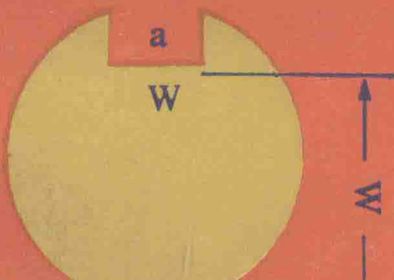
国外中学生数学竞赛试题选编

项昭义　屠新民



河南教育出版社

国外中学生数学竞赛试题选编

项昭义　屠新民

河南教育出版社

国外中学生数学竞赛试题选编
项昭义　屠新民
责任编辑　侯耀宗
河 南 教 育 出 版 社 出 版
河南第二新华印刷厂(联)印刷
河 南 省 新 华 书 店 发 行
787×1092毫米32开本 14.875印张 313千字
1992年11月第1版 1992年11月第1次印刷
印数1—4,505册
ISBN7-5347-1123-1/G·935
定 价 4.35元

序 言

在中学数学竞赛蓬勃发展的今天，我们把这本小册子奉献给广大中学数学爱好者，也算作我们为中学数学竞赛园地里增添了一朵小花，一片绿叶！

我们尽搜了近五年散见于国内外中学数学杂志中的各国数学奥林匹克试题，以时间为顺序，编汇成册，其中有亚洲太平洋地区、澳大利亚、保加利亚(友谊杯)、捷克、加拿大、英国、法国、芬兰、德国(前民主德国、西德)、匈牙利、国际数学奥林匹克(IMO)，爱尔兰、日本、印度、印度尼西亚、马来西亚、新西兰、荷兰、新加坡、波兰、罗马尼亚、苏联、西班牙、瑞士、瑞典和美国等25个国家和地区，虽然未臻完美，但也足具代表性了！

苏联的中学生数学竞赛有全苏的，全俄罗斯的，还有莫斯科的．美国的中学生数学竞赛有中学数学竞赛（AHSME)，数学邀请赛(AIME)，数学奥林匹克(USAMO)，以及地区性竞赛——如Math—Comnst数学竞赛，等等．苏美的竞赛资料都很丰富，为了篇幅的限制，我们只选了苏联莫斯科的，美国中学数学竞赛(AHSME)也只选了1987年的，其余的只好忍痛割爱.

不容置疑，这些竞赛试题大多出自各国数学名家之手，具有新颖性和典型性，并且闪耀着命题者创造性思维的火花！譬

如1986年的第27届IMO试题的第2题，即是我国著名数学家、中国科技大学常庚哲教授编拟的. 不论是题目本身结构的精巧性或者是证明过程的完美性，都充分反映了命题者的高超数学水平！

在我们阅读这些数学题目及解答过程时，常常惊叹数学大花园中这些抽象思维之花，是如此的赏心悦目！恰如走在山阴道上，四周风光目不暇接！

我们真诚希望，这本小册子能够成为准备参加数学竞赛而潜心钻研的同学们的益友，同时还能够成为辅导数学竞赛的中学数学教师的一份有用资料. 并真诚盼望阅读这本小册子的朋友们不吝赐教.

最后，我们衷心感谢河南省实验中学高级教师周耀春同志为本书绘制了精美图形.

项昭义　屠新民

郑州，1991，5，24.

