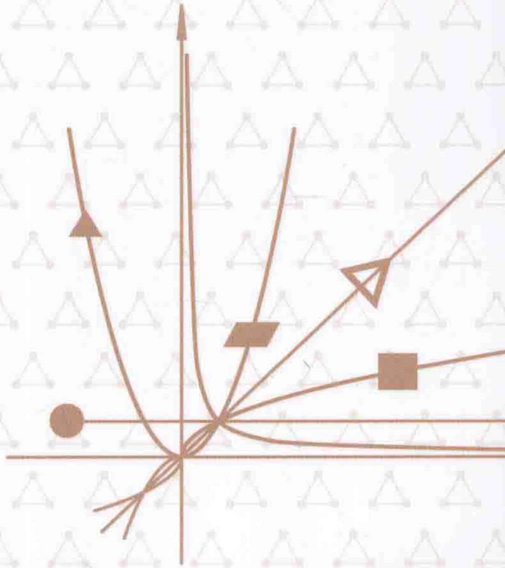
"十二五"国家重点图书出版规划项目

中国科学技术大学精品教材



郑坚坚／编著

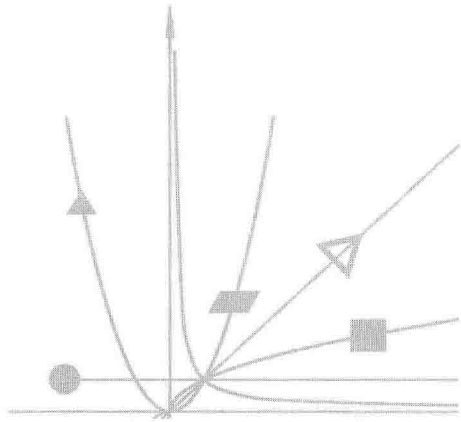
随机过程

Stochastic Processes

中国科学技术大学出版社

“十二五”国家重点图书出版规划项目

中国科学技术大学精品教材



郑坚坚／编著

Stochastic Processes

随机过程

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是一本应用随机过程的入门教材.其内容包括几种经典的随机过程,如泊松过程、更新过程、马氏链、平稳过程和布朗运动,还有对于近些年来在理论和应用研究中非常活跃的鞅过程及随机微分方程等内容的简介.

本书可作为大学本科非概率统计专业的学生(包括理科、工科及金融、管理等有关专业)及少量有此需要的研究生的教材,也可作为工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

随机过程/郑坚坚编著.—合肥:中国科学技术大学出版社,2016.1
(中国科学技术大学精品教材)
"十二五"国家重点图书出版规划项目
安徽省高等学校"十二五"省级规划教材
ISBN 978-7-312-03858-7

Ⅰ.随… Ⅱ.郑… Ⅲ.随机过程—高等学校—教材 Ⅳ.O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 316305 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号,邮编:230026
网址:http://press.ustc.edu.cn
印刷 安徽国文彩印有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 710 mm×960 mm 1/16
印张 19.5
字数 371 千
版次 2016 年 1 月第 1 版
印次 2016 年 1 月第 1 次印刷
定价 38.00 元

总　　序

2008 年，为庆祝中国科学技术大学建校五十周年，反映建校以来的办学理念和特色，集中展示教材建设的成果，学校决定组织编写出版代表中国科学技术大学教学水平的精品教材系列. 在各方的共同努力下，共组织选题 281 种，经过多轮严格的评审，最后确定 50 种入选精品教材系列.

五十周年校庆精品教材系列于 2008 年 9 月纪念建校五十周年之际陆续出版，共出书 50 种，在学生、教师、校友以及高校同行中引起了很好的反响，并整体进入国家新闻出版总署的“十一五”国家重点图书出版规划. 为继续鼓励教师积极开展教学研究与教学建设，结合自己的教学与科研积累编写高水平的教材，学校决定，将精品教材出版作为常规工作，以《中国科学技术大学精品教材》系列的形式长期出版，并设立专项基金给予支持. 国家新闻出版总署也将该精品教材系列继续列入“十二五”国家重点图书出版规划.

