

APQI ASIA
POWER
QUALITY
INITIATIVE

“十二五”国家重点图书出版规划项目

现代电能质量技术丛书

电能质量数学分析方法

亚洲电能质量联盟中国合作组 组编
徐明荣 编著



中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

现代电能质量技术丛书

电能质量数学分析方法

亚洲电能质量联盟中国合作组 组编
徐明荣 编著



内 容 提 要

本书介绍了电能质量数学分析方法及相关应用,全书共8章,分别为概述、傅里叶变换与谐波分析、小波变换、矢量变换与瞬时无功功率理论、人工神经网络、蒙特卡洛方法、偏最小二乘回归方法在谐波发射水平评估中的应用、模糊数学在电能质量评估分析中的应用。

本书适合于从事电力工程和电力系统分析,电能质量分析、治理和标准制定的技术人员、工程师和企业管理者使用,也适合于高等院校电气工程专业的教师 and 研究生阅读参考,并可作为电力职业院校的培训教材。

图书在版编目(CIP)数据

电能质量数学分析方法 / 徐明荣编著; 亚洲电能质量联盟
中国合作组组编. —北京: 中国电力出版社, 2015.12
(现代电能质量技术丛书)
ISBN 978-7-5123-8168-1

I. ①电… II. ①徐… ②亚… III. ①电能-质量分
析-数学分析-分析方法 IV. ①TM60

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 197609 号

中国电力出版社出版、发行

(北京市东城区北京站西街 19 号 100005 <http://www.cepp.sgcc.com.cn>)

航远印刷有限公司印刷

各地新华书店经售

*

2015 年 12 月第一版 2015 年 12 月北京第一次印刷

710 毫米×980 毫米 16 开本 13 印张 172 千字

印数 0001—3000 册 定价 52.00 元

敬告读者

本书封底贴有防伪标签,刮开涂层可查询真伪
本书如有印装质量问题,我社发行部负责退换

版权专有 翻印必究

丛书前言

电能质量问题近年来受到更多的关注。究其缘由，想来有三：第一，大量的非线性和冲击性负荷的广泛应用，对供电系统电能质量造成了严重的污染，恶化了电气设备的电磁环境；第二，以微电子控制技术为核心的高度自动化和智能化设备极其敏感，抗扰度能力不足，对电能质量的要求越来越高；第三，伴随行业的发展，相关组织和单位举办了各类交流会议以及展览，吸引大量媒体关注报道电能质量。在这样的大背景下，电能质量问题从冷门慢慢热了起来。

行业的健康发展，离不开理论的指导和技术经验的交流分享。但是，国内关于电能质量的书籍不是很多，系列丛书更是没有。基于这样的现状，亚洲电能质量联盟中国合作组（简称合作组）发起编写“现代电能质量技术丛书”，这个倡议当时获得了业内很多专家学者的支持。大家共同推选了林海雪教授担当丛书的牵头人，中国电力出版社也欣然应允出版这套丛书，并作为重点图书报送国家新闻出版总署（现为国家新闻出版广电总局），获批列入“‘十二五’国家重点图书出版规划项目”。原计划两年内完成的这套丛书，因多位作者身体抱恙，直至今天才最终陆续付梓，真是好事多磨。

姗姗来迟的这套丛书，从不同的维度介绍了电能质量，以及相应的

测量与控制技术。以基本理论与方法为主的，有《电力系统中电磁现象和电能质量标准》和《电能质量数学分析方法》；以介绍现代测量与实用控制为主的，有《现代电能质量测量技术》和《电能质量实用控制技术》；还有以热点或新问题为主的，有《电气化铁路供电系统及其电能质量控制技术》、《分布式电源接入电网的电能质量》、《电网中电压暂降和短时间中断》、《电力系统直流干扰》及《交流配电系统的接地方式及过电压保护》。

这套丛书整体适合从事电能质量工作的工程师和管理人员作为理论和实践的指引，也适宜对于电能质量问题感兴趣的相关人士阅读，从不同的侧面了解电能质量问题及其影响。希望我们编著的这套丛书可以更好地促进电能质量知识及技能的传播，使读者有所收获，这也是合作组与作者最希望达到的效果。另外，丛书也将成为由合作组作为主办方之一，并由国家人力资源和社会保障部教育培训中心考核认证的“高级电能质量工程师”培训的指定参考书。

