CALCULUS

《微积分》习题解答

WEIJIFEN XITI JIEDA

主　编◎史千里

首都经济贸易大学出版社
Capital University of Economics and Business Press

《微积分》习题解答

WEIJIFEN XITI JIEDA

主　编◎史千里

首都经济贸易大学出版社
Capital University of Economics and Business Press
·北　京·

目　　录

练　习　一

一、将下列集合写成“代表＋性质”的形式.

1. $\{x|x$ 是我班男生$\}$　　2. $\{x|(x+1)(x^2-9)=0\}$

3. $\{x|x^3-x^2+x-1>0\}$　　4. $\{(x,y)|y=x^2+1\}$

二、判别下列结论正确还是错误.

1. 正确　　2. 错误　　3. 正确　　4. 错误

三、求函数的定义域.

1. $D=(-\infty,-3)\cup(-3,5]=(-\infty,5]-\{3\}$

2. $D=(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)=(-\infty,+\infty)-[-2,3]$

3. $D=(-\infty,-\sqrt{10})\cup(-\sqrt{10},-3)\cup(3,\sqrt{10})\cup(\sqrt{10},+\infty)$

$=(-\infty,+\infty)-[-3,3]-\{\pm\sqrt{10}\}$

4. $D=(-5,-3)\cup(3,4)\cup(4,5)$

5. $D=[-3,3]$

6. $D=[1,4]$

四、求下列函数的值.

(1) $f(0)=0$　　(2) $f(f(0))=-1$

(3) $f(f(3))-f(f(4))=9-13=-4$　　(4) $f(f(3)-f(4))=f(5-7)=10$

五、说明下列结论是错误的.

1. $y=f(x)=x^2$ 不是 $1-1$ 对应关系.

2. 圆 $x^2+y^2=9$ 是曲线,但不是函数图像.

3. 只有非空数集,才可以.

4. 漏掉了 $x=0.1,0.01,0.001,\cdots$

5. 漏掉了 $x=2$. 因为 $f(2)\neq f(-2)$,所以,$y=f(x)$ 不是偶函数.

6. 取 $x_1=0,x_2=\dfrac{3\pi}{2}$ 时,虽然 $x_1<x_2$,但是 $\sin x_1=0>-1=\sin x_2$.

7. $\because D_f=D_g=(-\infty,+\infty)$,且任取 $x\in(-\infty,\infty)$,总有 $f(x)=g(x)$.

$\therefore f(x)=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $g(x)=1$ 是同一个函数,即 $f(x)=g(x)$.

8. $\because D_f=(-\infty,+\infty)\neq D_g=[0,+\infty)$.

$\therefore f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一个函数. 即 $f(x)\neq g(x)$.

9. $\because D_f=(-\infty,+\infty)-\{3\}\neq D_g=(-\infty,+\infty)$.

$\therefore f(x)\neq g(x)$.

10. $\because D_f=(-\infty,+\infty)-\{0\}\neq D_g=(0,+\infty)$.

$\therefore f(x)\neq g(x)$.

六、求下列函数的反函数.

1. $y=f^{-1}(x)=\arcsin(x-2),x\in[1,3]$

2. $y=g^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{x-1},x\neq 1$

七、将下列复合函数拆成基本初等函数、多项式函数.

1. 令 $u=x^2$,则 $y=\cos u$.
2. 令 $u=\cos x$,则 $y=u^2$.
3. 令 $u=2x$,则 $y=\cos u$.
4. 令 $u=3x,v=\tan u$,则 $y=\ln v$.
5. 令 $u=2\ln x$,则 $y=\mathrm{e}^u$.
6. 令 $u=5x,v=\sin u$,则 $y=v^2$.

八、应用题.

(1)应付款 y 与大米重量 x 的函数关系为:

$$y=f(x)=\begin{cases}10x, & 0\leqslant x<50\\ 9.2x, & 50\leqslant x<100\\ 8.7x, & 100\leqslant x<500\\ 8.1x, & 500\leqslant x\end{cases}$$

(2)见图 1.

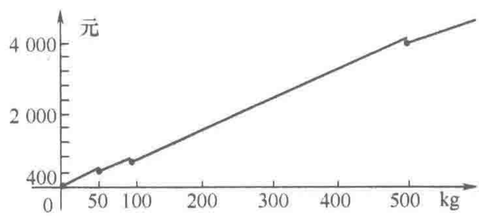

图 1

练　习　二

一、写出下列函数的通项公式.