1958 年学校成立之时，教员大部分来自中国科学院的各个研究所. 作为各个研究所的科研人员，他们到学校后保持了教学的同时又作研究的传统. 同时，根据“全院办校，所系结合”的原则，科学院各个研究所在科研第一线工作的杰出科学家也参与学校的教学，为本科生授课，将最新的科研成果融入到教学中. 虽然现在外界环境和内在条件都发生了很大变化，但学校以教学为主、教学与科研相结合的方针没有变. 正因为坚持了科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合的方针，并形成了优良的传统，才培养出了一批又一批高质量的人才.

学校非常重视基础课和专业基础课教学的传统，这也是她特别成功的原因之一. 当今社会，科技发展突飞猛进、科技成果日新月异，没有扎实的基础知识，很难在科学技术研究中作出重大贡献. 建校之初，华罗庚、吴有训、严济慈等老一辈科学家、教育家就身体力行，亲自为本科生讲授基础课. 他们以渊博的学识、精湛的讲课艺术、高尚的师德，带出一批又一批杰出的年轻教

员，培养了一届又一届优秀学生. 入选精品教材系列的绝大部分是基础课或专业基础课的教材，其作者大多直接或间接受到过这些老一辈科学家、教育家的教诲和影响，因此在教材中也贯穿着这些先辈的教育教学理念与科学探索精神.

改革开放之初，学校最先选派青年骨干教师赴西方国家交流、学习，他们在带回先进科学技术的同时，也把西方先进的教育理念、教学方法、教学内容等带回到中国科学技术大学，并以极大的热情进行教学实践，使“科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合”的方针得到进一步深化，取得了非常好的效果，培养的学生得到全社会的认可. 这些教学改革影响深远，直到今天仍然受到学生的欢迎，并辐射到其他高校. 在入选的精品教材中，这种理念与尝试也都有充分的体现.

中国科学技术大学自建校以来就形成的又一传统是根据学生的特点，用创新的精神编写教材. 进入我校学习的都是基础扎实、学业优秀、求知欲强、勇于探索和追求的学生，针对他们的具体情况编写教材，才能更加有利于培养他们的创新精神. 教师们坚持教学与科研的结合，根据自己的科研体会，借鉴目前国外相关专业有关课程的经验，注意理论与实际应用的结合，基础知识与最新发展的结合，课堂教学与课外实践的结合，精心组织材料、认真编写教材，使学生在掌握扎实的理论基础的同时，了解最新的研究方法，掌握实际应用的技术.

入选的这些精品教材，既是教学一线教师长期教学积累的成果，也是学校教学传统的体现，反映了中国科学技术大学的教学理念、教学特色和教学改革成果. 希望该精品教材系列的出版，能对我们继续探索科教紧密结合培养拔尖创新人才，进一步提高教育教学质量有所帮助，为高等教育事业作出我们的贡献.

侯建国

中国科学院院士

第三世界科学院院士

前　言

作为一本应用随机过程的入门教材，本书的对象主要是大学非概率统计专业的本科生（包括理、工科各相关专业以及具有相应数学基础的金融、管理等专业的学生），同时也包括少量需要补习随机过程知识的某些专业（如管理）的研究生. 使用本教材所需的准备知识除了概率论与数理统计（主要是概率论）之外，还有高等数学（主要是微积分，其次要用到少量微分方程与线性代数），不需要测度论或实变函数方面的知识. 实际上，本书所用的数学工具主要是微积分.

概率论的知识无疑是非常重要的，这其中尤以条件数学期望的概念最为重要. 我们在第 1 章概率论知识回顾部分集中介绍了条件期望的概念及其一系列重要性质，并且在第 7 章中又将它推广到更加一般的、新的层面. 条件期望的新概念对于刻画和处理现代随机过程论中一些比较先进的内容（如第 7 章、第 8 章中的有关部分）起到了非常关键的作用，具有重要的理论及应用价值. 同时，与条件期望的传统概念（即我们在第 1 章中所介绍的）相比，新概念具有与之非常相似的性质，从而对于学习者而言，新概念的掌握和应用也不会有实质性的困难.

