数学分析技巧

（上 册）

杨世藩 编著

科学出版社

数学分析技巧

（上册）

杨世藩　编著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书包含大学数学分析的全部课程内容，并配有大量例题与习题以供阅读和练习之用，作用教材，可根据学时选讲，例题是本书有特点的部分，旨在帮助学习者尽快地理解和掌握数学分析的基本理念与技巧，尤其对初学者会有较大帮助.

本书适合数学专业、物理专业学生阅读，也可供相关的数学教师、工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析技巧：全2册/杨世藩编著. —北京：科学出版社，2016.3
ISBN 978-7-03-047406-3

Ⅰ.①数… Ⅱ.①杨 … Ⅲ.①数学分析 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016) 第 036355 号

责任编辑：王胡权／责任校对：邹慧卿
责任印制：霍　兵／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

大厂书文印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2016年3月第　一　版　开本：720×1000 1/16
2016年3月第一次印刷　印张：28 1/2
字数：574 000

定价：139.00 元(上下册)
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

数学分析是数学专业最重要的基础课之一. 它是进入近代数学的必经的阶梯, 也是构建宏伟数学大厦的基石. 对于初学者, 学好数学分析不仅为后继数学及应用课程奠定了良好的基础, 而且通过学习还可以感悟数学中抽象定义深刻的内涵和外延, 并且通过逻辑演绎得出精彩结论的过程. 所有这些都表明数学分析不仅是知识性学科, 而且还是方法论的学科. 正是如此的重要性, 数学分析课程有菲赫金哥尔茨著的《微积分学教程》(三卷八分册) 这样的宏篇巨著问世. 学人誉称为微积分学的字典, 这样规模的出版物, 在数学中并不多见. 作者写这本书的初衷是要写一本压缩版的微积分教程, 不仅帮助缩短数学分析课程的学时而且不失掉该课程的本质内容, 帮助初学者尽快掌握数学分析的理念、思想和方法. 以无穷小和无穷大的概念为基础, 给出极限理论. 用极限方法刻画微分, 通过级数方法给出积分理论.

数学分析的学习方法与中学数学的学习方法是不同的. 在中学阶段为了高考往往以解题为中心, 而数学分析的学习则应围绕数学理念的深刻理解和逻辑演绎技巧来展开. 理念往往是一颗创新的种子, 逻辑思维的演绎把这颗种子推向长成参天大树的神奇力量. 数学分析课程就是从无穷小以及极限这一概念出发通过逻辑演绎形成蔚为壮观的学科. 因此数学分析课程带给我们的不仅是知识的更新, 而且还是思想的更新. 为此目的, 作者在成书过程中, 配以相当数量的例题以展示技巧供读者参考. 有的习题给出了有关理论的应用背景. 习题可供读者选做. 虽然较多的例题会增加篇幅, 但对于初学者, 正如学棋之人, 多揣摹高手对局一样, 是提高自己水平的有效途径, 揣摹例题是尽快使自己进入数学分析领域的有效方法之一. 当然, 本书也可作为数学分析老师的教学参考书, 帮助组织课堂教学内容和习题辅导.

数学分析如果从牛顿时代算起, 已经历时二百多年, 其间经过一代又一代数学家的努力, 才形成今天这样的体系, 当我们在书中重温他们的工作时, 无不为其高超的技巧所折服. 时至今日, 数学分析的思想与结果已经成为自然科学和工程技术共同的基础知识, 甚至连经济学这样的人文学科, 也因数学分析的引入而获得诺贝尔经济学奖. 因此希望年轻的学子不要错过学习数学分析课程的机会.

作者从 20 世纪 50 年代初在高校数学系执教至退休, 从教四十余年, 又以十年成书, 虽经斟酌, 然一孔之见, 挂一漏万, 疏漏难免, 乞盼读者及同仁指正为感. 在成书过程中, 本书得到了贵州大学党政领导、贵州大学理学院党政领导以及贵州大学科技处领导的热情关怀和鼓励, 并获得了贵州大学学术著作出版基金的支持, 在

此深表感谢! 此书出版前也得到年青教师袁昊及其夫人周杰在原稿修改打印、出版联系等多方面的帮助, 在此也深表谢意! 同时特别感谢曹素元教授对本书出版前的审稿和建议.

