国家哲学社会科学成果文库
NATIONAL ACHIEVEMENTS LIBRARY
OF PHILOSOPHY AND SOCIAL SCIENCES

反基础公理的逻辑研究

李娜 著

中国社会科学出版社

国家哲学社会科学成果文库

NATIONAL ACHIEVEMENTS LIBRARY
OF PHILOSOPHY AND SOCIAL SCIENCES

反基础公理的逻辑研究

李娜 著

中国社会科学出版社

图书在版编目(CIP)数据

反基础公理的逻辑研究／李娜著.—北京：中国社会科学出版社，2016.3
（国家哲学社会科学成果文库）
ISBN 978－7－5161－7631－3

Ⅰ.①反…　Ⅱ.①李…　Ⅲ.①逻辑学—研究　Ⅳ.①B81

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 028675 号

出 版 人　赵剑英
责任编辑　冯春凤
责任校对　董晓月
责任印制　戴　宽

出　　版　中国社会科学出版社
社　　址　北京鼓楼西大街甲 158 号
邮　　编　100720
网　　址　http://www.csspw.cn
发 行 部　010－84083685
门 市 部　010－84029450
经　　销　新华书店及其他书店

印刷装订　环球东方(北京)印务有限公司
版　　次　2016 年 3 月第 1 版
印　　次　2016 年 3 月第 1 次印刷

开　　本　710×1000　1/16
印　　张　20
字　　数　329 千字
定　　价　76.00 元

作者简介

李 娜 女，1958 年生，河南开封市人。研究方向：现代逻辑。中国逻辑学会会员。1978 年至 1982 年在河南大学数学系学习，获理学学士学位。1986 至 1989 年在中国科学院软件研究所学习，获理学硕士学位。现任南开大学哲学院逻辑教研室教授、博士生导师。主持多项省级或国家级社会科学研究项目；出版《数理逻辑的思想与方法》、《集合论含有原子的自然模型和布尔值模型》等学术专著，发表《GB 的布尔值模型》等多篇学术论文；获得教育部人文社会科学优秀成果二等奖 1 次、三等奖 1 次。

《国家哲学社会科学成果文库》出版说明

为充分发挥哲学社会科学研究优秀成果和优秀人才的示范带动作用，促进我国哲学社会科学繁荣发展，全国哲学社会科学规划领导小组决定自2010年始，设立《国家哲学社会科学成果文库》，每年评审一次。入选成果经过了同行专家严格评审，代表当前相关领域学术研究的前沿水平，体现我国哲学社会科学界的学术创造力，按照“统一标识、统一封面、统一版式、统一标准”的总体要求组织出版。

全国哲学社会科学规划办公室

2011年3月

前 言

一 研究的目的、意义及所使用的研究方法

在经典的公理集合论系统 ZFC 中，由于基础公理 FA（也称良基公理或正则公理）的存在，所以，这样的集合论，也称为良基集合论，它所描述的集合也称为良基集合。在 ZFC 中，由于基础公理 FA 是独立于 ZFC^-（$= ZFC - FA$）的其他公理的，所以，如果用反基础公理（或称非良基公理）代替基础公理 FA，那么 ZFC^- 中所有不依赖于 FA 的结果在非良基集合论中都成立。而这样的集合论，也称为非良基集合论，它的论域中既包含良基集合，又包含被基础公理排除掉的具有无穷 $\in$ 递降链或循环性质的非良基集合。由于具有循环性质的非良基集合（也称超集或奇异集合）的最大特点是具有性质：$\Omega \in \Omega$，即：包含其自身作元素，如：$\Omega = \{\Omega\}$。

然而，由于在哲学、逻辑学、数学、计算机科学、语言学、情境语义学、人工智能领域和认知科学中，存在着许许多多各种各样的循环现象和问题，而非良基集合，它们恰恰可以以一种明显的方式来刻画循环的现象和问题。因此，在集合论的发展中，用反基础公理替换基础公理也成为必然。反基础公理最早是由福蒂（M. Forti）和洪塞尔（F. Honsel）在他们 1983 年的一篇论文中给出的。现在这条公理被阿克采尔（P. Aczel）称作 AFA，并且阿克采尔还给出了一套建立各种各样循环现象模型的方法。