本书第 1 章至第 6 章属于经典随机过程的范围，一般来说也是必讲的内容. 第 7 章“鞅论初步”与第 8 章“布朗运动”（特别是其中有关伊藤积分与随机微分方程部分）则涉及近数十年来研究非常活跃、发展特别迅速的随机过程分支（当然，我们只介绍了其初步知识）. 对于这两章，教师可根据具体的教学要求和条件而采取选讲或者不讲的灵活处理. 全书以第 1 章为基础，其他各章间的逻辑关系基本上是按章递进的，但各章内容又相对独立. 有需要用到其他章节的地方，我们会随时交代清楚.

本书是在广泛借鉴前辈随机过程教材的基础上，结合笔者多年来讲授“概率论与数理统计”与“随机过程”课程的经验和体会而写成的. 由于学力所限，加上准备时间亦不够充分，书中缺陷乃至谬误之处在所难免，还望读者能够不吝赐教，容日后择机改正. 笔者写作这本书的初衷，是希望能以通俗易懂的方式来叙

述随机过程的内容，同时也尽可能做到论述的严谨和完善，还希望能将随机过程极其丰富而绚丽的内涵尽可能全面地呈现给读者（哪怕偶尔会失之于浅陋）．但若问这一初衷究竟实现了几分，则恐怕还要俟诸读者的评判．

本书的写作得到了中国科学技术大学教材建设项目及中国科学技术大学出版社精品教材项目的经费支持，笔者在此表示衷心的感谢．笔者感谢中国科学技术大学统计与金融系缪柏其、胡太忠教授的鼓励与支持；还要感谢统计与金融系的研究生葛欣怡、徐佩雯和卫雨婷，她们用 CTex 软件打出了全部书稿并反复校改，十分辛苦；最后，笔者要特别感谢中国科学技术大学出版社编辑老师的热情帮助与指导！

作　者

2015 年 10 月 21 日

编审委员会

目　　次

第 1 章　基础知识

我们假定读者已学过概率论，因此不再系统介绍概率论的知识，而只对那些与本门课程关系密切的内容作一些重点介绍. 本章的另外一个主题是介绍随机过程及相关的一些基本概念.

1.1　概率与概率空间

随机试验（简称试验）和随机事件（简称事件）是概率论中最基本的概念. 随机试验的最大特点是其结果的不确定性. 若将试验全部可能的结果组成的集合记为 Ω ，则 Ω 称为必然事件（或样本空间）， Ω 中的元素 ω 称为基本事件（或样本点）. 一个一般的事件 A 可以视为若干个基本事件（样本点）的组合（集合），即 A 为 Ω 的一个子集： $A \subseteq \Omega$. 但一般而言，并非 Ω 的任一子集都能成为一个事件. 而且，若记由 Ω 上的所有事件 A 所构成的集合类（事件类）为 $\mathscr{F}$ ，则人们要求 $\mathscr{F}$ 必须对某些运算是封闭的. 确切地说，要求 $\mathscr{F}$ 构成一个“σ-域”. σ-域这个概念不仅对于我们即将介绍的概率空间与随机变量等概念来说十分必要，而且对于后面第 7 章、第 8 章的内容亦起到非常重要的作用，故我们先对它做一些简单、初步的介绍.

定义 1.1.1　设 $\mathscr{F}$ 为空间 Ω 上的一个非空子集类，若满足条件:

(1) $A \in \mathscr{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathscr{F}$ (注： $\bar{A}$ 为 A 的补集，亦可记为 A^c);

(2) $A_i \in \mathscr{F}(i=1,2,\cdots) \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathscr{F}$,

则 $\mathscr{F}$ 被称为 Ω 上的一个 σ-域（或 σ-代数），而 $(\Omega, \mathscr{F})$ 则被称为可测空间（$\mathscr{F}$ 中任一集合 A 称为可测集）.

由定义容易推知，若 $\mathscr{F}$ 为 Ω 上的 σ-域，则 $\Omega, \varnothing \in \mathscr{F}$（$\varnothing$ 为空集. 若 Ω 为样本空间或必然事件，则 $\varnothing$ 又可理解为不可能事件），且 $\mathscr{F}$ 关于集合的有限次及可列无限次的并、交、差等运算是封闭的.