杨世藩谨识

贵州大学理学院 2015 年春

目录

第 1 章　函　　数

1.1　函 数 概 念

高等数学与初等数学的区别, 在于研究的对象和研究的方法不同. 初等数学所研究的对象主要是常量, 如追赶问题中, 已知甲、乙的速度与出发时间, 要求甲追上乙的时间, 这里要求的只是一个数量——时间; 而高等数学所研究的对象是事物的运动规律和现象的变化规律.

1.1.1　常量与变量

在生产与生活中, 我们接触到各种各样的量, 有些量在考察过程中是变化的, 取不同的数值, 称为**变量**; 有些量在考察过程中是不变化的, 取相同的值, 称为**常量**.

1.1.2　函数定义

在实际问题中, 我们关心的不是孤立的量, 而是量与量之间的依赖关系, 即一个量如何随着另一个量的变化而变化. 这里只限于讨论两个变量的情形.

定义 1　给定数集 X, 若存在某种对应法则 f, 对于 X 中每一个元素 $x \in X$, 都有实数集 $\mathbf{R}$ 中唯一的元素 y 与之对应, 则称 f 是从 X 到 $\mathbf{R}$ 的一个**函数**, 记作

$$f : X \to \mathbf{R}.$$

函数 f 在 x 点的值记作 $y = f(x)$. X 称为函数 f 的**定义域**. x 称为**自变量**, y 称为**因变量**.

函数定义中包含两个要素: 对应规则与定义域. 对应规则比能求值的公式更一般, 有了能求值的公式当然就有对应规则, 但有对应规则不一定存在能求值的公式, 所以在函数定义中我们只说: “有实数集 $\mathbf{R}$ 中唯一的元素 y 与之对应”, 而不说“能求出实数 y 与之对应”. 从函数定义来说, 没有求定义域的问题, 但在习惯上函数往往是通过公式给出的, 这样, 使式子有意义的自变量取值范围就称为函数的定义域.

在定义中, 将对应规则 f 称为函数, 把 $f(x)$ 称为函数值. 严格来说. 对应规则不是数, 是某种规则, 而函数值是数, 这两者是不同的. 如 $y = \sin x$, 无论 y 或 $\sin x$ 都不能说是 x 的函数, 而是函数值, 函数是 sin.

在数学分析范围内, 除去今后要讲的微分概念外, 对函数与函数值不加区分, 函数可以用 f, 也可以用 $f(x)$ 或 $y = f(x)$ 来表示, 函数值用 $f(x)$ 表示.

设 A 是 X 的子集, 函数 f 在 X 上定义, 称函数

$$\varphi : \varphi(x) = f(x), \forall x \in A$$

为函数 f 在 A 上的**限制函数**, 记作 $f|_A$; 相反, 函数 f 就称为函数 φ 在 X 上的**扩充或延拓**.

如果两个函数有相同的定义域和对应规则, 不管变量采用什么记号, 认为是同一个函数. 如

$$y = \pi x^2, \quad x \in [0, +\infty),$$

$$y = \pi R^2, \quad R \in [0, +\infty)$$

应认为是同一个函数.

对不同的函数, 可以用不同的字母如 g, h 或 φ, ψ 等表示. 如 $f(x)$ 表示某一函数, $g(x)$ 表示另一函数, 若它们的定义域 X 相同, 且对 $\forall x \in A$, 有

$$f(x) = g(x),$$

则称这两个函数相等. 如在 $(-\infty, +\infty)$ 上函数 $f(x) = 2\cos^2 x - 1$ 与 $g(x) = 1 - 2\sin^2 x$ 是相等的.

