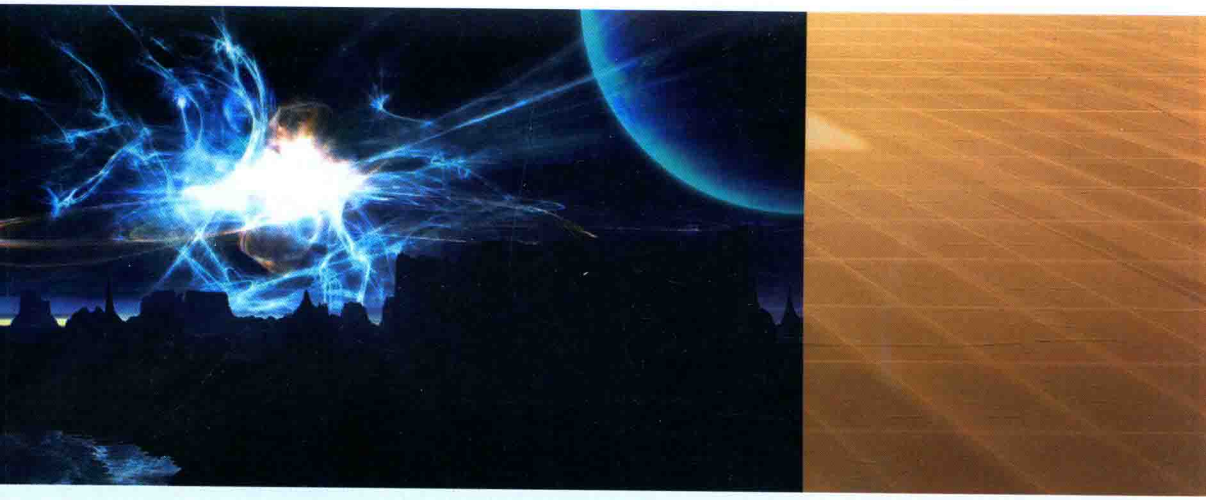
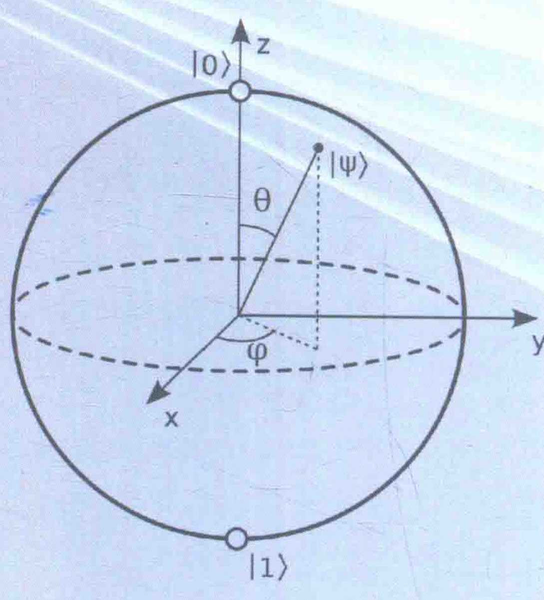


FOUNDATION OF QUANTUM MECHANICS

量子力学基础

吕志纯　著



東北大學出版社
Northeastern University Press

量子力学基础

吕志纯 著

东北大学出版社
·沈 阳·

图书在版编目（CIP）数据

量子力学基础 / 吕志纯著. — 沈阳：东北大学出版社，2015. 11
ISBN 978-7-5517-1149-4

Ⅰ. ①量…　Ⅱ. ①吕…　Ⅲ. ①量子力学　Ⅳ. ①O413. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 272772 号

内容简介

本书通过莫培督作用量的量子化，对牛顿运动定律进行了量子修正，由此推导出海森伯不确定关系，波函数 ψ，ψ 模平方 $|\psi|^2$ 的概率诠释，ψ 的叠加原理以及波粒二象性等一系列波函数 ψ 的基本性质. 从而把量子力学直接建立在普朗克作用量子 h 和薛定谔方程两条主要基本原理之上，最大限度地减少了量子力学基本假设的数目，使量子力学变得更加简单，本质更凸现. 统一了量子力学基础目前所面临的混乱局面，并由此得到了对量子力学的一个深刻理解.

本书适合理论物理专业研究生和科研工作者参考，也适合综合大学、理工和师范院校物理专业高年级大学生、研究生、教师以及广大物理学爱好者阅读.