20 世纪 70 年代前后，互模拟（也称双仿）的概念几乎同时并且独立地在集合论、模态逻辑和计算机科学等领域中提出。在此之前，两个结构之间的关系只能用同态或者同构来衡量。然而，两个同态的结构中一个一定能嵌入到另一个之中。因此，它们形式上一个包含另一个。因之，本质上是相同

的。同构的结构不论是形式上还是本质上都被认为是相同的。于是人们希望有一个比同态或同构弱的概念。而互模拟不仅是一个比同态或同构弱的概念，同时还能保证两个结构之间相互模仿对方。特别地，“互模拟也是非良基集合论的核心概念。当人们把集合论的论域由良基集合扩充到非良基集合时，经典的外延公理在判断非良基集合之间的相等时无能为力。运用基于互模拟概念的强外延公理可以很好地解决这一问题”（《互模拟的一些基本性质》，《云南师范大学学报》（社科版），2010 年第 5 期，第 69 页）。今天，互模拟理论因为各种各样的目的被广泛地用在并发系统、函数语言、对象定位语言、类型论、数据类型、域论、数据库、编辑最优化、程序分析、证明工具等中。

然而，为公理集合论的 ZFC 系统建立模型，一直是公理集合论研究中的一个重要问题。20 世纪 90 年代以后，为集合论的含有各种反基础公理的公理系统建立模型，是公理集合论研究中的一个热点问题。因此，反基础公理的逻辑研究从理论上丰富了数理逻辑的重要分支——公理集合论刻画集合论模型的理论；丰富了 Barwise 等人关于用方程组研究反基础公理的理论，为现代逻辑的研究提供了证明论的工具，促进了逻辑学的发展。同时，用非良基集重新刻画模态逻辑，建立模态系统之间的互模拟关系，必将进一步促进数理逻辑与逻辑、哲学之间的相互渗透、相互融合。因此，这些工作都可能是在基础理论的层面上促进数学、逻辑学和哲学的发展。与此同时，这些工作对于我国这样一个对逻辑研究还比较薄弱的状况来说，无疑具有十分积极的意义。

本成果所采用的主要方法是：数理逻辑中构建模型的方法和代数的方法。

二　该成果的主要内容

《反基础公理的逻辑研究》一书分为三编。第Ⅰ编，是我承担的 2008 年度国家社会科学基金项目《超集、双仿以及在模态逻辑、计算机科学中的作用研究》（项目批准号：08BZX049）的最终研究成果的部分内容；第Ⅱ编，是我承担的 2011 年度天津市社会科学基金项目《基于方程组的反基础公理

AFA 以及应用研究》（项目批准号：TJZX11－007）的最终研究成果的部分内容；第Ⅲ编即附录，也是我承担的2008年度国家社会科学基金项目《超集、双仿以及在模态逻辑、计算机科学中的作用研究》（项目批准号：08BZX049）的最终研究成果的部分内容。因此，我将这三部分内容合并在一起，命名为《反基础公理的逻辑研究》。

《反基础公理的逻辑研究》的内容包括：

第Ⅰ编：为用图刻画的各种反基础公理系统（ZFC^- + AFA（或者SAFA、FAFA以及反基础公理家族$AFA^{\sim}$））建立不同的集论模型，从而证明各种反基础公理与ZFC^-的相对协调性。

第Ⅱ编：修正、完善并丰富了巴威斯（J. Barwise）等人用代数方法——方程组刻画的反基础公理——解引理的理论。

第Ⅲ编：包括两个附录。附录1——给出了结构之间的互模拟理论。附录2——给出了项目研究期间发表的四篇论文。

第Ⅰ编的主要内容如下：

为集合论的公理系统建立模型是公理集合论研究的一个重要问题。由于人们已经为经典的公理集合论系统ZFC建立了自然模型、可构成模型和布尔值模型以及含有原子的模型，因此，该成果在第Ⅰ编中为用图的方法刻画的反基础公理AFA（或者SAFA、FAFA以及反基础公理家族$AFA^{\sim}$）所构成的非良基集合论系统ZFC^- + AFA（或者SAFA、FAFA以及反基础公理家族$AFA^{\sim}$）建立了以下三种模型。