最后特别感谢美国国际铜专业协会对于亚洲电能质量联盟中国合作组编著丛书的大力支持，感谢牵头人林海雪教授多年来的辛勤工作，感谢所有丛书作者的认真与执著，感谢编辑们的耐心与信任，感谢丛书审稿专家们提出的建设性的意见和建议。亚洲电能质量联盟将继续努力耕耘，为读者带来更多的接地气的电能质量专著。

亚洲电能质量联盟秘书长 黄炜



本书前言

随着我国电力工业、国民经济和现代科学技术的飞速发展，电能质量问题正受到越来越多的关注。检测和分析是改善和提高电能质量的前提和依据。只有快速、准确地检测出电力系统中电能质量问题，并对它进行有效的分析，确定问题的类型、范围和产生原因，才能对其进行有效的控制和治理，而选用更有效、更精确和更快速的电能质量数学分析方法是其中关键之处。

鉴于广大从事电能质量工作的工程技术及研究人员迫切需要一本综合介绍电能质量数学分析方法及应用的书籍，作者通过广泛阅读国内外的文献资料，总结他人与自己在这方面的科研成果，并结合在“供电系统电能质量”课程教学方面多年积累下的经验，经过两年多的努力，完成了这本较系统地论述各种电能质量数学分析方法的书稿。本书内容丰富，涵盖了现代各种电能质量问题的多种数学分析方法，既有傅里叶变换、蒙特卡洛等经典的电能质量分析方法，又包括了小波变换、瞬时无功功率理论、人工神经网络以及模糊数学等新兴的各种数学方法，并且结合电能质量的实际问题给出了应用实例分析。通过本书的学习，读者可以了解分析和解决现代电能质量问题的各种数学方法，掌握它们的基本知识以及应用特点，并能针对具体的电能质量问题选用合理的数学分析方法，为电能质量研究打下坚实的基础，进

而具备从事电能质量研究和应用的能力。

作者在撰写本书的过程中，得到了华北电力大学肖湘宁教授、徐永海教授以及中国电力科学研究院林海雪教授级高工的关心和帮助，肖湘宁教授和林海雪教授还对本书进行了极为细致的审阅，提出了许多宝贵的意见，在此一并表示衷心感谢。

电能质量分析的数学方法有很多，许多学者也正在这方面做更多的研究，很多电能质量问题还需新的数学方法来解决，本书旨在抛砖引玉，书中不妥和疏漏之处在所难免，作者真诚地希望广大读者对本书的各个方面给予批评指正。

徐明荣

2015年1月

于华北电力大学

目 录

丛书前言

本书前言

1	概述	1
2	傅里叶变换与谐波分析	6
2.1	傅里叶变换	6
2.2	基于 FFT 的电力系统谐波分析	14
	参考文献	28
3	小波变换	30
3.1	小波变换的基本原理	30
3.2	小波变换与电能质量扰动识别	36
3.3	基于小波变换的谐波检测与分析	46
	参考文献	63
4	矢量变换与瞬时无功功率理论	66
4.1	矢量变换	66
4.2	瞬时功率理论的基础	72
4.3	基于瞬时无功功率的谐波检测	76
4.4	瞬时无功功率理论在电能质量分析中的其他应用	90
	参考文献	99
5	人工神经网络	101
5.1	人工神经网络的基本原理	101

5.2	神经网络在电力系统谐波分析中的应用	111
	参考文献	122
6	蒙特卡洛方法	125
6.1	蒙特卡洛方法的基本概念	125
6.2	蒙特卡洛方法在谐波合成中的应用	129
6.3	蒙特卡洛方法在电力系统可靠性评估中的应用	145
	参考文献	156
7	偏最小二乘回归方法在谐波发射水平评估中的应用	159
7.1	概述	159
7.2	偏最小二乘回归方法的基本原理	160
7.3	基于偏最小二乘回归方法的谐波发射水平评估研究	167
7.4	某 220kV 变电站谐波发射水平评估	176
	参考文献	180
8	模糊数学在电能质量评估中的应用	181
8.1	模糊数学的基础知识	181
8.2	基于模糊数学的电能质量评估与分析	185
8.3	算例分析	191
	参考文献	193
附录 A	基于瞬时无功功率理论的谐波检测仿真分析图	195