下面两个例子很容易加以验证：

例 1.1.1 设 $A \subseteq \Omega$ 为 Ω 的任一子集，则 $\mathscr{F} = \{\varnothing, A, \bar{A}, \Omega\}$ 构成一个 σ-域.

例 1.1.2 设 Ω 为一有限集合（例如，Ω 为一古典概率空间），则由 Ω 的所有子集构成的集合类 $\mathscr{F} = \{A, \forall A \subseteq \Omega\}$ 为一个 σ-域（注：符号 $\forall$ 的含义是“任取”或“任给”）.

定义 1.1.2 设 $\mathscr{A}$ 为空间 Ω 上的一个非空子集类，$\mathscr{F}$ 为 Ω 上的一个 σ-域，如果满足：

(1) $\mathscr{F} \supseteq \mathscr{A}$；

(2) 对于任一包含 $\mathscr{A}$ 的 σ-域 $\mathscr{F}'$ 必有 $\mathscr{F}' \supseteq \mathscr{F}$；

则称 $\mathscr{F}$ 是由 $\mathscr{A}$ 所生成的 σ-域，记为 $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{A})$. $\sigma(\mathscr{A})$ 亦称为包含 $\mathscr{A}$ 的最小 σ-域.

注 集类 $\sigma(\mathscr{A})$ 可以理解为，是由 $\mathscr{A}$ 中集合经任意有限次或可列无限次并、交、差等运算而得到的所有可能的集合所构成的，它也等于所有包含 $\mathscr{A}$ 的 σ-域的交.

例 1.1.3 取 $\Omega = \mathbf{R}$（实数域），记 $\mathscr{A} = \big\{(-\infty, x], \forall x \in \mathbf{R}, \big\}$ 则 $\sigma(\mathscr{A})$ 称为一维博雷尔（Borel）域，记为 $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ 或 $\mathscr{B}$，而 $(\mathbf{R}, \mathscr{B}(\mathbf{R}))$ 或 $(\mathbf{R}, \mathscr{B})$ 称为（一维）博雷尔空间.

$\mathscr{B}(\mathbf{R})$ 是一个重要的 σ-域，可以推想出 $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ 中的元素都是形如 $(-\infty, b], (a, +\infty), (a, b], [a, b), [a, b], (a, b)$(其中 $a \leqslant b$) 之类的区间以及它们的有限次或可列无限次的并集及交集.

若设 $\mathscr{A}$ 为二维实平面上所有形如 $(-\infty, a] \times (-\infty, b] (\forall a, b \in \mathbf{R})$ 的矩形所构成的子集类，则 $\sigma(\mathscr{A})$ 称为二维博雷尔域，记为 $\mathscr{B}^2$. 而 $(\mathbf{R}^2, \mathscr{B}^2)$ 称为二维博雷尔空间. 更一般地，还可类似定义 $\mathscr{B}^n$ 与 $(\mathbf{R}^n, \mathscr{B}^n)$.

下面我们给出概率的定义.

定义 1.1.3　设随机试验的所有可能的结果（指样本点或基本事件 ω ）构成样本空间 Ω ， $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的随机事件类 (σ-域). 若有 $\mathscr{F}$ 上的集函数 $P=P(A)$, 满足:

(1) $P(A)\geqslant 0(\forall A\in\mathscr{F})$;

(2) $P(\Omega)=1(\text{或}P(\varnothing)=0)$;

(3) （可加性）对任意一组（有限个或可列无限个）两两互斥的事件 A_1, $A_2,\cdots,A_i,\cdots(A_i\in\mathscr{F})$ 都有

$$P\Big(\bigcup_i A_i\Big)=P\Big(\sum_i A_i\Big)=\sum_i P(A_i) \tag{1.1.1}$$

则称 $P(A)$ 为 A 的概率 $(\forall A\in\mathscr{F})$, 而称三元组 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间.