1. $x_n = \frac{1}{2n-1}, n \in Z_+$　　　2. $x_n = \frac{n}{n^2+1}, n \in Z_+$

二、求数列极限.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$

2. 因为 $x_n = -1, +1, -1, +1, \cdots$ 没有固定趋势,所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 不存在.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$

4. 因为 $x_n = 0, -1, 0, 1, \cdots$ 所以极限不存在.

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$

6. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{99/n+1}{1/n+n} = 0$

7. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{99/n^2+1}{1/n^2+7} = \frac{1}{7}$

8. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1/n^2+n}{100/n^2+7} = +\infty$

9. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$

10. 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$,所以, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$

11. 因为 $x_n = \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{3}, 3, \cdots$ 没有固定趋势,所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 不存在.

三、求数列极限.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 1}{2^5 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n - 3 \times 1} = -\frac{1}{3}$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}+1\right)\left(\frac{2}{n}+1\right)\left(\frac{5}{n}+1\right)}{1+\frac{7}{n^3}} = 1$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sqrt{n}\right] = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}+1\right)=\dfrac{1}{2}$

5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+\cdots+\dfrac{1}{n\times(n+1)}\right]=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1-\dfrac{1}{n+1}\right]=1$

四、求函数极限.

1. -5　　2. $\dfrac{9}{4}$

3. 1　　4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(3-x)-(1+x)}{(x^2-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$

5. 10　　6. $\dfrac{5}{7}$

7. 0　　8. 0

五、求函数极限.

1. ∞　　2. ∞

六、求函数极限.

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin15x}{\sin5x}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\sin15x}{15x}\cdot\dfrac{15x}{5x}\cdot\dfrac{5x}{\sin5x}\right]=3$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin7x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left[7\cdot\dfrac{\sin7x}{7x}\right]=7$

3. 2　　4. 1

5. -2　　6. $\dfrac{1}{2}$

七、求函数极限.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\times3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3=\mathrm{e}^3$

2. e^{-3}　　3. $\sqrt{\mathrm{e}}$

4. e^2　　5. e^a

6. $\lim\limits_{x\to0}(1-\tan^2x)^{\cot^2x}=\lim\limits_{x\to0}(1-\tan^2x)^{\frac{1}{\tan^2x}}$. 令 $u=\tan x$. 因为 $x\to0$ 等价于 $\tan x\to0$，所以，原式 $=\lim\limits_{u\to0}(1-u^2)^{\frac{1}{u^2}}=\mathrm{e}^{-1}$.

八、判别下列命题的对与错.

1. 正确. 由 §2.3 定理 2－12.

2. 错误. 反例：$f(x)=\dfrac{(x+2)(x-1)}{x-1}$，虽然 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=3$，但是 $f(1)\neq3$.

3. 错误. 反例：x^2-9 在 $x\to-3$ 下是无穷小量，在 $x\to3$ 下也是无穷小量，但在 $x\to1$ 下就不是无穷小量.

4. 错误. 正确是：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^2}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\sin x^2}{x^2}x\right]=0.$

5. 正确.

九、指出下列无穷小量.

1. x^2-9 是 $x\to-3$ 下的无穷小量.
2. x^2-9 是 $x\to+3$ 下的无穷小量.
3. $\ln(3+x)$是 $x\to-2$ 下的无穷小量.
4. $\ln(3+x)$不是 $x\to0$ 下的无穷小量.
5. $x\cos\dfrac{1}{x}$是 $x\to0$ 过程中的无穷小量.
6. $\dfrac{\sin^3x}{x^2}$是 $x\to0$ 过程中的无穷小量.

十、利用等价无穷小量求极限.

1. $\dfrac{1}{5}$　　2. 9

3. $\dfrac{3}{2}$　　4. $\dfrac{1}{2}$

5. $\dfrac{2}{5}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-(1+x)^{\frac{1}{13}}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\left(1+\dfrac{1}{13}\times x\right)}{x}=\dfrac{1}{13}$

十一、求函数在点 x_0 的单侧极限.

1. $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x+2)=3$；$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x-2)=-1$；$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在.
2. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1.$
3. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1.$

练　习　三

一、作图研究函数连续性(确定断点).

1. 略.

2. 解:$\because\ \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}1=1$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(-1)=-1$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在.

$\therefore\ f(x)$在$x=1$不连续.