目　录

序　　言……………………………………………（1）

试题部分

加拿大数学竞赛试题(1986年)……………………（1）

民主德国奥林匹克数学竞赛试题(1986年)………（2）

联邦德国数学竞赛(第一轮)试题…(1986年)……（3）

第27届国际数学奥林匹克试题……………………（3）

第20届全苏中学生数学奥林匹克试题……………（5）

第12届全俄中学生数学竞赛试题…………………（9）

第12届全俄数学奥林匹克第三阶段试题…………（11）

第4届美国数学邀请赛试题………………………（13）

第15届美国奥林匹克数学竞赛试题………………（16）

加拿大数学竞赛试题(1987年)……………………（17）

第28届国际数学奥林匹克试题……………………（18）

第27届荷兰数学竞赛题……………………………（19）

新加坡数学会中学数学竞赛试题(1987年)………（20）

第21届全苏中学生数学奥林匹克试题……………（23）

第13届全俄中学生数学竞赛试题…………………（26）

第13届全俄中学生数学奥林匹克第三阶段试题……（29）

第38届美国中学竞赛试题…………………………（31）

第5届美国数学邀请赛(AIME)试题………………（38）

第16届美国数学奥林匹克竞赛试题………………（41）

加拿大数学奥林匹克试题(1988年)……………………(42)
第2届“友谊杯”国际数学竞赛试题………………(43)
联邦德国数学竞赛(第一轮)试题(1988年)…………(45)
第29届国际奥林匹克数学竞赛试题…………………(46)
新加坡数学会中学数学竞赛试题(1989年)…………(47)
第22届全苏中学生数学奥林匹克试题………………(51)
第14届全俄中学生数学竞赛试题……………………(55)
第14届全俄中学生数学奥林匹克第三阶段试题……(57)
第6届美国数学邀请赛(AIME)试题……………(60)
美国数学奥林匹克试题(1988年)……………………(62)
美国Mathcounts数学竞赛试题(1988年)…………(63)
第1届亚洲太平洋地区数学竞赛试题………………(65)
澳大利亚数学竞赛试题(1989年)……………………(66)
加拿大数学奥林匹克试题(1989年)…………………(67)
捷克和斯洛伐克数学奥林匹克试题(1989年)………(68)
第30届国际数学奥林匹克试题………………………(69)
爱尔兰数学竞赛第二轮试题(1989年)………………(70)
新加坡数学竞赛试题(1989年)………………………(73)
第23届全苏中学生数学奥林匹克试题………………(77)
第52届莫斯科数学奥林匹克试题……………………(81)
第15届全俄中学生数学奥林匹克试题………………(84)
第7届美国数学邀请赛(AIME)试题……………(87)
第18届美国数学奥林匹克(USAMO)试题………(90)
第2届亚太地区数学竞赛试题…………………………(91)
加拿大数学竞赛试题(1990年)………………………(92)
第7届巴尔干地区数学竞赛试题……………………(93)

第31届国际数学奥林匹克试题……………………………（94）
'90(IMO)日本代表选拔赛试题 ……………… … …（95）
第16届全俄中学生数学竞赛试题……………………………（98）
第16届全俄中学生数学竞赛第三阶段试题………………（102）
第 8 届美国数学邀请赛(AIME)试题 …… … … …（103）
第19届美国数学奥林匹克试题………………………………（106）

解答部分

加拿大数学竞赛试题(1986年)解答…………………………（108）
民主德国奥林匹克数学竞赛试题(1986年)解答……（111）
联邦德国数学竞赛试题(1986年)解答……………………（114）
第27届国际数学奥林匹克试题解答…………………………（116）
第20届全苏中学生数学奥林匹克试题解答………………（123）
第12届全俄中学生数学竞赛试题解答……………………（143）
第12届全俄数学奥林匹克第三阶段试题解答…………（151）
第 4 届美国数学邀请赛试题解答…………………………（158）
第15届美国奥林匹克数学竞赛试题解答…………………（167）
加拿大数学竞赛试题(1987年)解答…………………………（172）
第28届国际数学奥林匹克试题解答…………………………（175）
第27届荷兰数学竞赛题解答……………………………………（180）
新加坡数学会中学数学竞赛试题(1987年)解答……（185）
第21届全苏中学生数学奥林匹克试题解答………………（190）
第13届全俄中学生数学竞赛试题解答……………………（205）
第13届全俄中学生数学奥林匹克第三阶段试题
解答……………………………………………………………（213）
第38届美国中学数学竞赛试题解答………………………（221）
第 5 届美国数学邀请赛(AIME)试题解答 …… …（224）

