ZHEJIANGJIAOYUCHUBANSHE

GAOZHONGSHUXUEJINGSAISHIBAJIANG

高中
数学竞赛
十八讲

浙江教育出版社

高中数学竞赛十八讲

娄志渊　王兴华　陆传赉
施咸亮　　　　　戴再平

浙 江 教 育 出 版 社

前　言

数学是基础科学，是研究自然科学和工程技术的重要工具。社会科学也日渐广泛而深入地应用数学知识。

数学的发展大致可分为三个阶段。公元5世纪前的第一阶段，即萌芽时期。这一时期的数学可以称为初等数学或常量数学，它的内容和目前中学生学习的部分数学大致相同。19世纪后数学的发展开始进入第二阶段，即变量数学时期。在机器工业发展的时代背景下，数学研究的对象发生了变化，除探讨静止的现象外，还必须研究运动着的对象。换句话说，由于生产发展的需要促使常量数学向变量数学发展。微积分的出现是这时期的重要开端。此外，为解析几何的创立对变量数学的发展也起了重要的影响作用。因为根据解析几何的思想方法，可以把形和数结合起来，即在空间形式和数量关系之间架起了桥梁，互相沟通，互相联系，为变量数学的研究提供了可能性。由此可见，生产的发展促进了数学的发展，反过来，数学的进步又促使工业和科学的进步。19世纪后期的数学可以说是现代数学时期，这一时期的数学研究对象更加广泛，性质也更加抽象化。这是数学发展的现阶段，即第三阶段。

数学的抽象化是浩繁的实际事物共性的概括，是解决实际问题的需要。抽象化的程度愈高，则它的应用也愈为深入和广泛。这一方面的事例是不胜枚举的，在此不赘述。我国数学家在数学发展的第一阶段，即常量数学时期作出了卓越的贡献，在当时处于世界领先地位。但由于封建统治阶级不提倡科学，工

业技术不发达，当时我国在变量数学的研究大大落后，甚至空白。在现代数学的研究方面，目前正在急起直追，随着四化建设的需要会更加蓬勃发展，繁荣昌盛。

数学理论的发展随着时代的前进而前进，80 年代的数学不同于 50 年代，更不同于 30 年代。但学习数学必须循序渐进，首先要学好常量数学。因为学习常量数学是学习现代数学的必经阶梯，学好它，才能更好地学习现代数学，才能更好地学习现代科学和技术知识。

数学竞赛有悠久的历史，50 年代我国就已在一些城市开始举行。“十年动乱”后，从 1978 年开始至今每年都举行，从未间断。目前不但有全国性的竞赛，也在举行世界性的竞赛。经验证明这对于提高学生学习数学的兴趣和积极性，发现具有优秀数学才能的青少年，促进数学教育事业的进步与发展都起有很大的作用。我多年来都参与其事，对此有非常深刻的体会。

娄志渊、王兴华、陆传荣、施咸亮和戴再平等五位教授所写的《高中数学竞赛十八讲》的出版为中学生学习数学和参加数学竞赛提供了一本优秀的参考书。特别是 1990 年第 31 届国际数学奥林匹克将在我国举行。争取好成绩，以提高我国的国际地位，是一件大事。我相信这本书对于高中学生在国内各项数学竞赛和国际性竞赛中取得优秀成绩将作出它的贡献。