1. 以ZFC的布尔值模型V^B（B是一个完全的布尔代数）为基础，采用阿克采尔的方法，构建了阿克采尔的非良基集合论公理系统ZFC^- + AFA的一种模型。在此基础上，构建了由反基础公理家族$AFA^{\sim}$所构成的非良基集合论公理系统ZFC^- + $AFA^{\sim}$的模型，并由此构建了斯科特（D. Scott）的非良基集合论公理系统ZFC^- + SAFA和费斯勒（P. Finsler）的非良基集合论公理系统ZFC^- + FAFA的模型。

2. 在可构成公理V = L的假设下，利用ZFC的可构成模型L，采用阿克采尔的方法，构建了阿克采尔的非良基集合论公理系统ZFC^- + AFA的一种模型，在此基础上，构建了由反基础公理家族$AFA^{\sim}$所构成的非良基集合论公理系统ZFC^- + $AFA^{\sim}$的模型，并由此构建了斯科特的非良基集合论公理系

统 $V = L + ZFC^- + SAFA$ 和费斯勒的非良基集合论公理系统 $V = L + ZFC^- + FAFA$ 的模型。

3. 利用 $ZFC + A$（A 断言：存在原子的集合）含有原子的集合 A 的模型 $V(A)$，采用阿克采尔的方法，构建了阿克采尔的非良基集合论公理系统 $ZFC^- + A + AFA$ 的一种模型，在此基础上，构建了由反基础公理家族 $AFA^{\sim}$ 所构成的非良基集合论公理系统 $ZFC^- + A + AFA^{\sim}$ 的模型，并由此构建了斯科特的非良基集合论公理系统 $ZFC^- + A + SAFA$ 和费斯勒的非良基集合论公理系统 $ZFC^- + A + FAFA$ 的模型。

第Ⅱ编的主要内容如下：

巴威斯等人用代数方法（方程组）所刻画的反基础公理——解引理 AFA 断言：平坦方程组有唯一解。然而，当平坦方程组是 $x = \{x\}$ 时，

$\Omega = \{\{\{\{\cdots\{\{\varnothing\}\}\cdots\}\}\}\}$，（这里省略号…表示有无穷多层括号）

和

$\Omega' = \{\{\{\{\cdots\{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\cdots\}\}\}\}$，（这里省略号…表示有无穷多层括号）

都满足 $\Omega = \{\Omega\}$ 并且 $\Omega' = \{\Omega'\}$。也就是说，Ω 和 Ω' 都是集合方程组 $\{x\}$ 的解，但是，$\Omega \neq \Omega'$。这与巴威斯的假设平坦方程组有唯一解不一致。

为了使巴威斯等人的解引理 AFA 更符合直观，该成果基于线性方程组及解结构的思想，将巴威斯等人的平坦方程组划分为齐次平坦方程组和（巴威斯－型的）平坦方程组，并假设齐次平坦方程组有解，假设（巴威斯－型的）平坦方程组有唯一解。这样一来，$x = \{x\}$ 是齐次平坦方程组，根据假设，$x = \{x\}$ 有解而不是唯一解。因此，本篇利用齐次线性方程组和方程组之间的关系以及它们解之间的关系，完成了下面的工作：

1. 定义了齐次平坦方程组并给出了它的解引理 LAFA：每个齐次平坦方程组都有一个解。然后，在齐次平坦方程组的基础上，定义了（巴威斯－型的）平坦方程组，并给出了它的解引理 AFA：A（原子的集合）上的每个（巴威斯－型的）平坦方程组都有一个唯一解。最后，给出（巴威斯－型的）平坦方程组的一种推广形式——一种广义的平坦方程组。

2. 定义了两个齐次平坦方程组之间的互模拟；给出并证明如果两个或两个以上的齐次平坦方程组有相同解，那么这两个或两个以上的齐次平坦方

程组是互模拟的；在此基础上证明了（巴威斯－型的）平坦方程组有相同解的充分必要条件；给出并证明了以 A 为相同原子集的两个广义方程组之间互模拟的一些基本性质；利用方程组之间互模拟的这些基本性质（不用解引理）证明了广义的（巴威斯－型的）平坦方程组上的极大互模拟是一个等价关系。

3. 定义了一种广义的齐次方程组；在此基础上，定义了广义的方程组并给出了相应的解引理；最后证明了：在 ZFC^- 中，AFA 等价于每个广义方程组有一个唯一的解。