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110819
电话：024－83687331（市场部）　83680267（总编室）
传真：024－83680180（市场部）　83680265（社务部）
E-mail：neuph@neupress. com
http：//www. neupress. com
印 刷 者：抚顺光辉彩色广告印刷有限公司
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：170mm × 240mm
印　　张：10. 5
字　　数：211 千字
出版时间：2015 年 11 月第 1 版
印刷时间：2015 年 11 月第 1 次印刷
责任编辑：孙德海　　　责任校对：佳　宁
封面设计：刘江旸　　　责任出版：唐敏志

ISBN 978-7-5517-1149-4　　　定　　价：39. 00 元

前　言

1926 年，玻恩在应用 Schrödinger 方程于散射实验时，为解释散射粒子角分布的实验结果而提出了关于波函数 ψ 的概率诠释，这对于波函数 ψ 乃至量子力学的理解和应用无疑是至关重要的．为此，玻恩获得了 1954 年的诺贝尔物理学奖．但是，从理论上，人们至今还未能根据量子力学的基本概念和原理导出这一结论．以至于，一直以来，波函数 ψ 的概率诠释始终被人们误以为是独立于现有量子力学基本原理之外，从而被看作量子力学的一个基本假设．撰写本书的最初目的就是要弥补量子力学基础中的这一逻辑缺陷，从而减少量子力学中基本假设的数目，简化量子力学的逻辑基础，同时从量子力学的基本概念和原理中得到对波函数 ψ 概率诠释的理论解释．

然而，完全出乎意料的是，事情的发展似乎比预想走得更远．通过更深入的分析和研究发现：量子力学中的波函数，包括具有确定波长、频率和振幅的所谓基本波函数——描述自由运动粒子的平面单色波 ψ_p，现在都可以独立地从海森伯不确定关系中推导出来．不仅如此，波函数 ψ 的基本性质，比如 ψ 的有限单值性、平方可积性、归一化以及 ψ 及其振幅 $|\psi|$ 大小的相对性等，也可以从海森伯不确定关系中进一步推导出来．从而使物理学家们普遍认为是量子力学基本概念和基本假设的波函数 ψ，现在变成了海森伯不确定关系的推论，并由此在波函数 ψ 的虚、实两部中，注入了海森伯不确定关系的新要素，建立起波函数 ψ 如下形式的数学表示

$$\psi(x,\ t)=\psi(\sqrt{\rho(x+\Delta x,\ t)},\ \Delta x(x,\ t))=(\sqrt{\rho(x+\Delta x,\ t)},\ \Delta x(x,\ t)) \tag{1}$$

和

$$\psi(x,\ t)=\mathrm{Re}\psi+\mathrm{i}\mathrm{Im}\psi=\sqrt{\rho(x+\Delta x,\ t)}+\mathrm{i}\Delta x(x,\ t) \tag{2}$$

并由此而推导出复平面 z 上的涨落圆方程

$$|\psi(x,\ t)|^2=\rho(x+\Delta x,\ t)+\Delta x^2(x,\ t) \tag{3}$$

这是一个重要的方程，可以从中得出很多结论．例如，波函数 ψ 事实上就是直接来自这一方程所表示的涨落圆，而 ψ 就是圆周 Γ 上的任意一点．不仅如此，从 ψ 的推导过程中，我们还看到波函数 ψ 为什么要成为一个矢量，为什么必

须是复数，$i=\sqrt{-1}$是怎样进入 ψ 中来的，其物理意义如何.

另一方面，从涨落圆方程的复指数形式(即波函数 ψ 的复指数形式)