1.1.3 函数的图形

给定 $x \in X$, 求出函数值 $f(x)$, 以 x 为横坐标, 以 $f(x)$ 为纵坐标, 可以画出平面上一点 $(x, f(x))$. 然后让点 x 在定义域 X 上变化, 相应的点 $(x, f(x))$ 就画出平面上一条曲线 $y = f(x)$, 这条曲线称为函数 $f(x)$ 的图形.

定义 2 称平面上点集

$$E = \{(x, f(x)) \,|\, x \in X\},$$

为函数 $f(x)$ 的图形.

一般来说, 函数的图形为一曲线, 函数不同, 所画出的曲线也不同. 给定一曲线 (设曲线与垂直线最多只有一个交点), 也就是给定一个函数, 所以函数与上述曲线可以不加区分, 把函数说成曲线, 也可以把曲线说成函数.

并不是每一个函数的图形都能画出来的. 如数学上有名的狄利克雷函数, 它对人们提高函数概念的认识是有意义的, 其定义为

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x\text{是有理数}, \\ 0, & x\text{是无理数}, \end{cases}$$

但它的图形画不出来.

函数也可以解释成变换、映照或映射, 它把集合 X 中的点, 变为集合

$$\{f(x)|x \in X\}$$

中的点, 上述集合称为函数的**值域**, 记作 $f(X)$. 设点 $x \in X$, 则称 $y = f(x)$ 是 x 的象.

1.2 函数的几种特性

1.2.1 函数的奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 X 关于原点对称, 即 $x \in X$ 时, 有 $-x \in X$, 若函数满足:

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in X, \tag{1}$$

则称 $f(x)$ 是**奇函数**;

若函数满足:

$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in X, \tag{2}$$

则称 $f(x)$ 是**偶函数**.

奇函数的图形是关于原点对称的, 因为由 (1) 式, 若 $(x, f(x))$ 在图形上, 则它的关于原点对称的点 $(-x, -f(x)) = (-x, f(-x))$ 也在图形上.

偶函数的图形是关于 y 轴对称的. 因为由 (2) 式, 若 $(x, f(x))$ 在图形上, 则它的关于 y 轴对称的点 $(-x, f(x)) = (-x, f(-x))$ 也在图形上.

例如, 函数 $y = \cos x$, $y = x^2$ 是偶函数; 函数 $y = \sin x$, $y = x^3$ 是奇函数, 函数 $y = \sin x + \cos x$ 既非奇函数也非偶函数.

1.2.2 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上定义, $\forall x_1, x_2 \in X$ 且 $x_1 < x_2$ 时, 有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad [(f(x_1) \geqslant f(x_2)],$$

则称 $f(x)$ 在此区间上**单调上升或单调递增**(**单调下降或单调递减**).

又若 $x_1 < x_2$ 时, 有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad [(f(x_1) > f(x_2)],$$

则称 $f(x)$ 在此区间上为**严格单调上升或严格单调递增**(**严格单调下降或严格单调递减**).

上述函数统称为**单调函数**.

例如, $y=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调上升, 在 $(-\infty,0)$ 上严格单调下降; $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调上升; $y=[x]$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调上升, 这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

1.2.3　函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在 X 上定义, 若 $\exists M>0, \forall x\in X$, 有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在 X 上是**有界的**.

函数在 X 上有界, 从几何上看, 即它的图形位于直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间.

例如, 函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的, 因为取 $M=1$, 对任一实数 x, 有

$$|\sin x|\leqslant 1.$$

函数在 X 上有界, 即能找到直线 $y=-M$ 与 $y=M$, 使曲线全落在两直线之间. 那么函数在 X 上无界, 即找不到直线 $y=-M$ 与 $y=M$, 使得曲线全落在两直线之间. 这样说不好检验. 为了便于检验, 可以换一种方式来说: 函数 $f(x)$ 在 X 上无界, 即任给直线 $y=-M$ 与 $y=M$, 曲线不全落在两直线之间 (若曲线全落在两直线之间, 不就成为有界了吗?), 而曲线不全落在两直线之间, 意味着总有一点落在两直线之外, 用符号表示为: $\exists x'\in X$, 使得

$$|f(x')|>M.$$

于是, 得到函数 $f(x)$ 在 X 上无界的定义: $\forall M>0, \exists x'\in X$, 使得

$$|f(x')|>M,$$

则 $f(x)$ 在 X 上无界.