4. 证明了基于方程组的反基础公理——解引理 AFA 与 ZFC^- 的相对协调性。

5. 证明了每个图有一个装饰等价于每个齐次平坦方程组有一个解。

6. 证明了（巴威斯－型的）平坦方程组有唯一的解等价于 A 上的每个图有唯一的装饰。

7. 定义了费斯勒－齐次平坦方程组；同时给出了费斯勒－齐次平坦方程组的解引理 LFAFA；证明了费斯勒－齐次平坦方程组的解引理与费斯勒－图的反基础公理的等价性。

8. 证明了费斯勒－平坦方程组的解引理与 A 上的每个费斯勒－图的反基础公理的等价性。

9. 定义了一种不依赖于代入规则的齐次崎岖方程组以及崎岖方程组，给出了它们的解引理，并表明：不用代入，用集合的累积层也能使我们处理一些较复杂的方程组。

第Ⅲ编的主要内容如下：

该成果在附录 1 中完成了下面的工作：

1. 在两个框架之间，给出一种比同态弱的概念——满模拟，并在这种定义下证明了两个结构之间的一些保持性。如：传递性、确定性和持续性等。

2. 在两个框架之间，给出一种比同构弱的概念——互模拟，并在这种定义下证明了两个结构之间的一些不变性。如：自返性、等价性等。

在附录 2 中给出了四篇（与我的学生合作）已发表的论文，但稍有改动。其中：

1.《集合论的反基础公理》(《哲学动态》, 2009 年第 1 期) 一文主要从图和方程组两个方面介绍了反基础公理以及由反基础公理所产生的非良基集合论在哲学、逻辑学、语言学等领域中的应用。

《论基础公理与反基础公理》(《逻辑学研究》, 2013 年第 2 期) 一文在“循环并不可恶”(张清宇,《循环并不可恶》,《哲学动态》, 2005 年第 4 期, 第 59 页) 的基础上讨论基础公理和反基础公理。第一, 指出基础公理原本就是一条有争议的公理; 第二, 说明了基础公理的局限性; 第三, 详细论述了反基础公理家族中的三个成员, 并给出了它们两两不相容的一个证明; 第四, 分析了反基础公理导致集合论域在 $V = WF$ 上不断扩张的方法, 并指出这种扩张的方法与数系扩张的方法相同; 最后结论: 在 ZFC^- 中, 加入基础公理 FA, 使得 ZFC 公理系统不仅排除了 $a = \{a\}$ 这类集合, 而且对于刻画康托尔的集合论也是足够的。特别的, ZFC 公理集合论对整个 20 世纪集合理论的发展起着重要的作用。它不仅为数学基础的研究提供了一种较为方便的语言和工具, 而且几乎使所有基本的数学概念都能用集合论的语言来描述。数学定理也大都可以在 ZFC 系统内得到证明。在 ZFC^- 中, 加入反基础公理 AFA (或者 FAFA 或者 SAFA) 等, 使得 $ZFC^- + AFA$ (或者 FAFA 或者 SAFA) 公理系统为解释各种循环现象提供了一套方便的语言和工具。而 ZFC 和 $ZFC^- + AFA$ (或者 ZFC 和 $ZFC^- + FAFA$ 或者 ZFC 和 $ZFC^- + SAFA$) 之间的关系, 正像在平面几何学中的情况那样, 如果我们承认欧几里得几何学的第五平行公设: 过直线外一点能而且只能做出一条直线与已知直线平行, 那么在这个体系下可以得到: 三角形的内角和等于 180°。如果将欧几里得第五平行公设更换为罗巴切夫斯基的平行公设: 通过直线外的每一点至少有两条直线与已知直线共面不交, 那么就得到了不同于欧几里得几何学的非欧几何学体系。在这种体系下可以得到: 三角形的内角和小于 180°。然而, 如果我们把欧几里得第五平行公设更换为黎曼的平行公设: 同一平面上的任何两条直线一定相交, 那么就得到了不同于罗巴切夫斯基几何学的非欧几何学体系。在这种体系下, 三角形的内角和大于 180°。在 ZFC 中, 罗素所构造的 T 不是集合, 人们称它为真类。然而, 在 $ZFC^- + AFA$ 中, 罗素所构造的 T 是集合。因此, ZFC 和 $ZFC^- + AFA$ 之间的关系也就不足以为奇。我们相信, 非良基集合论理论的创立, 不仅