白正国

1988 年春于杭州大学

目　　录

前　言……………………………………白正国（ 1 ）

第 一 讲　数学竞赛的历史与概况…………戴再平（ 1 ）

第 二 讲　数的整除问题(一)………………陆传荣（ 9 ）

第 三 讲　数的整除问题(二)………………陆传荣（ 23 ）

第 四 讲　几何题的向量解法(一)…………娄志渊（ 40 ）

第 五 讲　几何题的向量解法(二)…………娄志渊（ 59 ）

第 六 讲　数学归纳法的基本技巧…………王兴华（ 76 ）

第 七 讲　……………王兴华（ 95 ）

第 八 讲　……………王兴华（111）

第 九 讲　……………施咸亮（121）

第 十 讲　……………施咸亮（140）

第十一讲　……………施咸亮（161）

第十二讲　……………戴再平（178）

第十三讲　不定方程的整数解………………陆传荣（191）

第十四讲　函数方程及其它…………………陆传荣（205）

第十五讲　覆盖问题…………………………施咸亮（217）

第十六讲　抽屉原理…………………………戴再平（231）

第十七讲　几何不等式及几何极值…………娄志渊（246）

第十八讲　数学竞赛的命题…………………戴再平（264）

部分答案及提示 ……………………………（275）

第一讲　数学竞赛的历史与概况

数学竞赛是一种业余的学术活动，其目的在于激发人们学习数学的兴趣和积极性，发现具有优秀数学才能的青少年，并促进数学教育事业的进步与发展。

数学竞赛和体育“奥林匹克”一样，有着悠久的发展历史。战国时期(B.C. 475-221)齐威王与大将田忌赛马，虽然田忌的上、中、下马均略逊威王一筹，但田忌采用大军事家孙膑的意见，以下马对威王上马，以上马对威王中马，以中马对威王下马，竟以2∶1胜威王而得千金，这是孙膑运用对策论思想解决问题的一个范例，可以说是古代的一次数学竞赛。在中世纪的欧洲，解方程是数学的中心问题，现在我们都把一般三次方程$ax^3+bx^2+cx+d=0$的解法叫做卡丹（Cardan）方法，这种方法据说是由数学家个人之间的竞赛中产生的。1535年，意大利的菲奥尔(A.M.Fior)向泰塔格利亚(N.Tartaglia)提出挑战，要他解30个三次方程，后者应战后全部解出了这些方程，其中包括$x^3+mx=n$这种类型的方程，而一般三次方程只要将它的各根减去$-\frac{b}{3a}$，就得到$x^3+px+q=0$型的方程。1908年，德国一位富有的数学爱好者给哥廷根科学院提供10万马克，奖励在100年内第一个正确解决费尔马大定理(对$n\in N, n>2$，方程$x^n+y^n=z^n$没有整数解)的人，自那时起，无数学者和业余数学爱好者都企图解决这个艰难的问题，这也可以看成是一场数学竞赛。

真正有组织的现代数学竞赛，最早是匈牙利举行的。1894年匈牙利数学—物理学会通过一项决议：为中学生举办数学竞赛。此后，1902年，罗马尼亚也开始举办中学生数学竞赛。由于东欧国家组织中学生数学竞赛的成功，因此世界上多数国家相继仿效。美、苏等国还组织了大学生(主要是低年级)的数学竞赛。50年代末期国际中学生数学竞赛也开始举行。有关各国数学竞赛开始的年份列出如下：

1894年　匈牙利　　　1902年　罗马尼亚

1935年　苏联莫斯科　　1938年　美国普特南数学竞赛

1949年　保加利亚、波兰

1951年　捷克　　1956年　中国北京、天津、上海、武汉

1959年　国际数学奥林匹克

1961年　德意志民主共和国、全俄

1962年　苏联、荷兰、南斯拉夫、越南

1963年　蒙古　　1965年　英国、芬兰

1968年　以色列　1969年　加拿大、希腊

1970年　奥地利、德意志联邦共和国

1972年　美国　　1978年　中国八省市

1983年　美国数学邀请赛(AIME)

下面介绍国际数学奥林匹克及几个国家的数学竞赛情况。

国际数学奥林匹克(International Mathematics Olympic)简称IMO，1959年由罗马尼亚数学—物理学会向东欧七国倡议发起，并于当年7月22日至23日在布加勒斯特举办首届竞赛活动。此后，除1980年因主办国经济困难停办一届之外，每年举办一次。开始时仅限于东欧几个国家参加，美国于1974年(第16届)开始参加，我国是1985年参加的。至1987年IMO共举行28届，这一届是参加国最多的一次，共有44个国家参加，目

前世界上中学数学教育水准较高的多数国家都参加了这届竞赛。日本一直没有参加IMO，他们在国内也不举行数学竞赛。IMO轮流做东，没有固定的组织和章程，每年由各参加国领队组成委员会，东道国任委员会主席，各项工作都贯穿着协商、信任的精神。迄今为止，东道国大部分由东欧国家(包括苏联)担任，其他只有奥地利、英国、美国、法国、芬兰和古巴各担任过一次。1990年第31届IMO将在我国举行，这将是亚洲国家第一次担任东道国。IMO的命题工作是先由参加国提出候选题，每个参加国最多可提出五题，由东道国汇总后遴选出20个题目，其中包括两份试卷(每份6题)及8个备用题，最后由委员会决定。竞赛题除第2届及第4届为7个题目之外，每届都是6个题目。分两个上午进行，每次3个题目，用4个半小时答完。记分方法：自第24届以来，每题7分，每人满分42分，每个国家的代表队由6人组成，团体总分满分为252分，按团体总分决定名次。此外，对成绩优秀的个人分别发给一等奖、二等奖和三等奖，还设有特别奖，奖给提出优秀解答和非平凡推广的个人。IMO的试题涉及面广，不仅有传统内容，并且反映现代数学。一般认为最初几届难度不大，70年代后难度增高，出现多层次、综合运用知识的题目，只有那些具有数学机智和灵活技巧、禀赋很高的学生才能解出。