例如, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上无界. 因为 $\forall M>0$, 取 $x'=\dfrac{1}{2M}\in(0,+\infty)$,

$$|f(x')|=2M>M,$$

所以函数在 $(0,+\infty)$ 上无界.

读者可以发现一条规律, 只要把有界定义中的 $\exists$ 换成 $\forall$, $\forall$ 换成 $\exists$, $\leqslant$ 换成 $>$, 便是函数无界的定义.

1.2.4 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上定义, 若 $\exists l > 0, \forall x \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$f(x+l) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 是**周期函数**, l 为函数 $f(x)$ 的**周期**.

显然周期函数有无穷多个周期, 如 l 是函数的周期, 则有

$$f(x+2l) = f[(x+l)+l] = f(x+l) = f(x),$$

所以 $2l$ 也是 $f(x)$ 的周期. 一般有

$$f(x+k\cdot l) = f(x),$$

其中 k 为正整数.

若在无穷多个周期 l 中, 有一个最小的正数 T, 则称 T 为周期函数 $f(x)$ 的**最小正周期**, 简称**周期**.

例如, 正弦函数 $y = \sin x$ 是周期为 2π 的周期函数, 因为

$$\sin(x+2\pi) = \sin x.$$

不在整个实轴上定义的函数, 也可以讨论它的周期性, 如正切函数 $y = \tan x$ 的定义域为实数轴除去点

$$x = \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

同样可以讨论它的周期性. 因

$$\tan(x+\pi) = \tan x,$$

所以 $\tan x$ 是周期为 π 的周期函数.

既然周期函数的值每隔一个周期都是相同的, 所以给周期函数作图时, 只要作出一个周期的图形, 然后周而复始地画这图形, 即得到整个周期函数的图形.

对狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x\text{是有理数}, \\ 0, & x\text{是无理数}, \end{cases}$$

任何正有理数 l 都是它的周期, 因有理数之和为有理数, 无理数与有理数之和为无理数, 所以

$$D(x+l) = D(x),$$

但它没有最小周期.

1.3 复合函数与反函数

本节介绍函数的运算. 函数除加、减、乘、除四则运算外, 还有复合函数与反函数运算. 有了函数的运算, 才能从几个已知函数出发, 构造出许多新的函数.

设 $f(x), g(x)$ 在 X 上定义, 则

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

也是 X 上的函数. 四则运算没有什么新内容, 需要讨论的是复合函数与反函数.

1.3.1 复合函数

例如, 函数

$$y = \sin x^2$$

可以看成是函数 $y = \sin u$, $u = x^2$ 的复合, 函数 $y = \sin x^2$ 就称为函数 $y = \sin u$, $u = x^2$ 的复合函数, 一般有如下定义.

定义 1 设函数 $y = f(u)$ 的定义域包含函数 $u = g(x)$ 的值域, 则在函数 $g(x)$ 的定义域 X 上可以确定一个函数

$$y = f(g(x)),$$

称为 g 与 f 的**复合函数**, 有时也记作 $f \circ g$.

变量 u 称为中间变量, 给定自变量 $x \in X$, 通过对应规则 g, 确定出中间变量 u, 再通过对应规则 f, 确定出因变量 y, 这样就建立起自变量 x 与因变量 y 之间的对应规则 $f \circ g$.

函数概念中主要是对应规则、定义域和值域. 至于自变量和因变量采用什么记号是无关紧要的. 所以只要 $f(x)$ 的定义域包含 $g(x)$ 的值域, 就可以谈论复合函数 $f(g(x))$.

若函数 $f(x)$ 的定义域包含 $g(x)$ 的值域, 又函数 $g(x)$ 的定义域包含 $f(x)$ 的值域, 那么复合函数 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 存在, 一般来说

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

例如, $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$, 则

$$\sin x^2 \neq (\sin x)^2.$$

这说明复合函数与四则运算不同, 它没有交换律. 容易证明结合律是成立的:

$$f \circ (g \circ h) = (g \circ f) \circ h.$$

以后用时, 既要会把几个简单函数复合成一个函数, 也要会把一个函数拆成几个简单函数的复合.