电能质量问题是指导致用电设备故障或不能正常工作的电压、电流或频率偏差。总体上讲，电能质量问题可分为稳态和暂态两大类。稳态电能质量问题源于连续出现的电力扰动，主要为负荷功率变化，持续时间较长，期间电压、电流变化较慢，它是电能质量的主要方面，影响范围广、程度深，主要包括频率偏差、电压偏差、供电可靠性、三相不平衡、谐波、间谐波以及电压波动与闪变等现象；暂态电能质量问题源于突然发生的电力扰动（如故障、大负荷投切等），一般持续时间短，但期间电压或电流严重偏离其额定值或理想波形，变化速率大，它主要包括电压暂降、电压暂升、短时间电压中断和各种暂态扰动等。

对于上述各种电能质量问题的研究，目前已有许多理论和数学分析方法，并取得了很好的成果。目前，国内外分析和评估电能质量的数学方法主要有：

（1）傅里叶变换（Fourier Transform）及其改进方法。

在电能质量分析领域，对于稳定变化的信号，最常使用的分析方法是傅里叶变换。作为经典的信号分析方法，傅里叶变换及其数字算法离散傅里叶变换（Discrete Fourier Transform, DFT）具有正交、完备等许多优点，而且有快速傅里叶变换（Fast Fourier Transform, FFT）这样的快速算法，因此，在电能质量分析中得到了广泛应用。

但 DFT 方法具有内在的时域加窗和频域采样特性，采样不同步时，会产生频谱泄漏和栅栏效应，导致检测出现误差，特别是相位误差和高次谐波参数检测误差大。而工程中严格实现同步采样十分困难，为减小

频谱泄漏和栅栏效应影响，提高检测精度，常采用加窗、插值及频谱校正等改进算法。

加窗插值法把时域被测函数与某种低旁瓣特性的窗函数相乘之后，再进行 DFT 和其他数据运算或处理。通过采用性能优良的窗函数，可降低旁瓣的幅值，有效抑制频谱泄漏；应用插值算法可消除栅栏效应对测量的影响，从而精确地测量电气信号参数。该算法不要求采样周期与被测信号周期严格同步，但它以较长的测量时间和较大的计算量为代价，检测结果实时性较差；同时需构造窗函数，使频谱分析变得复杂。

(2) 短时傅里叶变换 (Short-Time Fourier Transform, STFT)。

短时傅里叶变换又称加窗傅里叶变换 (Windowed Fourier Transform)，其基本思想是将信号划分为许多小的时间间隔，用傅里叶变换分析每一个时间间隔内的信号，以便确定该时间间隔内存在的频率。即将非平稳信号看作是一系列短时平稳信号的叠加，而短时性则通过时间窗来获得。短时傅里叶变换在一定程度上克服了标准傅里叶变换不具有局部分析能力的缺陷。

短时傅里叶变换的不足在于：当窗函数确定后，只能改变窗口的位置，而不能改变窗口的形状。对应一定的时刻，只能对其附近窗口内的信号进行分析，若选择的时间窗窄，则时间分辨率高，频率分辨率低；而如果为了提高频率分辨率使时间窗变宽，则短时平稳假设的近似程度便会变差。也就是说，短时傅里叶变换实质上是具有单一分辨率的分析，因此它只适合于分析特征尺度大致相同的过程，不适合分析多尺度过程和突变过程（如暂态电能质量现象）。而且这种方法的离散形式没有正交展开，难以实现高效算法。STFT 在扰动检测、谐波、间谐波、频率、电功率等参数估计中都有应用。