匈牙利数学奥林匹克，自1894年创办以来，除因两次世界大战和匈牙利事件期间而中断过7年之外，每年十月都要举行，每次竞赛出3道题，限4小时做完，允许使用任何参考书。数学竞赛为匈牙利选拔了不少优秀的数学人才，如1897年的优胜者费叶尔(L.Fejēr,1880-1959)在复变函数与傅立叶级数研究方面做了许多卓越的工作。1898年优胜者冯卡门(T.von Kármán,1881-1963)后来成为现代航天事业的奠基人。我国著名学者钱

学森、钱伟长、郭永怀等都是他的学生。其他如哈尔(A. Harr)、黎兹(F. Riész)、舍荀(G. Szegö)、寇尼希(D. König)和拉多(T. Radó)等都是世界著名的数学家。匈牙利的竞赛题别具风格，许多学者都参加命题工作，这些题目虽然用中学生的初等数学知识就可解答，但又涉及许多高等数学的领域，不但可以检查初等数学掌握程度，提高灵活运用能力及逻辑思维能力，还可以接触到一些高等数学的概念和方法，对以后学习高等数学有很大帮助。匈牙利竞赛试题的上述特点，使得它的命题方向对世界各国数学竞赛的命题工作产生很大影响。如1947年匈牙利竞赛中有一个题目：

在任意六个人中，总有三个人相互认识，或者相互不认识。

此题是图论中拉姆赛(Ramsey)数的最简单情形，即$r(3,3)=6$。以后几十年中这个题目被波兰、美国等不少国家反复变形，加以运用，1964年第6届IMO还将其推广情形$r(3,3,3)=17$，编成题目。又如1985年我国竞赛题：

平面上任给5个相异的点，它们的最大距离与最小距离之比为λ。求证$\lambda \geqslant 2\sin 54^\circ$，并讨论等号成立的充要条件。此题实际上受启发于下列匈牙利1961年竞赛题：

平面上的4个点可以连成6个线段。证明最长的线段和最短的线段之比不小于$\sqrt{2}$。

自从举办IMO以来，东欧国家(包括苏联)成绩一直较好，美国自参加第16届IMO以来成绩也不错，亚洲国家如越南成绩也比较好。最近几届中，德意志联邦共和国异军突起，获得第22届亚军，以后连续两届获得冠军，受到各国的重视。这些国家取得较好成绩的原因是：中学数学教学质量较高；社会关心数学竞赛，许多国家有以著名数学家组成的常设机构，美国数学奥林匹

竞优胜者能在白宫受总统的接见，并授予银盘及奖金；赛前训练选拔工作比较重视，有些国家设有少年数学学校，著名数学家经常为青少年举办讲座，国内通过层层选拔，组成参加国际竞赛的代表队，配以强有力的教练，并进行集训。1983年第24届IMO，联邦德国以总分212分获得冠军，远远超过了获第二名的美国171分，在这届竞赛中得42分满分的共4人，其中联邦德国占3人，3人之一的伯尔格德·李由于给出一道试题的优秀证明而获特别奖。联邦德国教练恩格尔介绍他们参加国际竞赛前的选拔和训练方法是：

第一轮：从国内竞赛中选尖子，进行两次考试，每次3题；

第二轮：从第一轮选出10-15名尖子，参加四次周末活动，即三次半天讲座及一次考试；

第三轮：一周集中训练，其中有讲座、讨论会及两次选拔考试。

1956年我国在北京首次举办了中学生数学竞赛，由华罗庚担任竞赛委员会主席，亲自主持命题工作。参加竞赛的有62所学校622位高中三年级的学生；同年举行数学竞赛的还有天津，武汉和上海，天津的竞赛题与北京相同。次年，上述4个城市及南京市又分别举办第二次数学竞赛。这两次竞赛中各城市都请当地最著名的数学家主持竞赛工作，并且给中学生作数学报告，充分说明了我国数学界对选拔与培养尖子数学人才的重视和关怀。如：华罗庚，陈建功，傅种孙，段学复，江泽涵讲解1956年北京市竞赛试题的解法；陈建功，苏步青，谷超豪给1957年参加上海市复赛的学生作专题报告；科学出版社还出版了华罗庚的专题演讲《从杨辉三角谈起》。