$$\psi(x, t)=|\psi(x, t)|e^{i\theta} \tag{4}$$

容易看出，ψ 不仅是实的位置和时间变量 x，t 的函数，同时也是复平面上相位角 θ 的函数. 薛定谔当年只注意到了 ψ 关于 x，t 的变化规律，并找到了描述 ψ 关于 x，t 变化规律的薛定谔方程. 然而他以及后来的其他物理学家并没有发现隐藏在其中的瞬时涨落规律，即在任意固定位置和时刻 x，t 上关于 θ 的随机变化规律，更没有给出其相应的几何表示和解析表示——复平面上的涨落圆和涨落圆方程(即勾股定理)，从而给量子力学的理解和进一步发展带来了一系列严重困难. 本书正是从涨落圆及涨落三角形这两个基本几何图形出发，确定了 ψ 的复数性质及其运算规则，并从中得出了一系列结论. 例如，波函数 ψ 的叠加原理在此是作为复数 ψ 的加法运算而进入量子力学，从而使波动 ψ 的叠加原理成为海森伯不确定关系的一个逻辑推论，而不再是量子力学中一条独立的基本原理. 而作为 $3N$ 维位形空间中的波函数 ψ，则可以从复数 ψ 的乘法运算中得到. 尤其是，通过进一步确定波函数 ψ 的代数表示，又从中推导出涨落直角三角形的勾股定理，并由此得到 ψ 模平方 $|\psi|^2$ 的概率解释及其几何表示. 不仅如此，ψ 的涨落圆方程同时也给波包缩编提出了一个新的理论解释. 由于，涨落圆方程是由 ψ 的模平方 $|\psi|^2$，ρ 和 Δx^2 三部分组成[方程(3)]，由此可见，只有在 $\Delta x\to 0$ 时，才能说 $|\psi(x, t)|^2$ 表示粒子位置的概率分布. 而一般情况下，即 $\Delta x\neq 0$ 时，$|\psi(x, t)|^2$ 并不能被认为是粒子位置的概率分布. 从实验的观点来看，只有在进行位置测量时，才会有 $\Delta x\to 0$. 因此，不进行测量我们就不能说粒子有确定的位置，也不能说 $|\psi(x, t)|^2$ 表示的是粒子位置的概率分布.

毫无疑问，上述一系列结果对于量子力学的深刻理解和简化量子力学的逻辑基础同时具有基本的重要性.

另外，由于海森伯不确定关系不仅对于物质而且对于光也是普遍适用的，从而使波函数 ψ 及其概率解释的理论推导具有更普遍的意义，即不但适用于量子力学，而且可以更进一步推广应用到辐射领域. 例如，爱因斯坦关于光的概率诠释——光波的强度等于光子在屏上某一区域中出现的概率，现在则可以从类似的推理中得到. 从而正像在量子力学中一样，在量子电动力学中，光的波函数 φ 及其模平方 $|\varphi|^2$ 的概率诠释，也失去了其基本意义. 由此，使得量子电动力学的逻辑基础也变得更加简单，而辐射的波粒二象性与波函数 φ 也从中得到了理解.

应当指出，虽然我们看到，海森伯不确定关系对于量子力学乃至量子电动力学具有普遍意义，并且由此，我们推导出了一系列极其重要的结论，然而，

对于量子力学来说，海森伯不确定关系似乎并不能算作其第一性的基本原理. 因为我们知道，普朗克发现的作用量子 h 具有更普遍的意义：一个物理体系作用量的变化，以及物理体系之间作用量的交换只能以单个量子的方式进行. 从而，一切微观现象必然与作用量的原子性有关. 因此，普朗克常数 h 必然是自然界的一个普遍常数. 正像光速 c 是自然界的普遍常数那样. 同时，也正像光速 c 作为狭义相对论的基本原理，从而成为狭义相对论的基本概念和出发点那样，普朗克作用量子 h 也是微观世界中量子物理学的最基本概念和出发点. 既然如此，作为量子物理学的基本数学理论——量子力学的建立，则理应在逻辑上直接与普朗克作用量子 h 紧密相联，而不应被束之高阁，游离在量子力学基本原理之外. 使人觉得它像一个幽灵，在量子力学中似乎无处不在，却又没有安身之处. 从而令人感到量子力学名不符实，还是称为波动力学或矩阵力学更好.

事实上，量子力学的神秘而令人无法理解，关键就在于此. 本书正是从解决这一基本问题开始入手：并首先从牛顿运动定律出发，通过莫培督作用量的量子化，对于物质粒子给出其相应的海森伯不确定关系的一个理论推导，从而使普朗克常数 h 直接成为量子力学最基本的一个假设或原理. 由此，使我们最终看到了波动究竟是怎样产生的，即怎样由于普朗克作用量子 h，而从经典粒子的运动定律中演化出来，从而把量子力学和经典力学紧密地联系在一起. 不仅如此，我们还看到：波和粒子两个完全不同的概念及其两者之间的关系，又被合理地统一在由海森伯不确定关系推导出的波函数 ψ 之中. 于是，神秘而令人费解的波函数 ψ 与波粒二象性现象，最终得到了一个新的理解.