1.3.2 反函数

在圆面积公式

$$S = \pi R^2$$

中, R 是自变量, S 为因变量, 表示圆的面积随半径的变化而变化. 事实上, 半径 R 与面积 S 同时发生变化, 很难说哪个先变、哪个后变, 因此没有理由一定要把 R 取作自变量, 也可把面积 S 取作自变量, 这时半径 R 就是面积 S 的函数

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}},$$

这个函数就称为原来面积函数的反函数.

作复合函数运算时. 对函数的定义域和值域加以限制, 而对对应规则没有什么限制. 求反函数时, 需要对对应规则加以限制, 只有具有一一对应的函数才能求反函数.

一一对应其实不是新的概念. 如所有实数与实轴上的点是一一对应的; 班上每个同学与其学号是一一对应的, 确切说有下面定义.

定义 2 设 $f(x)$ 在 X 上定义, $\forall x_1, x_2 \in X$, 若有

$$x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \neq f(x_2)$$

或有

$$f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow \ x_1 = x_2,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上是一一对应的

所以, 一一对应的函数就是把不同的 x 变成不同的 y, 具体证明时, 常采用等号形式比较方便.

一一对应的函数必有反函数存在.

定义 3 设 $y = f(x)$ 在 X 上一一对应, 值域为 Y, $\forall y \in Y$, 用满足 $f(x) = y$ 的唯一确定的 $x \in X$ 与之对应, 由这样对应关系所确定的函数 $x = f^{-1}(y)$, 就称为原来函数的**反函数**.

函数与反函数的对应规则、定义域和值域是不同的, 反函数的定义域和值域, 恰好是原来函数的值域和定义域, 即

$$f: X \to Y,$$

则

$$f^{-1}: Y \to X.$$

显然有

$$f^{-1} \circ f = I : X \to X,$$

$$f \circ f^{--1} = I : Y \to Y,$$

$$(f^{--1})^{--1} = f : X \to X,$$

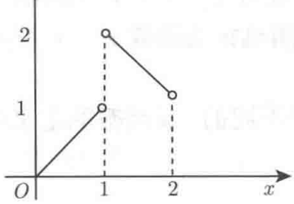
其中 I 表示恒等变换.

若 $f(x)$ 在 X 上是严格单调的, 因严格单调函数是一一对应的, 所以严格单调的函数必有反函数存在. 反之, 一一对应的函数, 不一定是严格单调的. 如函数

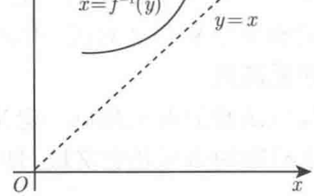
$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1, \\ 3 - x, & 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

在 $[0, 2]$ 上是一一对应的, 但不是单调函数. 这个函数的反函数仍是它自己, 如图 1.1 (a) 所示.

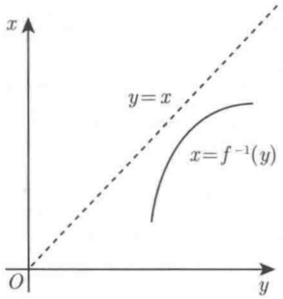
下面讨论反函数的图形. 因从方程的观点来看, 函数与反函数没有什么区别, 点 (x, y) 满足方程 $y = f(x)$, 也一定满足方程 $x = f^{-1}(y)$. 所以, 取 x 为自变量画出的函数曲线 $y = f(x)$, 若改取 y 为自变量, 它就是反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的曲线 (图 1.1(b)). 这样观察反函数曲线时, 就要沿着 y 轴去看, 很不方便. 习惯上把自变量轴放置在水平位置, 为此, 只要把 xy 平面绕分角线 $y = x$ 旋转 180°, y 轴就转到水平位置, x 轴转到垂直位置, 旋转后的曲线就是反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的图形 (图 1.1(c)). 又依照习惯, 当孤立讨论反函数时, 总是把自变量用 x 来记, 因变量用 y 来记, 所以旋转后, 再把记号改过来, 把 x 改成 y, y 改成 x, 即为反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形 (图 1.1(d)). 若反函数与原函数放在一起讨论时, 反函数仍记为 $x = f^{-1}(y)$.