1958年以后，由于众所周知的原因，我国的数学竞赛暂时中断，至1962年北京市又恢复了中学生数学竞赛，这次竞赛受

到各方面的高度重视，华罗庚出任竞赛委员会主任，江泽涵，吴文俊出任副主任；华罗庚，吴文俊，段学复还给数学爱好者分别作了“从祖冲之的圆周率谈起”，“力学在几何中的一些应用”，“归纳与递推”等数学知识报告。同年，全国其它一些城市如上海、哈尔滨等也举办了数学竞赛。北京市的竞赛连续举办了3年。1965年以后，数学竞赛被迫停办，直至1978年才得到恢复。

1978年，我国的数学竞赛发展为由教育部和全国科协举办的全国性活动，由北京、上海、天津、安徽、广东、辽宁、四川、陕西8个省市的20多万学生参加；同年，还有一些省如黑龙江，河南等也举办了竞赛。1979年我国大陆上29个省、市、自治区全部分别举办了数学竞赛，并在此基础上进行了全国竞赛。此后除1980年以外，每年都举行一次各省、市、自治区联合数学竞赛。

30年以来，我国数学竞赛在三起两落，经历了曲折的道路之后，现已发展成为一项群众性的竞赛活动，不但高中学生进行全国性竞赛，1985年开始初中学生也举行了全国竞赛，地区性的初中竞赛也纷纷举办。1986年又为小学高年级学生和初中一、二年级学生举办了“华罗庚金杯”少年数学邀请赛。同时有些省市和地区还开办了少年数学学校，常设性的培训班和数学奥林匹克函授学校，假期里则举办数学冬令营、数学夏令营活动。全国性的为选拔IMO参加者而举办的冬令营，到1988年初为止，已在南开大学，北京大学，复旦大学等举办了三次。数学竞赛已被公认为选拔人才、提高数学学习质量的好办法。

1985年起我国开始派代表参加IMO，第一年只派两名代表，属于非正式性质，那年竞赛成绩不佳；第二年，经过充分训练之后，在波兰华沙的第27届IMO上，我国代表队取得了总分第四名的好成绩（名列苏、美、联邦德国之后），6名选手有5名获

奖；1987年，IMO首次在拉丁美洲国家古巴举行，我国获总分第八名，6名选手全部获奖。由于我国选手连年取得优异成绩，在数学竞赛方面，我国已开始以大国的姿态出现在世界舞台上。

下面列出我国历届IMO参赛者名单：

1985年第26届：

吴思皓　上海向明中学　获三等奖

王　锋　北京大学附属中学

1986年第27届：

方为民　河南省实验中学　获一等奖

张　浩　上海大同中学　获一等奖

李平立　天津南开中学　获一等奖

荆　秦（女）　西安第八十五中学　获二等奖

林　强　湖北黄岗中学　获三等奖

沈　健　江苏泰县姜堰中学

1987年第28届：

滕　峻（女）　北京大学附属中学　获一等奖

刘　雄　湖南湘阴第一中学　获一等奖

潘子刚　上海向明中学　获二等奖

林　强　湖北黄岗中学　获二等奖

高　峡　北京大学附属中学　获三等奖

何建勋　华南师大附属中学　获三第奖

练　习　一

下列第1-3题是1894年匈牙利首届数学竞赛试题，试解之。

1．证明：对于同样的整数 x 和 y，表达式

$$2x+3y \text{ 和 } 9x+5y$$

能同时被17整除.

2. 给定一个圆和圆内的点 P 和 Q. 求作内接于这个圆的直角三角形,使它的一个直角边通过点 P, 另一个直角边通过点 Q. 点 P 和 Q 在什么位置时,本题无解?

3. 三角形的三边长度构成公差为 d 的等差数列, 三角形的面积等于 S. 求三角形的边长和角. 再对 $d=1, S=6$ 这个特殊情况, 求解本题.