将打破经典的 ZFC 集合论的一统天下，而且也将从根本上革新和拓广人们对集合的认识。这也势必促使人们对集合理论进行更深入的研究。同时，我们还相信，随着人们对集合理论的深入研究，它也将对其他理论观念的革新起到重大的推进作用，它也必将会在更多的领域中起到重要的作用。因此，良基集合理论（ZFC）与非良基集合理论（ZFC^- + AFA（或者 ZFC 和 ZFC^- + FAFA 或者 ZFC 和 ZFC^- + SAFA））之间的关系类似于欧几里得几何学与非欧几何学之间的关系。

2. 在 20 世纪 80 年代左右，人们在计算机科学、模态逻辑和集合论中大体上是同时并且独立地发现了互模拟。无论是在计算机科学中，还是在模态逻辑和集合论中，互模拟都是通过对代数结构之间态射概念进行提炼而产生的。最基本的态射形式是同态，它给予了我们把一个结构（源结构）嵌入另一个结构（目标结构）的方式，使得源结构中的所有关系保持在目标结构中。然而，它的逆不一定成立；鉴于此，需要更强的态射概念。而常用的一个这样的概念是同构，然而同构的概念又太强，因为同构的结构本质上和形式上都是相同的。于是，人们希望有一个介于同态和同构之间的概念，在这一探索过程中，互模拟被引入。因此，《互模拟的一些基本性质》（《云南师范大学学报》（社科版），2010 年第 5 期）一文首先简单介绍了互模拟产生的原因及作用；其次，给出了两个加标转换系统之间的互模拟定义，并说明由此定义如何得到计算机科学中、模态逻辑中以及集合论中互模拟的定义；最后，证明了在这种定义下，互模拟的一些基本性质。

3. 论文《解悖方法研究近况》（《哲学动态》，2011 年第 11 期）主要介绍了以说谎者悖论为代表的语义悖论在 20 世纪 90 年代中期以来，一些学者在“解悖”方法上做的新的尝试。即：介绍了反基础模型论方法、语境图方法和其他学者在“解悖”方法上所做的工作。

本文指出：悖论问题从古至今就是逻辑学研究的难题之一。如果从公元前 6 世纪的“说谎者命题”算起，迄今为止，悖论研究已经有 2600 多年的历史。“逻辑学家憎恨歧义但是喜欢悖论”（Jon Barwise and John Etchemendy. The Liar：An Essay on Truth and Circularity. Oxford：Oxford University Press，1987：3.），或许这就是 2000 多年来众多学者孜孜不倦地研究悖论的原因。20 世纪 90 年代中期以来，国外学者巴威斯、沃克、莫德林等人

提出的“解悖”新方法，开启了悖论研究的新视角，也为国内学者研究悖论问题提供了新思路。一种新的“解悖”方法的出现，在某种程度上要依托于新的技术，随着数学、语言学、哲学、逻辑学、计算机科学等相关学科的发展，可以断定，日后还会有新的“解悖”方法出现。随着解悖方法的不断更新和运用，这对逻辑学，特别是逻辑哲学的进一步发展必将起到更大的促进作用。

三 该成果的学术创新

第Ⅰ编的学术创新如下：

为集合论的公理系统建立模型是公理集合论研究的一个重要问题。由于人们已经为经典的公理集合论系统 ZFC 建立了自然模型、可构成模型和布尔值模型以及含有原子的模型，因此，该成果在第Ⅰ编中为用图的方法刻画的反基础公理 AFA（或者 SAFA、FAFA 以及反基础公理家族 $AFA^{\sim}$）所构成的非良基集合论系统 $ZFC^{-}+AFA$（或者 SAFA、FAFA 以及反基础公理家族 $AFA^{\sim}$）建立了以下三种模型。

1. 以 ZFC 的布尔值模型 V^{B}（B 是一个完全的布尔代数）为基础，采用阿克采尔的方法，构建了阿克采尔的非良基集合论公理系统 $ZFC^{-}+AFA$ 的一种模型。在此基础上，构建了由反基础公理家族 $AFA^{\sim}$ 所构成的非良基集合论公理系统 $ZFC^{-}+AFA^{\sim}$ 的一种模型，并由此构建了斯科特（D. Scott）的非良基集合论公理系统 $ZFC^{-}+SAFA$ 和费斯勒（P. Finsler）的非良基集合论公理系统 $ZFC^{-}+FAFA$ 的一种模型。