由初等函数连续性知,$f(x)$在$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$内连续.

二、确定常数 a、b,使下列函数是连续函数.

1. 解:$D=(-\infty,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}e^x=1$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+a)=a$

令$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$,则$a=1$.

又$a=1$时,因为$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=1$. 所以$f(x)$在$x=1$连续. 由初等函数连续性知,$f(x)$在$D=(-\infty,+\infty)$内连续.

所以,当且仅当$a=1$时,$f(x)$是连续函数.

2. 当且仅当$b=1$时,$f(x)$是连续函数.

三、找出下列函数的间断点,说明类型.

1. 解:$\because\ f(0)$没意义

$\therefore\ f(x)$在$x=1$间断.

又由初等函数连续性知,$f(x)$在$(-\infty,+\infty)-\{0\}$内连续.

$\therefore\ f(x)$只有一个间断点$x=1$.

$\because\ \lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$\therefore$ 令$f(x)=1$,则$f(x)$在$x=1$连续.

$\therefore\ x=1$是可去间断点.

2. $f(x)$有两个断点$x=1,2$. 其中,1是不可去间断点,2是可去间断点.

3. 只有一个断点$x=1$,是可去间断点.

4. $x=1$是不可去间断点.

四、

$f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}=\dfrac{(x-1)(x+1)(x+3)}{(x-2)(x+3)}$,断点是$-3,2$,连续区间$(-\infty,$

$-3),(-3,2),(2,+\infty)$. $\lim\limits_{x\to-3}f(x)=-\dfrac{8}{5}$. $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\infty$.

五、利用初等函数连续性求函数极限.

1. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-7}{x^2-2}=\dfrac{2^3-7}{2^2-2}=\dfrac{1}{2}$

2. 3

3. -1

4. $\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$

5. $-1+e^2$

6. 0

六、求函数极限.

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{\sin5x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{5x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(4+x)-2^2}{5x(\sqrt{4+x}+2)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{5(\sqrt{4+x}+2)}=\dfrac{1}{20}$

2. $\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan^2x)^{\cot^2x}\overset{u=\tan^2x}{=\!=\!=}\lim\limits_{u\to0}(1+3u)^{\frac{1}{u}}=e^3$(参考练习二. 七、2)

七、讨论根的存在性.

1. 证明:令 $f(x)=x^5-3x-1,x\in(-\infty,+\infty)$

$\because\ f(1)=1^5-3\times1-1=-2<0$

$f(2)=2^5-3\times2-1=29>0$

$\therefore\ f(0)$与$f(2)$异号.

又由初等函数连续性知,$f(x)$在$[1,2]$上连续.

且$f(x)$在$(1,2)$内可导.

$\therefore\ f(x)$在$(1,2)$内有零点. 即原方程在$(1,2)$内有根.

2. (略)

3. 尝试:按照一般解法.

令 $f(x)=x-a\sin x-b,x\in[0,+\infty)$.

考察特殊点的函数值的符号:

$f(0)=0-a\sin0-b=-b<0$

$f(a+b)=(a+b)-a\sin(a+b)-b$

$\geqslant(a+b)-a\times1-b=0$

发现:$f(a+b)$可能为零!

于是,需要讨论了。

证明:令 $f(x)=x-a\sin x-b,x\in(-\infty,+\infty)$.

如果 $\sin(a+b)=1$,

则 $f(a+b)=(a+b)-a\sin(a+b)-b=(a+b)-a\times1-b=0$

此时,$a+b$ 就是原方程的根.

如果 $\sin(a+b)<1$,

$\because\ f(0)=0-a\sin0-b=-b<0$

$$f(a+b)=(a+b)-a\sin(a+b)-b$$
$$>(a+b)-a\times 1-b=0$$

$\therefore$ $f(0)$与$f(a+b)$异号.

又由初等函数连续性知,$f(x)$在$[0,a+b]$上连续.

且$f(x)$在$(0,a+b)$内可导.

$\therefore$ $f(x)$在$(0,a+b)$内必有零点. 即原方程在$(0,a+b)$内必有根.

$\therefore$ 原方程在$(0,a+b]$ 内必有根.