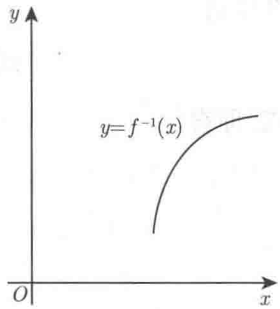
(a)



(b)



(c)



(d)

图 1.1

需要指出的是, 变量记号不是本质的, 可以把 $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$ 称为函数 $y = f(x)$ 的反函数, 同样, 也可以把 $y = f^{-1}(x)$, $x \in Y$, 称为 $y = f(x)$ 函数的反函数.

反函数还有另一种定义, 正如数 a 的倒数有两种定义 (一种是: $a \neq 0$, 称 $1/a$ 为 a 的倒数; 一种是: $\exists b$ 使 $a \cdot b = 1$, 则称 b 为 a 的倒数) 一样, 反函数也可用复合函数来定义, 我们把它写成定理.

定理 给定函数 $y = f(x)$, 其定义域和值域分别记作 X 和 Y, 若在集合 Y 上存在函数 $g(y)$, 满足

$$g(f(x)) = x, \quad \forall x \in X,$$

则有

$$g(y) = f^{-1}(y), \quad \forall y \in Y.$$

证 问题要证 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 存在, 且等于 $g(y)$.

首先证反函数存在, 即要证 $f(x)$ 在 X 上是一一对应的. $\forall x_1, x_2 \in X$, 若 $f(x_1) = f(x_2)$, 由定理条件

$$g(f(x_1)) = x_1,$$

$$g(f(x_2)) = x_2,$$

因函数 $g(y)$ 在同一点值应相同, 得 $x_1 = x_2$, 根据一一对应的定义, 函数 $f(x)$ 在 X 上是一一对应的.

其次证 $g(y) = f^{-1}(y)$, $\forall y \in Y$, 因 y 属于 $f(x)$ 的值域, 所以 $\exists x \in X$, 使得 $y = f(x)$.

由反函数定义

$$x = f^{-1}(y),$$

又由定理条件知

$$g(y) = g(f(x)) = x.$$

结合上两式, 即得

$$g(y) = f^{-1}(y).$$

证毕.

1.4　基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数, 这六种函数称为**基本初等函数**.

基本初等函数经有限次加、减、乘、除、复合运算所得的函数, 称为**初等函数**. 要研究初等函数, 首先就要熟悉基本初等函数的性质. 基本初等函数的简单性质, 在初等数学中已经讲过, 这里只是结合图形把它们复习一下.

1. 常数函数

$$y = c \in (-\infty, +\infty).$$

其图形是通过 $(0, c)$ 点, 且平行于 x 轴的直线.

2. 幂函数

$$y = x^\alpha \quad (0 < x < +\infty, \alpha \neq 0).(\text{图}1.2)$$

$a > 0$ 时, 函数 $y = x^\alpha$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格上升;
$a < 0$ 时, 函数 $y = x^\alpha$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格下降.
函数 $y = x^\alpha$ 与函数 $y = x^{1/\alpha}$ 互为反函数.

3. 指数函数

$$y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1).(\text{图}1.3)$$

$a > 1$ 时, 函数 $y = a^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格上升;
$a < 1$ 时, 函数 $y = a^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格下降.

4. 对数函数

$$y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1, 0 < x < +\infty).(\text{图}1.4)$$

$a > 1$ 时, 函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格上升;
$\alpha < 1$ 时, 函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格下降.
函数 $y = a^x$ 与函数 $y = \log_a x$ 互为反函数.