2. 在可构成公理 $V=L$ 的假设下，利用 ZFC 的可构成模型 L，采用阿克采尔的方法，构建了阿克采尔的非良基集合论公理系统 $ZFC^{-}+AFA$ 的一种模型，在此基础上，构建了由反基础公理家族 $AFA^{\sim}$ 所构成的非良基集合论公理系统 $ZFC^{-}+AFA^{\sim}$ 的一种模型，并由此构建了斯科特的非良基集合论公理系统 $V=L+ZFC^{-}+SAFA$ 和费斯勒的非良基集合论公理系统 $V=L+ZFC^{-}+FAFA$ 的一种模型。

3. 利用 $ZFC+A$（A 断言：存在原子的集合）含有原子的集合 A 的模型 V（A），采用阿克采尔的方法，构建了阿克采尔的非良基集合论公理系统

$ZFC^- + A + AFA$ 的一种模型，在此基础上，构建了由反基础公理家族 $AFA^\sim$ 所构成的非良基集合论公理系统 $ZFC^- + A + AFA^\sim$ 的一种模型，并由此构建了斯科特的非良基集合论的公理系统 $ZFC^- + A + SAFA$ 和费斯勒的非良基集合论公理系统 $ZFC^- + A + FAFA$ 的一种模型。

第Ⅱ编的学术创新如下：

巴威斯等人用代数方法（方程组）所刻画的反基础公理——解引理 AFA 断言：平坦方程组有唯一解。然而，当平坦方程组是 $x = \{x\}$ 时，

$\Omega = \{\{\{\{\ldots\{\{\varnothing\}\}\ldots\}\}\}\}$（这里省略号表示有无穷多层括号）

和

$\Omega' = \{\{\{\{\ldots\{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\ldots\}\}\}\}$（这里省略号表示有无穷多层括号）

都满足 $\Omega = \{\Omega\}$ 并且 $\Omega' = \{\Omega'\}$。也就是说，Ω 和 Ω' 都是集合方程组 $x = \{x\}$ 的解，但是，$\Omega \neq \Omega'$。这与巴威斯的假设平坦方程组有唯一解不一致。

为了使巴威斯等人的解引理 AFA 更符合直观，该成果基于线性方程组及解结构的思想，将巴威斯等人的平坦方程组划分为齐次平坦方程组和（巴威斯-型的）平坦方程组，并假设齐次平坦方程组有解，假设（巴威斯-型的）平坦方程组有唯一解。这样一来，$x = \{x\}$ 是齐次平坦方程组，根据假设，$x = \{x\}$ 有解而不是唯一解。因此，本篇利用齐次线性方程组和方程组之间的关系以及它们解之间的关系，完成了下面的工作：

1. 定义了齐次平坦方程组并给出了它的解引理 LAFA：每个齐次平坦方程组都有一个解。然后，在齐次平坦方程组的基础上，定义了（巴威斯-型的）平坦方程组，并给出了它的解引理 AFA：A（原子的集合）上的每个（巴威斯-型的）平坦方程组都有一个唯一解。最后，给出平坦方程组的一种推广形式——一种广义的平坦方程组。

2. 定义了两个齐次平坦方程组之间的互模拟；给出并证明了如果两个或两个以上的齐次平坦方程组有相同解，那么这两个或两个以上的齐次平坦方程组是互模拟的；在此基础上证明了（巴威斯-型的）平坦方程组有相同解的充分必要条件；给出并证明了以 A 为相同原子集的两个广义方程组之间互模拟的一些基本性质；利用方程组之间互模拟的这些基本性质（不用

解引理）证明了以 A 为原子的广义平坦方程组上的极大互模拟是一个等价关系。

3. 定义了一种广义的齐次方程组；在此基础上，定义了广义的方程组并给出了相应的解引理；最后证明了：在 ZFC^- 中，AFA 等价于每个广义方程组有一个唯一的解。