(3) 小波变换 (Wavelet Transform)。

小波变换是由 Morlet 于 1980 年在进行地震数据分析工作时创造的。它是一种窗口大小（即窗口面积）固定但其形状可改变的时频局部化分析方法。它不仅继承和发展了 STFT 局部化的思想，而且克服了 STFT

方法中窗口大小不随频率变化、缺乏离散正交基 (Orthogonal Base) 的缺点。原则上讲,传统上使用傅里叶分析的地方,都可以用小波分析取代。小波变换在低频部分具有较高的频率分辨率和较低的时间分辨率,而在高频部分具有较高的时间分辨率和较低的频率分辨率,所以被誉为“数学显微镜”。正是这种特性,使小波变换具有对信号的自适应性。小波变换还是一种多尺度分析,对时间序列过程从粗到细(从低分辨率到高分辨率)加以分析,既显示过程变化的全貌,又剖析局部变化特征。这些特点使得小波变换特别适合于突变信号和不平稳信号的分析,加之小波函数本身衰减很快,也属一种暂态波形,将其用于电能质量分析领域尤其是暂态电能质量扰动分析领域时,它表现出了 FFT、STFT 等方法所无法比拟的优点,因而得到了广泛的应用。

小波变换不仅在电能质量扰动的检测、定位、分类方面有很好的应用,其在频率、谐波、间谐波、闪变估计中的应用也引起了许多学者的关注。由于小波变换是以频带的方式处理频域信息且不需要整周期采样,故与傅里叶变换相比,在一定的条件下,可获得较为稳定的谐波检测结果。另外,电能质量监测信号中通常都含有噪声,噪声可能淹没信号的重要特征;对信号进行消噪预处理,是提高电能质量分析精度和准确度的常用手段。自 Donoho 等提出基于阈值的小波变换去除白噪声的方法之后,小波变换已在电力系统信号消噪中获得应用。

(4) 矢量变换和瞬时无功功率理论 (Instantaneous Reactive Power Theory)。

在电气工程中常用的矢量变换有 $\alpha\beta$ 变换、dq 变换、对称分量变换等。 $\alpha\beta$ 变换属于定子坐标系变换,它将交流电量从 abc 三相坐标变换到 $\alpha\beta$ 两相坐标,对于交变的工频信号,变换后的结果仍是频率不变交流分量,且变换后的两变量为正交分量。dq 变换又称为 Park 变换,属于转子坐标系变换,它将电量从静止的 abc 三相坐标变换到以同步角频率旋转的 dq 两相坐标,对于交变的工频信号,变换后的结果为两正交的直流分量。对称分量变换将三相不对称的电量,分解成三相对称的正

序、负序、零序分量；正序分量与负序分量相序相反，零序分量的三相量同相。在电能质量分析和控制中，往往通过矢量变换使问题得到简化。

在 $\alpha\beta$ 变换、 dq 变换的基础上，1983年，日本学者赤木泰文(H.Akagi)等提出瞬时无功功率理论，将三相电路各相电压和电流瞬时值变换到 $\alpha\beta$ 两相正交的坐标系上研究，并定义了三相电路瞬时有功功率、瞬时无功功率。瞬时无功功率理论主要用于有源电力滤波器中谐波和无功功率的实时检测。

(5) 神经网络 (Neural Networks, NN) 等人工智能 (Artificial Intelligence, AI) 技术。

人工智能是计算机研究和应用发展到一定阶段的产物，它研究的是怎样用机器模仿人脑从事推理、规划、设计、思考和学习等思维活动，解决迄今为止仍需由专家才能处理好的复杂问题。人工神经网络 (Artificial Neural Networks, ANN) 在电能质量分析中主要用于电网谐波参数的估计。另外，更多的工作是将神经网络、专家系统、模糊逻辑和遗传算法等人工智能方法应用于电能质量监测和评估、电能质量问题的诊断和分类等方面。

(6) 蒙特卡洛 (Monte Carlo) 方法。

蒙特卡洛方法又称随机抽样技巧或统计试验方法。其基本思想为：当所有求解的问题是某种事件出现的概率或者是随机变量的期望值时，可以通过某种“试验方法”得到这种事件出现的频率或者这个随机变数的平均值。当实验的次数足够多时，这个数可以很好地表示此事件出现的概率或期望值。蒙特卡洛方法在20世纪40年代以后得到迅速的发展和应用，在电能质量分析中主要用于谐波的合成分析以及电力系统可靠性评估等。

