x$ 和 $y$,当变量 $x$ 在某个范围 $D$ 中任意取定一个数值时,按照一定的法则,变量 $y$ 总有唯一确定的数值与它相对应,则变量 $y$ 叫做变量 $x$ 的函数.记作

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

其中变量 $x$ 叫做自变量,变量 $y$ 叫做因变量,自变量 $x$ 的取值范围 $D$ 叫做函数的定义域.函数的定义域一般用区间或不等式来表示.

设函数 $y=f(x)$,$x\in D$,当自变量 $x$ 取定义域 $D$ 中某一个值 $x_0$ 时,因变量 $y$ 的对应值叫做当 $x=x_0$ 时的函数值,记作 $f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$.当自变量 $x$ 取遍定义域 $D$ 中的一切数值时,与

之对应的函数值 $f(x)$ 的全体组成的数集叫做函数的值域.

**例 1.2** 已知 $f(x)=x^2-2x+3$,

(1) 求 $x=2$ 时的函数值 $f(2)$;

(2) 求 $x=a+1$ 时的函数值 $f(a+1)$.

**解** (1) $f(2)=2^2-2\cdot 2+3=3$.

(2) $$f(a+1)=(a+1)^2-2(a+1)+3=a^2+2.$$

**例 1.3** 设 $f(x)=x^2$,求

(1) $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$; (2) $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

其中 $\Delta x$ 是一个完整的记号,表示一个实数.

**解** (1) $$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2.$$

(2) $$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x_0+\Delta x.$$

关于函数的概念,应着重理解以下几点:

(1) 确定函数的要素是定义域和对应法则.

由函数的定义可知,函数由定义域和对应法则所确定.给定了定义域和两个变量之间的对应法则,这两个变量之间就构成了一个确定的函数关系,从而函数的值域也就随之被完全确定了.所以,确定函数的要素就是定义域和对应法则.

因此,两个函数,只要它们的定义域和对应法则完全相同,那么这两个函数就是同一个函数,否则便是不同的两个函数.

(2) 确定函数的定义域需考虑两种情况.

第一,如果不考虑自变量和因变量的实际意义而抽象地研究函数时,我们约定,函数的定义域就是使函数有意义的自变量的一切实数值.

第二,如果考虑自变量和因变量的实际意义,那么函数的定义域就是既使函数有意义,且又符合实际意义的自变量的一切实数

值.

例如,要写出函数 $S=\pi r^2$ 的定义域(其中 $S$ 表示圆的面积,$r$ 表示圆的半径).如果仅考虑函数式本身,自变量 $r$ 可取一切实数.但 $r$ 表示圆的半径,考虑它的实际意义,应有 $r>0$,所以该函数的定义域应为 $(0,+\infty)$.

(3) 函数 $y=f(x)$ 中的 $f$ 是表示变量 $x$ 和 $y$ 之间对应法则的记号.

$f(x)$ 中的 $f$ 与 $x$ 不是相乘关系,而是表示某一种对应法则,即自变量 $x$ 经过对应法则 $f$ 的对应之后,得到 $f(x)$.值得注意的是,在同一问题中,一个函数应取定一种记号;在同一问题中,若有多个函数,则具有不同对应法则的函数,必须用不同的记号来表示,以免混淆.如用 $y=\varphi(x)$,$y=\psi(x)$,$y=F(x)$ 等来表示不同的函数.为了方便起见,有时也用记号 $y=y(x)$,$u=u(x)$,$s=s(t)$ 等来表示函数.

**例 1.4** 判断下列各对函数是否相同,并说明理由:

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$,$\varphi(x)=x+1$;

(2) $f(x)=|x|$, $\varphi(x)=x$;

(3) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$, $\varphi(x)=1$.

**解** (1) 不是同一函数.因为它们的定义域不相同,$f(x)$ 的定义域为 $x\neq 1$,即 $(-\infty,1)$ 或 $(1,+\infty)$,而 $\varphi(x)$ 的定义域为一切实数,即 $(-\infty,+\infty)$.

(2) 不是同一函数.因为它们的对应法则不相同.$\varphi(x)$ 的对应法则是“自变量本身”,而 $f(x)$ 的对应法则是“自变量的绝对值”.

(3) 是同一函数.因为定义域和对应法则都相同.

**例 1.5** 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; (2) $y=\sqrt{x-2}+\ln(x-1)$.

**解** (1) 要使函数式有意义,必须 $1-x^2>0$,即 $x^2<1$,故函数的定义域为 $-1<x<1$,或写成 $(-1,1)$.

(2) 要使函数式有意义,必须 $\sqrt{x-2}$ 和 $\ln(x-1)$ 同时有意义,即必须 $x-2\geqslant 0$ 且 $x-1>0$.故函数的定义域为 $[2,+\infty)$.

## 1.4 函数的表示法

表示函数的方法,最常用的有以下三种.

1. 列表法

将自变量所取的值与对应的函数值列成表格,这种表示函数关系的方法叫做列表法.例如数学用表中的平方表、立方表、对数表、三角函数表等,都是用列表法来表示函数的.此外,在实验过程中,我们往往也把实验或观察所得的数据列成表格,以研究变量之间的函数关系.

列表法的优点是在给出了自变量的值后,能直接从表中查到对应的函数值,可以节省很多计算时间,但缺点是表中不可能列出全部函数值,有一定的局限性,而且也不便于理论分析.

2. 图象法

把自变量 $x$ 的一个值和对应的函数值 $y$ 分别作为点的横坐标和纵坐标,可以在直角坐标系内描出一个点,所有这些点的集合,叫做这个函数的图象.用图象来表示变量之间函数关系的方法叫做图象法.