综上所述，原本大多是量子力学中的一些基本概念或基本假设，现在都变成了普朗克作用量子的导出结论，而不再是基本的了. 由此最大限度地减少了量子力学中基本概念和基本假设的数目，统一了目前量子力学基础中所面临的混乱局面，直接把量子力学建立在普朗克常数 h 和薛定谔方程两个主要基本原理①之上，由此得到了对量子力学的一个深刻理解.

当然，事情还远不止如此，从海森伯不确定关系和波函数 ψ 的推导过程中，似乎可以看到：由普朗克作用量子 h 导致的位置不确定量 Δx 在破坏经典力学惯性定律的同时，也导致了均匀、平直的欧几里得空间几何结构的破坏. 既然如此，作用量 h 所导致的位置不确定量 Δx 无疑是反映了空间性质——空间位置的不确定性，即空间位置的量子涨落. 并且，从 Δx 被确定为复平面 z 上直角坐标系的虚轴坐标可知，Δx 是一个纯虚数物理量 $\mathrm{i}\Delta x$. 然而，众所周知，物理学中的可观察量都是用实数来表示的，因此，纯虚数的物理量 $\mathrm{i}\Delta x$ 当

① 此外，还有其他一些较次要的假设，这些假设似乎很难被认为是理论的基本假设，也不妨根据其作用和意义的不同，分别将其称为辅助性假设或特设性假设.

然不会是一个可观察量．由此可见，波函数 ψ 把不可观测的空间量子涨落 Δx 与可观测的物理现象(概率密度函数 $\rho(x, t)$)紧密地联系在一起．而根据薛定谔方程，外势场的存在将使波函数 ψ 发生改变，于是由波函数 ψ 的代数表示(1)或(2)可以看出，外势场的存在必然对空间的量子涨落 Δx(严格地说，是 Δx 的上限 Δx_{max})产生影响，从而导致其发生改变．于是，又把外力与不可观测的空间量子涨落进一步联系在一起．如此一来，从基本思想方面可发现量子力学与相对论之间的某种一致性：物质(通过其场)对空间产生影响，而空间又反作用于其中的物质，使其动量 p 和概率密度 ρ 发生量子改变，从而影响其中物质的“运动”．

参考文献

[1] Born M Z. physik，1926，37：863.

[2] 关洪．科学名著赏析：物理卷 [M]．太原：山西科学技术出版社，2006：224.

[3] 向义和．大学物理导论 [M]．北京：清华大学出版社，2005：329.

[4] 金尚年．量子力学的物理基础和哲学背景 [M]．上海：复旦大学出版社，2007：56，62-64.

[5] 曹天予．20 世纪场论概念的发展 [M]．上海：上海科技教育出版社，2008：188，223.

[6] 瑞斯尼克 R．相对论和早期量子论中的基本概念 [M]．上海：上海科学技术出版社，1978：210-211，221，213-215，226.

[7] 关洪．量子力学的基本概念 [M]．北京：高等教育出版社，1990：35，67，73.

[8] PAOLI W．General principles of quantum mechanics [M]．Berlin：Springer，1980.

[9] LANDAU L D，LIFSHITZ E M．Quantum mechanics [M]．Oxford：Pergamon，1958.

[10] 关洪．原子论的历史和现状：对物质微观构造认识的发展 [M]．北京：北京大学出版社，2006：158-166.

物理学家论量子力学的基本原理

一般的量子力学教科书主要着眼于尽快教会学生运用量子力学去解决实际问题，大都采取公理化方法，把几条得自物理原理的计算规则作为基本假设告诉学生叫他们记住，这样，学生容易上手，很快就能算题. 然后，再回过头来讲表象理论. 但是，这种讲法不可避免地给学生造成一个先入为主的印象，认为量子力学的几条基本假设是某种先验的思辨的结果，而不是微观物理学经验的结晶，以至于有些学生虽然学会了用量子力学的数学规则解题，却没有把握量子力学的物理原理，产生了量子力学是玄学不好懂的看法. 所以要讲量子力学的物理原理，我认为最好还是要从物理上把基本原理讲清楚，不要采取公理化的讲法.

（摘自王正行，《量子力学原理》，北京，北京大学出版社，2003 年，第 6 页。）

Einsten 和 Dirac 的思考方式与研究风格，是从第一性的原理出发，经过严密的逻辑推理和数学演绎，来获得对物理现象的深入和全新理解. 这是理论物理学家思考方式与研究风格的一种类型. 而 Heisenberg 的思考方式与研究风格更接近 Bohr，他们先从具体物理实验和现象的分析中发掘新的思想观念和物理原理，然后再在此基础上建立理论体系. 这是理论物理学家思考方式与研究风格的又一种类型.