(7) 偏最小二乘法 (Partial Least-Squares)。

偏最小二乘法是构造回归方程的一种较新型的方法，它不但可以用于单变量的回归分析，而且可以用于多变量的回归分析。偏最小二乘算法集多元线性回归、典型相关分析和主成分分析的基本功能为一体，将

建模预测类型的数据分析方法与非模型式的数据认识有机地结合起来，可以同时实现回归建模、数据结构简化以及变量间相关性分析。该算法能有效地解决变量相关性给系统建模带来的误差，并且更易于辨识系统中的有用信息与噪声。用偏最小二乘算法可用来求解系统谐波阻抗、分析系统背景谐波并评估用户谐波发射水平等。

(8) 模糊数学。

由于电能质量的一些指标对问题的描述具有模糊性，很难用定量关系表示，模糊理论为解决这类问题的有效手段。目前，模糊数学理论在处理电能质量综合评估问题上，主要有模糊模式识别和模糊综合评价两种方法。模糊数学在解决电能质量的模糊性问题上具有明显的优势。但是，该方法在确定隶属度函数时，只能根据经验得到近似的隶属度函数，并且权重的确定也主要取决于人。因此，基于模糊数学的电能质量综合评估结果受人为主观因素的影响较大。

(9) 数学形态学 (Mathematical Morphology)。

数学形态学诞生于 1964 年，是由法国巴黎矿业学院的 G.Matheron 和 J.Serra 在积分几何研究成果的基础上创立的，是基于集合论的数学分支，现广泛应用于图像处理 and 信号分析等领域。在电能质量分析方面，数学形态学主要用于信号消噪、滤波及扰动检测。由数学形态学构成的形态滤波器提供了一种有效的非线性滤波技术，该滤波方法较线性滤波器有很好的优越性，可以更好地保留信号的有用信息。此外，通过各种形态变换的组合，可以从扰动信号中检测到扰动的起止时刻。

电能质量分析和评估的数学方法还有很多，许多学者也正在这方面做更多的研究。电能质量分析和评估是一项困难的工作，不同的电能质量问题有不同的分析方法，即使是同一种电能质量问题采用不同的分析方法，效果也有所不同。因此，了解和掌握各种电能质量分析的数学方法的基本知识以及它们的应用特点，对研究电能质量各种问题是很有帮助的。本书主要是介绍各种常见电能质量分析数学方法的基本理论以及它们在电能质量分析中的具体应用。

2

傅里叶变换与谐波分析

电能质量分析很重要的方面是对产生电能质量问题的信号进行分析与处理。信号分析的主要目的是寻找一种简单有效的信号变换方法,使信号所包含的重要特征能显现出来^[1-2]。傅里叶级数展开和傅里叶变换分析是刻画函数空间和进行数值计算的主要方法和有效的数学工具,许多常见的微分、积分和卷积运算在傅里叶变换下均可简化为一般的代数运算。傅里叶分析方法相当于光谱分析中的三棱镜,而信号 $f(t)$ 相当于一束白光,将 $f(t)$ “通过”傅里叶分析后可得到信号的“频谱”。傅里叶变换给出一个全新的频率时空来认识信号 $f(t)$,一方面可能使得在时域研究中的较复杂问题在频域中变得简单,从而简化其分析计算过程,另一方面能更好地揭示出频域中信号与系统的物理本质。傅里叶变换包含了连续信号的傅里叶变换和离散信号的傅里叶变换,内容非常丰富^[3-4]。本章先简要介绍一下连续傅里叶变换、离散傅里叶变换的基本概念以及离散傅里叶变换的快速算法 FFT(快速傅里叶变换),然后介绍短时傅里叶变换的概念及其应用特点,最后讨论它们在电能质量分析中的具体应用。