第16届美国数学奥林匹克竞赛试题解答……………（229）
加拿大数学奥林匹克试题(1988年)解答……………（236）
第2届"友谊杯"国际数学竞赛试题解答………（240）
联邦德国数学竞赛(第一轮)试题(1988年)解答……（245）
第29届国际奥林匹克数学竞赛试题解答……………（251）
新加坡数学会中学数学竞赛试题(1988年)解答……（260）
第22届全苏中学生数学奥林匹克试题解答…………（266）
第14届全俄中学生数学竞赛试题解等………………（286）
第14届全俄中学生数学奥林匹克第三阶段
试题解答…………………………………………（294）
第6届美国数学邀请赛(AIME)试题解答………（304）
美国数学奥林匹克试题(1988年)解答………………（314）
美国Mathcounts数学竞赛试题(1988年)解答……（318）
第1届亚洲太平洋地区数学竞赛试题
解答……………………………………………（321）
澳大利亚数学竞赛试题(1989年)解答………………（325）
加拿大数学奥林匹克试题(1989年)解答……………（329）
捷克和斯洛伐克数学奥林匹克试题(1989年)解答…（331）
第30届国际数学奥林匹克试题解答…………………（339）
爱尔兰数学竞赛第二轮试题(1989年)解答…………（344）
新加坡数学竞赛试题(1989年)解答…………………（353）
第23届全苏中学生数学奥林匹克试题解答…………（355）
第52届莫斯科数学奥林匹克试题简解………………（373）
第15届全俄中学生数学奥林匹克试题解答…………（378）
第7届美国数学邀请赛(AIME)试题解答………（393）
第18届美国数学奥林匹克(DUSAMO)试题解答…（402）

第 2 届亚太地区数学竞赛试题解答……………………(405)
加拿大数学竞赛试题(1990年)解答……………………(409)
第 7 届巴尔干地区数学竞赛试题解答…………………(413)
第31届国际数学奥林匹克试题解答……………………(416)
'90(IMO)日本代表选拔赛试题解答…………………(428)
第16届全俄中学生数学竞赛试题解答…………………(438)
第16届全俄中学生数学竞赛第三阶段试题解答……(449)
第 8 届美国数学邀请赛(AIME) 试题解答…………(453)
第19届美国数学奥林匹克试题解答……………………(461)

试题部分

加拿大数学竞赛试题（1986年）

1.如图1，$AB=CD=1$，$\angle ABC=90°$，$\angle CBD=30°$，求AC的长.

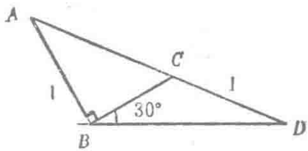


图1

2．有一种体育竞赛共含M个项目，有运动员A，B,C参加，在每一项目中，第一，二，三名分别得p_1，p_2，p_3分，其中p_1，p_2，p_3为正整数且$p_1>p_2>p_3$．最后A得22分，B与C均得9分，B在百米赛中取得第一．求M的值，并问在跳高中谁取得第二名。

3．定长的弦ST在一个以AB为直径的半圆周上滑动．M是ST的中点，P是S对AB作垂线的垂足．求证：不管ST滑到什么位置，$\angle SPM$是一定角.