第4题是第27届 IMO 试题, 由我国学者常庚哲, 齐旭东提出, 试解之.

4. 平面上给定 $\triangle A_1A_2A_3$ 及点 P_0, 定义 $A_s=A_{s-3}, s\geqslant 4$. 造点列 P_0, P_1, P_2, …使得 P_{k+1} 为绕中心 A_{k+1} 顺时针旋转 120° 时 P_k 所达到的位置, $k=0,1,2,\cdots$, 若 $P_{1986}=P_0$, 证明 $\triangle A_1A_2A_3$ 为等边三角形.

第二讲　数的整除问题(一)

整数具体而简单，很多整数问题看来十分明显但论证颇为困难，需要有一定的技巧和别具一格的解题方法。学习整数问题对培养青少年分析问题的能力和训练思维等都有帮助。自有数学竞赛以来，这类问题不断涌现。从1959年开始至今的28届国际中学生数学竞赛中，150个竞赛题，与数的整除性有关的占35题(23.3%)，而在最近8届的50个题中占14题(28%)。近年国内各种数学竞赛中也开始出现这一方面题目，其目的是希望使我们能在国际数学竞赛中名列前茅。下面我们就数的整除性知识作些介绍。

一、奇数与偶数

整数 a 被正整数 b 除时，若恰有整数 q 使 $a=bq$，就称整数 a 能被整数 b 整除，或 b 能整除 a，记作 $b|a$，此时也称 b 是 a 的因数，或 a 是 b 的倍数。

特别如 $b=2$，称2的倍数 $n=2k$ 为偶数；不能被2整除的整数 $n=2k+1$ 为奇数。它们有如下明显的性质：

1. 任何奇数不可能与偶数相等。

2. 任意两个连续的自然数 n 与 $n+1$ 必一奇一偶，它们的乘积 $n(n+1)$ 是偶数。

3. 奇偶性相同的两数之和或差是偶数，奇偶性不同的两数之和或差是奇数；奇数个奇数之和为奇数，任意个奇数之积是奇

数。

4．1，2，…，n 中有$\left[\frac{n}{2}\right]$个偶数，有$\left[\frac{n+1}{2}\right]$个奇数。这里记号$[a]$表示不超过 a 的最大整数。

首先利用奇数与偶数不能相等这一明显事实，可以证明若干有趣的问题。

例 1 （苏联竞赛题） 设点 O 在正 1000边形 $A_1A_2\cdots A_{1000}$ 内部，用整数 1，2，…，1000 把它的各边任意编号，又用这些整数把线段 $OA_1, OA_2, \cdots, OA_{1000}$ 任意编号，问是能否给出这样一种编号法，使 $\triangle A_1OA_2, \triangle A_2OA_3, \cdots, \triangle A_{1000}OA_1$ 各边上号码之和都相等？

解：记各三角形三边上的号码和分别为 $S_1, S_2, \cdots, S_{1000}$，如果 $S_1 = S_2 = \cdots = S_{1000} = S$，注意到这时 1，2，…，1000中每一数在这 1000 个三角形的边的号码中恰好各出现 3 次，所以

$$1000S = S_1 + S_2 + \cdots + S_{1000} = 3(1+2+\cdots+1000),$$

化简得 $2S = 3\times1001$，左边偶数不能等于右边奇数，矛盾。即找不到所要求的编号法。

从这一证明可以看到对任意凸偶数边形都不存在这样一种编号法。同时我们指出：对任意凸奇数 n 边形，总可以找到这样的编号法。这个结论请读者自证。

例 2 （1971 年加拿大竞赛题） 设整系数方程

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

$f(0)$，$f(1)$均为奇数，试证方程无整数根。

证明：当 x 为偶数时，因 $a_n = f(0)$ 为奇数，$f(x) = x(a_0x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}) + a_n$ 是奇数，且不等于 0；当 x 为奇数时，a_ix^{n-i} 与 a_i 同奇偶，故 $f(x)$ 与 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = f(1)$ 同为奇数，且不等于 0，即任何整数都不能满足 $f(x) = 0$。

设 $x = 2m+1$
则 $x^i = (2m+1)^i$ = 偶数 + 1
$f(x)$ = 偶数 + $(a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0)$ = 偶 + 奇 ≠ 0