（摘自王正行，《量子力学原理》，北京，北京大学出版社，2003 年，第 286 页。）

目 录

第一篇　普朗克作用量子与量子力学的基本假设

在近代，随着物理学的深入发展，人们愈来愈关注微观世界. 一方面，人们继续通过实验观察来探索微观世界；另一方面，人们也通过应用已有的理论来研究微观现象. 并且，人们将两者更加紧密地联系在一起，从而更有利于认识和理解微观世界中的复杂现象.

例如，为了解释各种不同的自然现象和实验结果，人们提出了分子的概念，并将牛顿运动定律应用于分子，从而建立了分子运动的理论；人们也曾将牛顿运动定律应用于实验中发现的电子，并假设电子的运动遵从牛顿运动定律，由此来预测可观测到的现象.

如此一来，牛顿运动定律既被用来描述宏观物体的运动，同时也被用来描述微观粒子的运动，并在有限的范围内，得到了实验的证实. 然而，随着实验的进一步深入研究，则出现了愈来愈多与实验不符的证据，同时也发现了一系列理论上的严重困难，并最终导致 20 世纪 20 年代量子力学的产生.

作为量子力学的基础研究，首先引起我们关注的自然是经典理论的预言与微观现象的实验事实不符的根本原因. 并且正是由于追究这个原因而发现了作用量的原子性：一个物理体系作用量的变化以及物理体系之间作用量的交换只能以分立的单个量子进行. 由此可见，一切微观现象则必然都与作用量的原子性有关. 为此，我们将普朗克作用量子 h 作为量子理论的普遍原理，并遵循上述传统将其应用于经典粒子的运动，看看能得出什么结论.

1 莫培督作用量的量子化与海森伯不确定关系的导出

众所周知，在牛顿力学中，物体的动能和动量是量度运动的重要物理量.虽然它们各自从不同的角度定量地描述了物体的运动，但由于一个物体的运动总是与空间和时间有着密切联系，总是表现为经过一定的时间通过一段距离，从而容易看出，动量越大(即质量越大，速度越快)，距离越长，运动的量就越大；根据量纲分析也可以认为，能量越大，时间越长，运动的量越大.由此可见：对于一个力学运动过程来说，运动的量的大小不仅与动能和动量成正比，而且也一定与物体通过的空间距离和经历的时间间隔成正比.从而可知，虽然动能和动量各自从不同的角度量度了物体的运动，但仍然不足以全面地量度物体的运动过程.

1.1 莫培督作用量

按照莫培督的看法，经典力学的运动过程可以用莫培督作用量来全面量度，它等于动量与距离的乘积，而按照量纲分析，同样它也等于能量与时间的乘积.在有外力的情况下，根据牛顿第二定律，物体由于外力而作变速运动.并且由于空间时间的连续性，以及物体运动速度 $\boldsymbol{v}$ 的连续变化，从而物体的动能 E 和动量 p 也随速度 $\boldsymbol{v}$ 连续地变化.由此，对于一个无穷小的运动过程，其无穷小莫培督作用量可分别用下面两组不同物理量的微分乘积来描述

$$\mathrm{d}p\cdot\mathrm{d}x;\ \mathrm{d}E\cdot\mathrm{d}t \tag{1.1.1}$$

其中，$\mathrm{d}p\cdot\mathrm{d}x$ 为无穷小的空间－动量作用量；$\mathrm{d}E\cdot\mathrm{d}t$ 则为无穷小的时间－能量作用量.它们各自从不同的侧面表达了同一个无限小变速运动过程的作用量，虽然所用的物理量各不相同，但量纲完全相同.因此，两者在数量上应当相等，从而有

$$\mathrm{d}p\cdot\mathrm{d}x=\mathrm{d}E\cdot\mathrm{d}t \tag{1.1.2}$$

而整个变速运动过程的莫培督作用量则可通过式(1.1.2)的两重积分来表示(见图1.1)