练 习 四

一、

(1) $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

$$= [(0+0.1)^2 - 5\times(0+0.1)+3] - [0^2 - 5\times 0+3] = -0.49$$

(2) $\Delta y = -0.94$

(3) $\Delta y = -0.69$

(4) $\Delta y = -1.36$

二、

1. 填写下表：

x_0	3	3	3	3	3	3
Δx	5	1	0.1	0.01	0.001	0.000 1
Δy	55	7	0.601	0.600 1	0.600 01	0.600 001
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	11	7	6.01	6.001	6.000 1	6.000 01

2. $|\Delta x|\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to 6$.

三、求导数.

1. $y' = (x^{7.3})' = 7.3x^{7.3-1} = 7.3x^{6.3}$

2. $y' = -5x^{-6}$

3. $(3+e^{-2})' = 0$

4. $y' = 5^x\ln 5$

5. $(\lg x)' = \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\ln 10}$

6. $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

四、

(1) $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$；

(2) $y'\Big|_{x=0} = \dfrac{1}{1+x^2}\Big|_{x=0} = 1$；

(3) $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=1} = \dfrac{1}{1+x^2}\Big|_{x=1} = \dfrac{1}{2}$

五、说明下列函数在点 $x_0=1$ 是否连续、是否可导.

1. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1 = f(1) = 1$，$f(x)$ 在 $x=1$ 连续. $f'_-(1) = 2$，$f'_+(1) = 3$，不存在 $f'(1)$.

2. $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = 1 = g(1) = 1$，$g(x)$ 在 $x=1$ 连续. $g'_-(1) = g'_+(1) = 2$，$f'(1) = 2$.

3. $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = 1 = h(1) = 1$，$h(x)$ 在 $x=1$ 连续. $h'_-(1) = h'_+(1) = 2$，

$h'(1)=2$.

4. 令 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-}p(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+}p(x)=p\left(\frac{\pi}{4}\right)$,且 $p'_-\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}=p'_+\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}b$.

解 $\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}=a+\frac{\sqrt{2}}{2}b\\ \frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}b\end{cases}$,得 $a=\sqrt{2},b=-1$. 即 $p(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant\frac{\pi}{4}\\ \sqrt{2}-\cos x, & x>\frac{\pi}{4}\end{cases}$,见图 2.

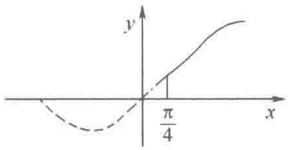

图 2

六、求导数.

1. $(x^5-3x^2-4x+7)'=5x^4-6x-4$

2. $\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$.

3. $(\arcsin x+\arccos x)'=0$

4. $(5+x\ln5)x^4 5^x$.

5. $\lg x+\frac{1}{\ln10}$

6. $-\sin x-\sin x\tan x+\sec x$

7. $(7-x)(35-7x)x^4$.

8. $\left[\frac{5x+x^2}{7x^3}\right]'=\frac{1}{7}\left[\frac{5+x}{x^2}\right]'=\frac{1}{7}\frac{[5+x]'x^2-(5+x)[x^2]'}{(x^2)^2}=-\frac{x+10}{7x^3}$

另解:$\left[\frac{5x+x^2}{7x^3}\right]'=\frac{1}{7}\left[\frac{5+x}{x^2}\right]'=\frac{1}{7}\left[\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x}\right]'=-\frac{x+10}{7x^3}$

9. $\frac{-14+6x+7x^3}{(2+7x^2)^2}x$

10. $\frac{[\arcsin x]'\tan x-\arcsin x[\tan x]'}{\tan^2x}=\frac{\cot x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{\arcsin x}{\sin^2x}$

另解:$\left[\frac{\arcsin x}{\tan x}\right]'=[\cot x\ \arcsin x]'=\cdots$

七、切线问题.

1. 曲线上点 $M(-1,2)$ 的切线平行于直线 L.

2. 切线 $3\sqrt{3}x+6y-3+\sqrt{3}\pi=0$.

3. (1) $v(t)=S'=-3\sin t+(1-3t)\cos t$

(2) $v\left(\frac{\pi}{6}\right)=[-3\sin t+(1-3t)\cos t]'\big|_{x=\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}-3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$

八、求导数.