由此，我们即刻可以判断一些整系数方程是否有整数根。例如：$x^3+2x^2-x+5=0$ 就没有整数根。 f(0)=奇 f(1)=奇 知 f(x)无整根

现在我们再利用这些性质，进一步来讨论若干问题。

例 3 设 a,b,c 是整数，$a\neq 0$，若方程 $ax^2+bx+c=0$ 有有理根，则 a,b,c 中必有一偶数。

证明： 令 $x=\dfrac{y}{a}$ 代入原方程整理后得 代回 a.b.c

$$y^2+by+ac=0.$$

因原方程有有理根，所以它也有有理根，设它的两个有理根为 y_1,y_2。因 y^2 的系数为 1，所以 y_1,y_2 必为整根（假若不然，设 且 y_1,y_2 及 ac 而因为整数 $y_1=\dfrac{q}{p}$ 代入化简得 $q^2+bpq+acp^2=0$，这时得 $p|q$，这与 $\dfrac{q}{p}$ 是既约有理分数矛盾）。由根与系数关系得

$$y_1+y_2=-b,\quad y_1y_2=ac.$$

因此 $$y_1y_2(y_1+y_2)=-abc.$$

分类讨论

当 y_1，y_2 的奇偶性相同时，由性质 3 知 y_1+y_2 是偶数，当 y_1,y_2 为一奇一偶时，y_1y_2 是偶数，总之，$-abc=y_1y_2(y_1+y_2)$ 必为偶数，所以 a、b、c 中必有一个是偶数。

例 4 （1984年全苏竞赛题）(1)若有 n 个整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，其乘积等于 n，其和为 0，试证 $4|n$。

(2) 当 $n=4k$ 时必可找到 n 个整数使其乘积等于 n，其和为 0。

证明：(1)这里先用反证法证明 n 不能是奇数，然后再用反证法来证 $4|n$。

若 n 为奇数，由 $a_1a_2\cdots a_n=n$ 可知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是奇数，所以 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 是奇数个奇数之和，也是奇数，不能等于 0，矛盾，得证 $2|n$。

现在再用反证法来证 $4|n$。若不然，$4\nmid n$，此时在 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中只有一个偶数，设 $a_1=2k,a_2,\cdots,a_n$ 都是奇数，因为此时 $n-1$ 是奇数，这样 $a_2+\cdots+a_n$ 是奇数个奇数之和，它是奇数，故 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 也是奇数，它不等于0，矛盾。这就得证 $4|n$。

(2) 当 $n=4k(k\geqslant 1)$ 时，若 k 为奇数，取

$$2k,\ -2,\ \underbrace{1,\ \cdots,\ 1}_{k个},\ \underbrace{-1,\ \cdots,\ -1}_{3k-2个}$$

满足要求。当 k 为偶数，可取如下 $n=4k$ 个数：

$$2k,\ 2,\ \underbrace{1,\ \cdots,\ 1}_{k-2个},\ \underbrace{-1,\ \cdots,\ -1}_{3k个}.$$

例5 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 均取值1或 -1，试证

(1) 若 $x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1=0$，则 $4|n$。

(2)（1985年国际数学竞赛预选题）若

$$x_1x_2x_3x_4+x_2x_3x_4x_5+\cdots+x_nx_1x_2x_3=0,$$

则 $4|n$。

证明：(1)因 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 只取值1或 -1，所以 x_1x_2, $x_2x_3,\cdots,x_nx_1$ 也只取值1或 -1。由假设这 n 个数的和等于0，所以其中1与 -1 的个数相等，设其中有 m 个1，m 个 -1，这样 $n=2m$，即第一步证明了 n 是偶数。

其次，注意到若 $x_1x_2=1$，那么 $x_1=x_2=1$ 或 $x_1=x_2=-1$，这时从 x_1 到 x_2 符号没有变化；若 $x_1x_2=-1$，那么 $x_1=1,x_2=-1$ 或 $x_1=-1,x_2=1$，这时从 x_1 到 x_2 符号发生了一次变化，由上知 $x_1x_2,x_2x_3,\cdots,x_nx_1$ 有 m 个 -1，因此从 $x_1\to x_2\to\cdots\to x_n\to x_1$ 一共发生了 m 次符号变化，但 x_1 与 x_1 同号，所以这 m 次变化必须为偶数，即 $m=2k$，从而 $n=4k$。

第二步也可这样来证明，考察 $x_1x_2,x_2x_3,\cdots,x_nx_1$ 的乘积，