4. 证明了基于方程组的反基础公理——解引理 AFA 与 ZFC^- 的相对协调性。

5. 证明了每个图有一个装饰等价于每个齐次平坦方程组有一个解。

6. 证明了（巴威斯－型的）平坦方程组有唯一的解等价于 A 上的每个图有唯一的装饰。

7. 定义了费斯勒－齐次平坦方程组；同时给出了费斯勒－齐次平坦方程组的解引理 LFAFA；证明了费斯勒－齐次平坦方程组的解引理与费斯勒－图的反基础公理的等价性。

8. 证明了费斯勒－平坦方程组的解引理与 A 上的每个费斯勒－图的反基础公理的等价性。

9. 定义了一种不依赖于代入规则的齐次崎岖方程组以及崎岖方程组，给出了它们的解引理，并表明：不用代入，用集合的累积层也能使我们处理一些较复杂的方程组。

第Ⅲ编的学术创新如下：

1. 在两个框架之间，给出一种比同态弱的概念——满模拟，并在这种定义下证明了两个结构之间的一些保持性。

2. 在两个框架之间，给出一种比同构弱的概念——互模拟，并在这种定义下证明了两个结构之间的一些不变性。

3. 给出一种能够刻画计算机科学、模态逻辑和集合论中互模拟概念的一个统一定义，并在这种定义下证明了：互模拟的一些基本性质。

四　该成果的应用价值

（一）进一步完善和丰富了逻辑学理论

集合论是一种为带结构的对象构造模型的最灵活的工具。20 世纪初，

由于罗素用康托尔集合论中的基本概念“$\in$”构造了类 $T=\{x \mid x \notin x\}$，而 T 中的元素具有自己不属于自身的性质。由此导致了矛盾，这个矛盾被称为罗素悖论。罗素悖论的出现引起了许多数学家的震惊，也由此引起了数学的第三次危机。为了排除悖论，集合论学者们用公理化的方法对康托尔的集合论进行了修正，建立了许多严谨的集合论系统，在整个 20 世纪中应用最广泛的就是 ZFC 公理集合论。由于 ZFC 公理集合论中存在基础公理（或称正则公理或称良基公理），基础公理断言：ZFC 公理集合论中的集合都是良基的（即：非循环的和非无穷递降的），由此直接排除了循环的类，也排除了所有非良基集合。而非良基集合论是在 ZFC 的基础上，去掉基础公理，引入反基础公理得到的。它的方法是扩大 ZFC 公理集合论的论域，将$\Omega=\{\Omega\}$等视为集合，即：将那些具有循环性质和具有无穷递降的对象也作为集合，从而为循环的理论建立了集合论模型。1988 年阿克采尔利用图来刻画非良基集合并研究了反基础公理 AFA。1989 年巴威斯等人利用方程组来刻画非良基集合并研究了反基础公理 AFA。本成果的工作无疑丰富和完善了非良基集合理论。

（二）促进了集合论与模态逻辑与计算机科学理论之间的相互渗透和相互融合

20 世纪 70 年代，互模拟的概念几乎同时出现在集合论、模态逻辑和计算机科学中。本成果给出了一种能够刻画集合论、模态逻辑和计算机科学中互模拟概念的统一定义，并在这种定义下证明了：互模拟的一些基本性质。另外，借助代数结构的思想，在两个框架之间，给出了一种比满同态弱的概念——满模拟，并在这种定义下证明了两个结构之间的一些保持性；在两个框架之间，给出一种比同构弱的概念——互模拟，并在这种定义下证明了两个结构之间的一些不变性。这些工作不仅促进了逻辑学各分支理论相互渗透和相互融合，并可能是在最基础的层面上，促进了逻辑学、数学、哲学以及计算机科学的发展。

（三）为哲学、人工智能理论、计算机科学、认知科学和语言学等领域的研究提供工具

近 30 年来，循环现象已经引起了哲学、人工智能理论、计算机科学、认知科学、语言学和哲学等领域中研究者的广泛重视。在这些领域中，非良

基集的模型可以很方便地为循环现象建立模型。如，应用平坦方程组的解引理 AFA 消解悖论；应用图刻画的反基础公理建立了程序语言语义的一种数学方法，即计算程序进程的终结代数语义。因此，该成果的研究为人工智能理论、计算机科学、认知科学、语言学和哲学等领域的研究提供了更方便、更简洁的工具。