1. $[(1-5x^2)^{13}]' = -130(1-5x^2)^{12}$

2. $y' = \dfrac{-5x}{\sqrt{3-5x^2}}$

3. $y = -3e^{7-3x}$

4. $7\ln 3 \times 3^{7x}$

5. $\left(3-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\ln 5 \times 5^{3x-2\sqrt{x}}$

6. $-3\cos(1-3x)$

7. $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-2\right)\cos(\sqrt{x}-2x)$

8. $\dfrac{5}{4+5x}$

9. $\dfrac{1}{x\ln x}$

10. $y = -\sin(1+\tan x)\sec^2 x$

11. $f(x) = \dfrac{-3^x}{\ln 3\sqrt{1-3^{2x}}}$

12. $-3\sin(6x+10)$

13. $-3x^{-4}\ln(\sin x) + x^{-3}\cot x$

14. $\dfrac{5^{\sqrt{x}}\sin^2(1-3x)}{2\ln 5 \times \sqrt{x}} - 3\times 5^{\sqrt{x}}\sin(2-6x)$

15. $3\sec 3x\tan 3x\operatorname{arccot} x^2 - \dfrac{2x\sec 3x}{1+x^4}$

16. $\dfrac{3^{\sqrt{5x}}\cos 3^{\sqrt{5x}}\sqrt{5}\ln 3}{2\sqrt{x}\sin 3^{\sqrt{5x}}}$

17. $\dfrac{2\cos 2x - 3(\ln^2 x)/x}{1+\arctan 5x} - \dfrac{5(\sin 2x - \ln^3 x)}{(1+25x^2)(1+\arctan 5x)^2}$

18. $(1-x^{-2})\csc x^3\ \sec^2(x+x^{-1}) - \csc x^3\cot x^3\tan(x+x^{-1})$

九、求导数.

1. $-\left(3+3\ln x-\dfrac{2}{x}\right)x^{2-3x}$

2. $[(3-5x)\cot x - 5\ln\sin x](\sin x)^{3-5x}$

3. $\left[\dfrac{\ln(x+\ln x)}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}+1/\sqrt{x}}{x+\ln x}\right](x+\ln x)^{\sqrt{x}}$

4. $\dfrac{y}{5}\left[\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x+7}-\dfrac{2x}{x^2+1}\right]$

十、下列方程所确定函数 $y=f(x)$ 的导函数.

1. $y' = -\dfrac{x}{y}$

2. $y' = -\dfrac{y(y-1)}{xy-1}$

3. $y' = -\dfrac{e^{y^2}}{\cos y - 2xye^{y^2}} = -\dfrac{\sin y - 1}{x(2y+\cos y-2y\sin y)}$

十一、求高阶导数.

1. $6\sin x - 9\sin^3 x$

2. (1) $-3^5 7^{2-3x}\ln^5 7$；(2) $-\dfrac{243}{7}\ln^5 7$；(3) $y^{(n)} = 7^{2-3x}(-3\ln 7)^n$.

3. (1) $\dfrac{2}{(1+x)^3}$；(2) $\dfrac{2}{e^3}$；(3) $(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.

4. $m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}, (n\leqslant m)$； $0, (n\geqslant m)$.

练　习　五

一、

1. 填写下表.

x_0	3	3	3	3	3	3
$y'(x_0)$	6	6	6	6	6	6
Δx	5	1	0.1	0.01	0.001	0.000 1
Δy	55	7	0.61	0.061	0.006 01	0.000 601
$y'\Delta x$	30	6	0.6	0.06	0.006	0.000 6

2. 在 $|\Delta x|$ 减小的过程中, $|\Delta y - y'\Delta x|$ 越来越接近 0.

二、

(1) $y' = 3x^2 + \dfrac{2}{(1+x)^2}$

(2) $dy = \left[3x^2 + \dfrac{2}{(1+x)^2}\right]dx$

(3) $dy\big|_{x=-2} = 8dx$

(4) $dy\Big|_{\substack{x=-2\\ \Delta x=0.5}} = 4$

(5) $dy\Big|_{\substack{x=-2\\ \Delta x=0.1}} = 0.8$

三、求微分

1. $dy = -[15(2-3x)^4 + \sin x]dx$

2. $dy = \dfrac{dx}{(1-x)^2}$

3. $df(x) = 0$

4. $dy = \left[\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}\right]dx$

5. $dy = [\lg(\sin x) + x\cot x]dx$

6. $df(x) = [\cos 2x - \sin 2x]dx$

7. $dy = x^{4.3}7^{x-2\sqrt{x}}[5.3 + (x-\sqrt{x})\ln 7]dx$

8. $dy = \left[\dfrac{1}{x^3}\left(1 + \dfrac{5}{\sqrt{1-x^2}}\right) + \dfrac{3}{x^4}(x + 5\arcsin x)\right]dx$

9. $dy = \dfrac{3x^2(1+x^2)}{(1+3x^2)^2}dx$

四、利用微分求近似值.