2.1 傅里叶变换

2.1.1 连续傅里叶变换

设 $f(t)$ 为一连续时间信号,若 $f(t)$ 满足狄利克雷条件及

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (2-1)$$

那么, $f(t)$ 的傅里叶变换存在, 并定义为

$$F(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2-2)$$

其反变换为

$$f(t) = \check{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} dt \quad (2-3)$$

$F(\omega)$ 是 ω 的连续函数, 称为信号 $f(t)$ 的频谱密度函数, 或简称为频谱, 它又可进一步分成实部和虚部、幅度谱和相位谱。即

$$F(\omega) = \text{Re}[F(\omega)] + i \text{Im}[F(\omega)] \quad (2-4)$$

$$|F(\omega)| = \sqrt{|\text{Re}[F(\omega)]|^2 + |\text{Im}[F(\omega)]|^2} \quad (2-5)$$

$$\theta(\omega) = \arctan \left\{ \frac{\text{Im}[F(\omega)]}{\text{Re}[F(\omega)]} \right\} \quad (2-6)$$

式中: $|F(\omega)|$ 称为幅度谱, $\theta(\omega)$ 称为相位谱。

2.1.2 离散傅里叶变换

为了计算傅里叶变换, 需要用数值积分, 即取 $f(t)$ 在 R 上的离散点上的值来计算这个积分。在实际应用中, 希望在计算机上实现信号的频谱分析及其他方面的处理工作, 对信号的要求是在时域和频域应是离散的, 且都是有限长。由此, 给出离散傅里叶变换 (DFT) 的定义。

给定实的或复的离散时间序列 x_0, x_1, \dots, x_{N-1} , 设该序列绝对可和, 即满足 $\sum_{n=0}^{N-1} |x_n| < \infty$, 则

$$X(k) = F[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} \quad k=0, 1, \dots, N-1 \quad (2-7)$$

被称为序列 $\{x(n)\}$ 的离散傅里叶变换 (DFT)。而

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi k}{N}n} \quad n=0, 1, \dots, N-1 \quad (2-8)$$

被称为序列 $\{X(k)\}$ 的逆离散傅里叶变换 (IDFT)。

式(2-8)中, n 相当于对时间域的离散化, k 相当于频率域的离散化, 且它们都是以 N 点为周期的; 而离散傅里叶序列 $\{X(k)\}$ 是以 2π 为周期的, 且具有共轭对称性。

式(2-7)和式(2-8)又可表示为

$$\begin{cases} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} & k=0, 1, \dots, N-1, W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \\ x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk} & n=0, 1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (2-9)$$

由此, 对于离散傅里叶序列 $\{X(k)\}$, 可以用矩阵的形式表述为

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(k) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W & \dots & W^k & \dots & W^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & W^k & \dots & W^{k^2} & \dots & W^{k(N-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & W^{N-1} & \dots & W^{(N-1)k} & \dots & W^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

离散傅里叶变换(DFT)是数字信号处理中最基本也是最常用的运算之一, 它涉及信号与系统的分析与综合这一广泛的信号处理领域。实际上其他许多算法, 如相关、滤波、谱估计等也都可化为DFT来实现。由式(2-9)可知, 求出 N 点 $X(k)$ 需要 N^2 次复数乘法, $N(N-1)$ 次复数加法。众所周知, 实现 1 次复数乘法需要 4 次实数相乘及 2 次实数相加, 实现 1 次复数加法则需要 2 次实数相加。当 N 很大时, 其计算量是相当可观的。例如, 若 $N=1024$, 则需要 1 048 576 次复数乘法, 即需要 4 194 304 次实数乘法, 所需时间过长, 难以“实时”计算。

2.1.3 快速傅里叶变换

快速傅里叶变换(FFT)算法最早由 J.W.Cooley 和 J.W.Tukey 于 1965 年提出, 他们巧妙地利用 W 因子的周期性和对称性, 导出了高效的快速算法, 即所谓的快速傅里叶变换(FFT)算法。FFT 并不是一种新的变换形式, 它只是 DFT 的一种快速算法, 它是利用指数函数的周期性、对称性和正交性, 将离散傅里叶变换的计算量显著减少的计算技术。FFT