$$\iint\mathrm{d}p\mathrm{d}x=\iint\mathrm{d}E\mathrm{d}t \tag{1.1.3}$$

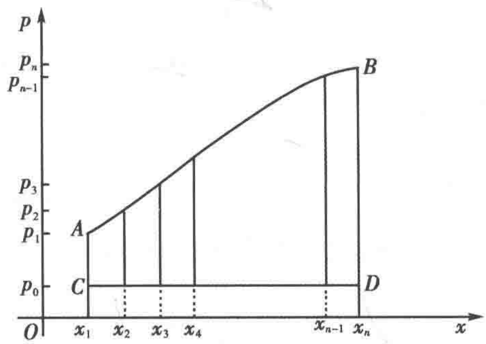


图 1.1　两种不同运动过程作用量的几何表示

图中的长方形 CDx_nx_1 的面积为匀速直线运动粒子作用量的几何表示，其微元为 $p_0\cdot \mathrm{d}x$，$\mathrm{d}x=x_i-x_{i-1}$，$i=1, 2, 3, \cdots, n$. 曲边形 ABx_nx_1 的面积为变速运动粒子的作用量的几何表示，其微元为 $\mathrm{d}p\cdot\mathrm{d}x$，式中 $\mathrm{d}p=p_i-p_{i-1}$，$i=1, 2, 3, \cdots, n$. 当 $n\to\infty$ 时，就得到无限小的微元 $\mathrm{d}p$，$\mathrm{d}x$.

显然，公式(1.1.2)也可以从牛顿第二定律

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=F \tag{1.1.4}$$

直接推导出来. 为此，我们假设粒子沿 x 轴运动，并且为简单起见，令运动粒子的势能 V 与时间 t 无关. 从而有

$$V=V(x) \tag{1.1.5}$$

由此可知

$$F=-\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1.1.6}$$

另一方面，根据机械能守恒定律，粒子的总能量在其运动中保持不变，从而可知，粒子动能的增加必然等于其势能的减少，反之亦然. 现在，既然 E 在此表示粒子的动能，因此可令 $\mathrm{d}E$ 为粒子动能的增加. 从而可把上述结论表示如下

$$\mathrm{d}E=-\mathrm{d}V(x) \tag{1.1.7}$$

将式(1.1.7)代入式(1.1.6)中，可得

$$F=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} \tag{1.1.8}$$

再将式(1.1.8)代入式(1.1.4)中，则有

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} \tag{1.1.9}$$

由此经过移项即可得到式(1.1.2). 反之，我们也可以从式(1.1.2)推导出牛顿第二定律(1.1.4)式. 因此，莫培督作用量与牛顿第二定律两者完全等价.

同理，在无外力的情况下，粒子作匀速直线运动. 由此可知，自由粒子的动量 p 和动能 E 必为恒量. 因此，一个作匀速直线运动的自由粒子，其无穷小运动过程的无穷小莫培督作用量可用动量 p 和动能 E 分别与无穷小的距离和时间 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}t$ 的乘积来描述. 从而有

$$p \cdot \mathrm{d}x;\quad E \cdot \mathrm{d}t \tag{1.1.10}$$

$p \cdot \mathrm{d}x$ 和 $E \cdot \mathrm{d}t$ 分别为匀速直线运动的无穷小的空间－动量作用量和无穷小的时间－能量作用量.

由于同样的理由，类似于式(1.1.2)，对于一个无限小的距离 $\mathrm{d}x$ 和时间间隔 $\mathrm{d}t$ 中的运动过程，有

$$p \cdot \mathrm{d}x = E \cdot \mathrm{d}t \tag{1.1.11}$$

而匀速直线运动中的某个有限大小运动过程的莫培督作用量则可通过式(1.1.11)的积分来表示

$$\int p\mathrm{d}x = \int E\mathrm{d}t \tag{1.1.12}$$

另一方面，在牛顿力学中，根据运动过程中有无外力作用下的位移出现，可以确定该运动过程是否为一个做功过程. 例如，一个自由粒子的匀速直线运动过程，就是一个非做功过程. 而由牛顿第二定律描述的一个在外力作用下的非自由粒子的运动过程，则是一个做功过程. 对于由牛顿第二定律所描述的作功过程，遵循的是能量的转化与守恒定律（最好不要将其称为能量守恒定律这种简化模糊的说法）. 而对于牛顿第一定律所描述的自由粒子的匀速直线运动则是一种定态运动——运动状态不发生改变——的过程. 在这种运动过程中，由于没有外力，运动的物体只具有动能而没有势能，当然不会涉及作功与能量的转化. 从而其遵循的能量守恒定律自然与能量的转化无关. 由此可见，牛顿第二定律与牛顿第一定律所描写的两种运动在本质上不同.