1. $a = \cos 31° \approx 0.857\ 2$

2. $b = \ln 1.02 \approx 0.019\ 8$

3. $c = \sqrt[3]{9} \approx 2.080\ 1$

4. $d = e^{0.001} \approx 1.001\ 0$

5. $p = \sqrt[5]{99\ 997} = \sqrt[5]{10^5 - 3} = 10\sqrt[5]{1 - 3\times 10^{-5}} \approx 9.999\ 9$

五、求证：当 $|h|$ 很小时，下列近似公式成立.

1. 令 $f(x)=\ln x$，则 $\ln(1+h)=f(1+h)\approx f(1)+f'(1)h=h$

2. 3. 仿上述题 1 方法.

六、寻找适当的函数填空.

1. $d(7x\ )=d(7x-8)=7dx$

2. $d(e^x)=d(e^x+e)=e^x dx$

3. $d\left(-\frac{1}{5}e^{-5x}\right)=e^{-5x}dx$

4. $d\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)=\sin 3x dx$

5. $d(x^3-5x^2)=(3x^2-10x)dx$

6. $d(2\sqrt{x})=\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

7. $d(\ln(1+x))=\frac{1}{1+x}dx$

8. $d\left(-\frac{1}{3}\ln(1-3x)\right)=\frac{1}{1-3x}dx$

9. $d(-\ln(3-x))=\frac{1}{3-x}dx$

10. $d(\tan x)=\sec^2 x dx$

11. $d\left(\frac{3^x}{\ln 3}\right)=3^x dx$

12. $d(x\ln x)=(1+\ln x)dx$

练　习　六

一、判断下列函数：(1)是否满罗尔条件；(2)是否存在 ξ.

1. 解：$\because\ f(1)=f(5)=0$，且 $f(x)$ 在 $[1,5]$ 上连续.

　　$\therefore\ f(x)$ 在 $[1,5]$ 上满足罗尔条件.

　　由 $f'(3)=0$ 知，可以取 $\xi=3$.

2. $x\sqrt{3-x}$ 在 $[0,3]$ 上满足罗尔条件. 计算得 $f'(2)=0$；$\xi=2$.

3. $|x|$ 在 $[-1,1]$ 上不满足罗尔条件. $f'(x)=0$ 无解，不存在 ξ.

4. $\dfrac{x^2}{x-1}$ 在 $x\in[0.5,3]$ 上不满足罗尔条件. $f'(x)=0$ 解为 $\xi=0,2$.

二、判断下列函数：(1)是否满足拉氏条件；(2)是否存在 ξ.

1. 解：$\because\ f'(x)=2x-6, x\in[0,4]$.

　　$\therefore f(x)$ 在 $[0,4]$ 上满足拉氏条件.

　　令 $f'(x)=\dfrac{f(4)-f(0)}{4-0}$，解得 $\xi=2$.

2. $\ln x$ 在 $[1,e]$ 上满足拉氏条件，$\xi=e-1$.

3. $4x^3-6x^2-2$ 在 $[0,1]$ 上满足拉氏条件，$\xi=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

三、

提示：应用拉格朗日中值定理的推论 1 和结论 $\arctan 0+\operatorname{arccot} 0=\dfrac{\pi}{2}$.

四、

提示：令 $f(x)=\tan x, x\in[u,v]$，应用拉格朗日中值定理.

五、

证明：令 $f(x)=x^3+x-1, x\in[-\infty,+\infty]$.

　　$\because\ f'(x)=3x^2+1>0, x\in[-\infty,+\infty]$.

　　$\therefore\ f(x)$ 是 $[-\infty,+\infty]$ 上单调增函数. $f(x)$ 最多只有一个零点.

　　$\because\ f(-1)=-3<0, f(2)=9>0$. 且 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上连续.

　　$\therefore\ f(x)$ 在 $(-1,2)$ 内有零点.

　　$\therefore\ x^3+x-1=0$ 有且仅有一个根.

六、

证明：$\because\ f(x)$ 是 4 次多项式函数.

　　$\therefore\ f'(x)$ 是 3 次多项式函数.

　　$\therefore\ f'(x)$ 最多只有 3 个零点.

　　令 $a=0, b=1, c=2, d=3$. 则 $f(a)=f(b)=f(c)=f(d)=0$.