4．对于正整数m与k，定义

$$F(n,k)=\sum_{r=1}^{n}r^{2k-1}$$

求证：$F(n,1)$可整除$F(n,k)$。

5．设u_1，u_2，u_3，…是一整数列，适合递推关系

$$u_{n+2}=u_{n+1}{}^2-u_n.$$

设$u_1=39$，$u_2=45$。求证：1986可整除这数列的无穷多项。

民主德国奥林匹克数学竞赛试题（1986年）

1．四边形$ABCD$如图1，求证：当$\alpha+\gamma=\pi$时有最大面积．

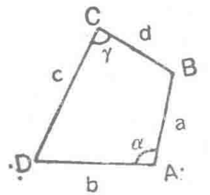


图 1

2．如图2，Rt△ABC的两个内接正方形为$MNPQ$和$DECF$。求证：$DECF$面积$S_1>MNPQ$面积S_2．

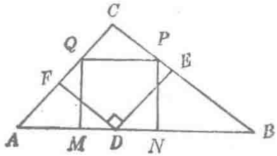


图 2

3．如图3，M_1，M_2，M_3，M_4是正方形各边的中点，分别与对边顶点连线得交点E，F，…，K，L．求证：多边形$EF\cdots KL$不是正八边形．

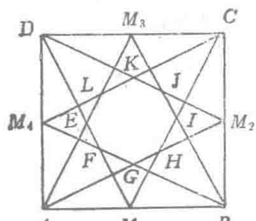


图 3

4．解方程　$2\sqrt{x}+\sqrt{2y}=\sqrt{32}$，$x$，$y$

为整数。

● 联邦德国数学竞赛（第一轮）试题

（1986年）

1．圆上有n个点（$n>1$），依次记为$P_1,P_2,\cdots,P_n$，连接这n个点，使得折线$P_1P_2\cdots P_n$不相交．问这样的连接方法有多少种？

2．x_1，x_2，…，x_n为一数列，通项$x_n=\dfrac{n}{n+a}$，其中a为自然数．试证明：对任一自然数n，数列的项x_n总可表为其它两项的乘积．

3．设S是$\triangle ABC$的AB边上的一点，T是BC边上的一点，U在CA边上，使得下列式子成立：

$$AS:SB=1:2,\ BT:TC=2:3,\ CU:UA=3:1.$$

假定S，T和U是给定的点，试求作三角形ABC。

4．数列$a_1,a_2,a_3,\cdots$，其中$a_1=1,a_{n+1}=\dfrac{1}{16}(1+4a_n+\sqrt{1+24a_n})$，试求其通项公式。

● 第27届国际数学奥林匹克试题

1．设正整数d不等于2，5，13．证明在集合$\{2,5,13,d\}$中可以找到两个不同元素a，b，使得$ab-1$不

是完全平方数.（联邦德国）

2. 平面上给定$\triangle A_1A_2A_3$及点P_0，定义$A_s=A_{s-3}$，$S\geqslant 4$.造点列$P_0, P_1, P_2, \cdots$使得P_{k+1}为绕中心A_{k+1}顺时针旋转120°时P_k所达到的位置，$k=0, 1, 2\cdots$，若$P_{1986}=P_0$，证明$\triangle A_1A_2A_3$为等边三角形.（中国）

3. 正五边形的每个顶点对应一个整数使得这五个整数之和为正. 若其中三个相连顶点相应的整数依次为x, y, z，而中间的$y<0$，则要进行如下的操作：整数x、y，z分别换为$x+y$，$-y$，$z+y$. 只要所得的五个整数中至少还有一个为负时，这种操作就继续进行. 问：是否这样的操作进行有限次后必定终止？（民主德国）

4. 以点O为中心的正n边形($n\geqslant 5$)的两个相邻顶点记为A，B. $\triangle XYZ$与$\triangle OAB$全等. 最初令$\triangle XYZ$重迭于$\triangle OAB$，然后在平面上移动$\triangle XYZ$，使点Y和Z都沿着多边形周界移动一周，而点X保持在多边形内移动，求X的轨迹.（冰岛）

5. f为定义在非负实数集上的且取非负实数值的函数，求所有满足下列条件的f：

（1）$f(xf(y))f(y)=f(x+y)$；

（2）$f(2)=0$；

（3）$f(x)\neq 0$，当$0\leqslant x<2$.（英国）

6.平面上有限个点构成一个集合，其中每个点的坐标为整数. 可不可以把此集合中某些点染成红色，而其余的点染成白色，使得与纵，横坐标轴平行的任一条直线l上所包含的红，白点的个数至多相差一个？（民主德国）

第20届全苏中学生数学奥林匹克试题

八年级

1.方程$x^2+ax+1=b$的根是自然数，证明：a^2+b^2是合数。

2.两同样大小的正方形相交错，（其公共部分）构成一个八边形。一个正方形的边是蓝色的，另一个正方形的边是红色的。证明：八边形中蓝色的边长之和等于它的红色边长之和。

3.点M在锐角三角形ABC的AC边上。作$\triangle ABM$和$\triangle CBM$的外接圆。问当M点在什么位置时，两外接圆公共部分的面积最小。