根据牛顿力学，运动物体的动能主要由物体所遵循的运动定律来决定. 例如，与牛顿第二定律相关的动能，可以根据牛顿第二定律和功的定义导出如下

$$E = \int \mathrm{d}E = \int F\mathrm{d}s = \int m\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{d}s$$

$$= \int m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}v\mathrm{d}t = \int mv\mathrm{d}v = \frac{1}{2}mv^2$$

这是一个运动物体，由于外力的作用，发生速度和位置的改变，从而导致运动的变化所带来的能量改变——通过作功而转化的那部分运动能量. 由此可见，遵循牛顿第二定律的运动物体，其动能$\frac{1}{2}mv^2$ 与运动的改变、作功和能量

的转化相联系.

而对于牛顿第一定律来说，由于

$$F = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

从而有

$$E = \int \mathrm{d}E = \int F\mathrm{d}s = \int m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{d}s = 0$$

由此可见，相应于牛顿第二定律的动能对于牛顿第一定律来说则为0. 那么，我们能否由此就说，一个自由粒子在其匀速直线运动的过程中不具有动能呢？回答显然是：不能. 因为按照物理学家们的看法，物体的动能是物体由于运动所具有的能量. 那么一个自由粒子由于其匀速直线运动从而具有动能，则是理所当然的. 由此分析和上述推理，我们可以得出一个重要结论：一个作匀速直线运动的自由粒子所具有的动能一定与牛顿第二定律相联系的动能具有不同的形式. 并且由于一个自由粒子的匀速直线运动过程不涉及外力，作功及能量的转化，从而可以直接由莫培督作用量所确定的牛顿第一定律导出如下。

由式（1.1.11）的移项可得

$$\frac{E}{p} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v(\text{常数}) \tag{1.1.13}$$

再将 $p = mv$ 代入式（1.1.13）中，则可得

$$E = mv^2$$

这就是一个自由粒子所具有的动能形式. 它只与匀速直线运动定律有关，而与外力、作功和能量转化无关. 与动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 比较可见：两者相差1/2. 其物理意义上的不同表现如下：在物体的运动能量发生转化的情况下，转化了的机械运动应以动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 来描述. 而对于没有发生机械运动转化的匀速直线运动来说，则应以动能 mv^2 来描述. 动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 对于自由粒子的意义只在于表明：当一个自由粒子在其匀速直线运动发生改变时，所应具有的作功能力.

应当指出，自由粒子的动能 mv^2 由于与作功和能量的转化无关，自然不会有什么实际意义，我们可举例如下：由于惯性定律是指一个物体永远沿着一条直线作匀速运动，否则就不能称其为惯性定律. 如此一来，一辆作匀速直线运动的汽车既不能停在一个地方装货，又不能停在另一个地方卸货. 因此对于实际的生产和生活似乎没有任何意义. 既然惯性定律都是如此，其动能 mv^2 就更无从谈起，即使对于牛顿而言，惯性定律的意义和作用只是在于作为建立牛顿

第二定律的基础，这完全无须考虑其动能 mv^2. 而我们知道，物理学是一门严谨的科学，一个在实践（包括实验）和理论两个方面都没有什么用处的概念在物理学中是没有地位的. 正是由于这一点，动能 mv^2 后来则被物理学家们所抛弃. 现今只有在物理学史及其相关的文献中，才会偶有所遇. 然而，对于量子力学则完全不同，例如在本书的第二篇中，我们将会看到：一个作匀速直线运动的自由粒子的动能 mv^2 在量子力学平面单色波建立过程中的重要作用及其理论意义.

现在我们回到一个自由粒子的匀速直线运动定律（1.1.13），为使其与牛顿第二定律保持形式上的一致，我们可进一步推导如下.

由式（1.1.13）可得

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 0 \tag{1.1.14}$$

由此，按照牛顿第二定律的表述形式，也可以将牛顿第一定律进一步表示如下

$$F = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 0 \tag{1.1.15}$$

式（1.1.13）和（1.1.15）就是牛顿第一定律的两种不同表现形式.

综上所述，一个力学运动过程无论其是否做功，能量是否发生转化，都可以用“莫培督作用量”来定量地描述，因此莫培督作用量既可以用来量度牛顿第一定律描述的运动过程，也可以用来量度牛顿第二定律描述的运动过程，从而成为对运动更普遍的定量描述. 并且正像我们从式（1.1.2）推导出牛顿第二定律那样，由式（1.1.11），我们也可以推导出牛顿第一定律——一个自由粒子的匀速直线运动定律（1.1.15）.