图象法的优点是直观性强,便于研究函数的性态,其缺点是不便于作理论分析.

3. 解析法

用等式来表示变量之间函数关系的方法叫做解析法.这个等式叫做函数的解析表达式(或函数关系式),简称解析式.如 $s=\frac{1}{2}gt^2$,$y=x^2-2x+3$ 等等都是用解析法表示的函数.

解析法的优点是简单、准确、便于理论研究和计算,但不够直

观，而且在有些具体问题中遇到的函数关系也不一定都能用解析式来表示.

上述三种表示方法各有优缺点.为了简单和便于推理计算，较多地应用解析法.但有时为了便于研究函数的性态，往往同时画出函数的图象，而描绘图象时，又需要列表，因此在研究函数时，往往是两种或三种方法并用，以达到互相取长补短的目的.

在用解析法表示函数时，有时自变量 $x$ 在不同的范围内要用不同的式子分段表示.

例如，旅客携带行李旅行时，行李的重量不超过 20kg 时不收运费，若超过 20kg，每超过 1kg 收运费 0.50 元，试将运费 $y$ 写成行李重量 $x$ 的函数.

显然，当 $0\leqslant x\leqslant 20$ 时，运费 $y=0$；而当 $x>20$ 时，超过的部分 $(x-20)$ 收运费，所以 $y=0.5(x-20)$. 于是函数 $y=f(x)$ 可以写成如下形式

$$y=f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 20,\\ 0.5(x-20), & x>20.\end{cases}$$

像这种自变量在不同变化范围内，对应法则用不同的式子分段来表示的函数叫做分段函数.

需要注意的是，分段函数仍然是一个函数，而不是几个函数.求分段函数的函数值时，应把自变量的值代入相应范围内的表示式中去计算.

例如，在上述行李运费问题中，当 $x=10$ 时，应代入第一个关系式中，得 $f(10)=0$；当 $x=30$ 时，则应代入第二个关系式中，得

$$f(30)=0.5(30-20)=5(\text{元}).$$

**例 1.6** 某市私人电话收费标准是：月租 24 元，如果通话超过 60 次，则超过部分每次收费 0.10 元（假定每次通话时间不超过 3 min）.

(1) 写出月电话费 $y$(元)与通话次数 $x$ 之间的函数关系式；

(2) 某用户两个月通话次数分别为50次和80次，试求这两个月的电话费.

**解** (1) 当$0 \leqslant x \leqslant 60$时，$y=24$；而当$x>60$时，超出部分$(x-60)$加收$0.10(x-60)$元，即$y=24+0.1(x-60)$. 于是

$$y=\begin{cases}24, & 0 \leqslant x \leqslant 60, \quad x \in \mathbf{N}, \\ 24+0.1(x-60), & x>60, x \in \mathbf{N}.\end{cases}$$

(2) 当$x=50$时，$y=24$(元).

当$x=80$时，$y=24+0.1(80-60)=26$(元).

## 1.5 函数的几种特性

### 1. 奇偶性

设函数$y=f(x)$的定义域为$D$，如果对于任意$x \in D$，都有$-x \in D$(即定义域关于原点对称)，且满足

$$f(-x)=f(x),$$

则称$f(x)$为偶函数.

设$y=f(x)$为偶函数，则有$f(-x)=f(x)$，如果在$y=f(x)$的图象上任取一点$A(a, f(a))$，那么点$A$关于$y$轴的对称点是$A'(-a, f(a))$，即$A'(-a, f(-a))$，而点$A'(-a, f(-a))$是$y=f(x)$的图象上的点，这就是说，函数$y=f(x)$图象上任一点关于$y$轴的对称点仍在其图象上，所以偶函数$f(x)$的图象关于$y$轴对称.

设函数$f(x)$的定义域为$D$，如果对于任意$x \in D$，都有$-x \in D$，且满足

$$f(-x)=-f(x),$$

则称$f(x)$为奇函数.

设$y=f(x)$为奇函数，点$B(b, f(b))$为其图象上任一点，因为$f(-x)=-f(x)$，则点$B$关于原点的对称点

$B'(-b,-f(b))$，即 $B'(-b,f(-b))$，也在图象上，所以奇函数的图象关于原点对称.

**例 1.7** 判别下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x\sin x$；

(2) $f(x)=x^2\sin x$；

(3) $f(x)=x^2+\sin x$.

**解** (1) 函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，且

$$\begin{aligned} f(-x)&=(-x)\sin(-x)=x\sin x \\ &=f(x), \end{aligned}$$

所以，$f(x)$为偶函数.

(2) 函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，且

$$\begin{aligned} f(-x)&=(-x)^2\sin(-x)=-x^2\sin x \\ &=-f(x), \end{aligned}$$

所以，$f(x)$为奇函数.

(3) $f(-x)=(-x)^2+\sin(-x)=x^2-\sin x$，$f(-x)\neq f(x)$，且 $f(-x)\neq -f(x)$. 所以 $f(x)$既不是奇函数，也不是偶函数.

从例 1.7 可知，函数除了奇函数和偶函数外，还有非奇非偶的函数. 此外，还存在既奇又偶的函数，如 $y=0$.

2. 单调性

如果函数 $f(x)$对于区间$(a,b)$内的任意两个数 $x_1,x_2$，当 $x_1<x_2$时，总有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在区间$(a,b)$内单调递增，$(a,b)$称为 $f(x)$的单调递增区间. 特别当严格不等式 $f(x_1)<f(x_2)$成立时，则称$f(x)$在区间$(a,b)$内严格单调递增.

如果 $f(x)$在其定义域内单调递增(严格单调递增)，则称