4.在一个国家里，国王要建n个城市，并在它们之间建$n-1$条道路，使得从每个城市可走到任一个城市。（每条道路连结两个城市，道路不相交也不经过其他城市。）国王要求每两个城市间沿路网的最小路程分别等于1公里，2公里，3公里，…，$\frac{1}{2}n(n-1)$公里。这样要求当：①$n=6$时；②$n=1986$时能否做到？

5.十进位自然数a是由n个相同的数码x组成的，而b是由n个相同的数码y组成的，c是由$2n$个相同的数码z组成的。对于任意的$n\geqslant 2$，求出所有使得$a^2+b=c$的数码x，y，z。

6.在凸十二边形内有相距10cm的两点，求出每点到十二边形各顶点距离之和。求证：这两个和的差小于1 m。

7.牛奶分装在30个（同样的）玻璃杯中．有个男孩想把所有杯中的牛奶匀得一样多．为此，他每次任取两杯，并将其中一杯的牛奶倒到另一杯去，直至它们的牛奶数量相等为止．可否在杯中分装适量的牛奶，使得小男孩采用上述方法，而无论如何达不到均匀各杯牛奶数量的目的？

8.一个长方形用平行于边的直线分割成边长为1的小正方形，并象国际象棋盘那样涂成黑白格．长方形的对角线也被分成黑白相间的线段．如果长方形的尺寸为：①$100\times99$；②$101\times99$，求白色线段长度之和与黑色线段长度之和的比．

九年级

1.证明：在坐标平面上不能绘出一个凸四边形，使得其一条对角线的长是另一条的两倍，且对角线间夹角为45°，而四边形各顶点坐标均为整数．

2．证明：在m行n列的矩阵中，可填上不同的自然数的平方数，使得各行，各列的数之和分别也是自然数的平方．

3．圆心O_1，O_2相距为l的两圆交于M，N两点．A为$\odot O_1$上(异于M、N)的一点，引直线AM，AN分别交$\odot O_2$于B，C．

（1）证明：$\triangle ABC$的外接圆半径为l；

（2）如果A遍历$\odot O_1$的周界（M，N除外），求$\triangle ABC$外心的轨迹．

4．在平面上给定一个正六边形，将其每边1000等分．用平行于六边形的边的线段连结这些等分点（构成正三角形的网眼）．每次我们选择任意三个作为正三角形顶点的结点，涂上颜色．继续采用这样的方式对每个结点涂色，直至

不可能为止．证明：如果最后还剩下一个结点没有涂色，那么它不可能是原来正六边形的顶点．

5．在平面上给定n边形$A_1A_2\cdots A_n$．

（1）证明：如果n为偶数，那么对平面上任意点M，在表达式

$$\pm\overrightarrow{MA_1}\pm\overrightarrow{MA_2}\pm\cdots\pm\overrightarrow{MA_n}$$

中可适当选取“＋”或“－”，使得所得的和为$\overrightarrow{O}$．

（2）证明：如果n是奇数，那么只能对平面上有限个点M，在上述表达式中适当选取“＋”或“－”，使得所得的和为$\overrightarrow{O}$．

6．同八年级第8题第2小题．

7．在大小为$n\times n(n\geqslant 3)$的正方形表格中，按照下列规则填上“±1”：

（1）在表的边缘的所有格子里都填－1；

（2）在空格中，依次填上与该格同行或同列上它的两侧最靠近的两格已填的数之积，直至填满表中的所有空格为止．求：

①在表中可能得到＋1的最多个数；

②在表中可能得到＋1的最少个数．

8．证明：对每个自然数n，不等式

$$|\sin 1|+|\sin 2|+\cdots+|\sin(3n-1)|+|\sin 3n|>\frac{8n}{5} \quad ①$$

成立．