由此可见，莫培督作用量对于运动描述的普遍意义：即不仅全面地量度了物体的运动过程，同时也是描述物体运动的基本规律. 然而，不仅如此，更重要的是我们将会看到，莫培督作用量对运动描述的深远意义，那就是：将莫培督作用量与普朗克作用量子相结合，从而推导出海森伯不确定关系，并由此通向建立量子力学的道路. 同时，也将经典力学与量子力学更紧密地联系在一起.

1.2 莫培督作用量的量子化与海森伯不确定关系的理论推导

由式(1.1.2)可知，一个运动过程的作用量在经典力学中可以取任意小的数值. 然而，普朗克作用量子 h 的出现，则为经典的无穷小作用量设置了一个

下限，使得莫培督作用量不能取得比 h 更小，譬如不存在如 $\frac{1}{3}h$ 大小的作用量．从而得到极限情况下的莫培督作用量的如下形式

$$\mathrm{d}p \cdot \mathrm{d}x = h \tag{1.2.1}$$

$$\mathrm{d}E \cdot \mathrm{d}t = h \tag{1.2.2}$$

这样，普朗克作用量子 h 就使得经典运动过程的无限可分性失去其物理意义，从而导致了运动的量子化．我们首先来看，空间动量作用量(1.2.1)．作为一个数学方程，由于没有什么物理条件的限制，自然会有无穷多组解 $\mathrm{d}p$，$\mathrm{d}x$ 满足方程．在非相对论情况下，这无穷多组解中包含有下面两种极限情况

$$\mathrm{d}p \to 0,\ \mathrm{d}x \to +\infty \quad 或 \quad \mathrm{d}x \to 0,\ \mathrm{d}p \to +\infty \tag{1.2.3}$$

从而有 $\mathrm{d}p$ 和 $\mathrm{d}x$ 的取值范围如下

$$0 < \mathrm{d}p < +\infty \quad 0 < \mathrm{d}x < +\infty \tag{1.2.4}$$

同理，也有无穷多组类似的解 $\mathrm{d}E$，$\mathrm{d}t$ 满足方程(1.2.2)，并包含有下面两组极限情况

$$\mathrm{d}E \to 0,\ \mathrm{d}t \to +\infty \quad 或 \quad \mathrm{d}t \to 0,\ \mathrm{d}E \to +\infty \tag{1.2.5}$$

并有 $\mathrm{d}E$ 和 $\mathrm{d}t$ 的相应取值范围如下

$$0 < \mathrm{d}E < +\infty \quad 0 < \mathrm{d}t < +\infty \tag{1.2.6}$$

由此，原本根据经典力学，由式(1.1.2)给出的可以精确确定的两组无穷小量 $\mathrm{d}p$，$\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}E$，$\mathrm{d}t$，现在由于普朗克作用量子 h 则变成了两组完全不能确定的量，或者更准确地说，不能同时精确确定的量．

另一方面，由于有无穷多组解 $\mathrm{d}p$，$\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}E$，$\mathrm{d}t$ 满足方程(1.2.1)和(1.2.2)．因此，方程(1.2.1)和(1.2.2)是两个没有确定解的方程，即不确定方程．数学家通常将其简称为不定方程，而物理学家则称其为不确定关系．由于方程(1.2.1)和(1.2.2)的无穷多组不确定的可能解，完全是由于普朗克最小作用量 h 引起的，因此，我们将这种不确定性称为量子不确定性．由此，原本经典力学中位置 x 的可以精确确定的无穷小量 $\mathrm{d}x$，现在变成了位置 x 的任意不确定量；原本经典力学中动量 p 的可以精确确定的无穷小量 $\mathrm{d}p$，现在则变成了动量 p 的任意不确定量；原本经典力学中能量 E 的可以精确确定的无穷小量 $\mathrm{d}E$，现在则变成了能量 E 的任意不确定量；原本经典力学中时间 t 的可以精确确定的无穷小量 $\mathrm{d}t$，现在则变成了时间 t 的任意不确定量．如此一来，(1.2.1)和(1.2.2)两式中出现的微分形式 $\mathrm{d}p$，$\mathrm{d}E$，$\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}t$，已完全失去其原来的物理和数学意义，从而不再适合用来表示作用量的量子化公式(1.2.1)和(1.2.2)．因此，我们需用新的符号“Δ”来代替微分符号“d”，以表达其作用量的量子化以及由此所带来的相关物理量的量子不确定性．经过符号替换则