对于概率的基本性质我们仅择要介绍如下的几条:

(1) 概率的一般加法公式

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.1.2}$$

$$\begin{aligned}P(A+B+C)=&P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)\\&-P(BC)+P(ABC)\end{aligned} \tag{1.1.3}$$

更一般地，有 (Jordan) 公式:

$$P\Big(\sum_{i=1}^n A_i\Big)=\sum_{m=1}^n(-1)^{m-1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant n}P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_m}) \tag{1.1.4}$$

(2) 概率的减法公式

$$P(A-B)=P(A)-P(AB) \tag{1.1.5}$$

特别地，若 $A\supseteq B$，则有

$$P(A-B)=P(A)-P(B) \tag{1.1.6}$$

(3) 概率的连续性

(a) 若事件列 $\{A_n,n\geqslant 1\}$ 是单调递增的，即满足： $A_1\subseteq A_2\subseteq A_3\subseteq\cdots$，则有

$$\lim_{n\to+\infty}P(A_n)=P\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\Big) \tag{1.1.7}$$

(b) 若事件列 $\{A_n, n \geqslant 1\}$ 是单调递减的，即满足： $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$，则有

$$\lim_{n \to +\infty} P(A_n) = P\Big(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\Big) \tag{1.1.8}$$

(4)

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{1.1.9}$$

更一般地，有

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i) \tag{1.1.10}$$

证明 式 (1.1.2) 与式 (1.1.3) 是众所周知的，利用此两式，再用归纳法即可证明式 (1.1.4). 式 (1.1.5) 亦容易证明.

为证明式 (1.1.7)，先将原事件列的并分解为不交并，即

令 $B_1 = A_1, B_n = A_n\overline{\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big)} = A_n\overline{A_{n-1}} (n \geqslant 2)$ （因为 $\{A_i, i \geqslant 1\}$ 为递增的），则 $B_1, B_2, \cdots, B_i, \cdots$ 为两两互斥的，且容易证明

$$\sum_{i=1}^{n} B_i = \sum_{i=1}^{n} A_i = A_n \quad 及 \quad \sum_{i=1}^{+\infty} B_i = \sum_{i=1}^{+\infty} A_i$$

对此二式取概率，并利用式 (1.1.1) 分别得到

$$P(A_n) = P\Big(\sum_{i=1}^{n} B_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \tag{1.1.11}$$

与

$$P\Big(\sum_{i=1}^{+\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(B_i) \tag{1.1.12}$$

在式 (1.1.11) 两边取极限，并利用式 (1.1.12) 便得到

$$\lim_{n \to +\infty} P(A_n) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(B_i) = P\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} A_i\Big)$$

此即为式 (1.1.7).

至于式 (1.1.8)，可令 $B_n=\overline{A_n}(n\geqslant 1)$，则 $\{B_n,n\geqslant 1\}$ 为递增的事件列. 利用式 (1.1.7) 的结果我们有

$$\lim_{n\to+\infty}P(B_n)=P\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty}B_n\Big)$$

即

$$\lim_{n\to+\infty}P(\overline{A_n})=P\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\overline{A_n}\Big)$$

再利用概率论中著名的 De Morgan 公式，便可证得式 (1.1.8).

最后，由式 (1.1.2) 我们知道

$$P(A+B)\leqslant P(A)+P(B)$$

再利用归纳法便可证明式 (1.1.9). 然而用式 (1.1.9) 却不能直接推得式 (1.1.10)（反推倒是可以），需要用到概率的连续性. 令 $B_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\ (n\geqslant 1)$，则 $\{B_n,n\geqslant 1\}$ 为单调递增的事件列，且有

$$\sum_{i=1}^{n}B_i=\sum_{i=1}^{n}A_i,\quad \sum_{i=1}^{+\infty}B_i=\sum_{i=1}^{+\infty}A_i$$

由式 (1.1.7) 可知

$$\lim_{n\to+\infty}P(B_n)=P\big(\sum_{i=1}^{+\infty}B_i\big)=P\big(\sum_{n=1}^{+\infty}A_i\big)\tag{1.1.13}$$

而由式 (1.1.9) 可知

$$P(B_n)=P\Big(\sum_{i=1}^{n}A_i\Big)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

在上式两边令 $n\to+\infty$，推得

$$\lim_{n\to+\infty}P(B_n)\leqslant\sum_{i=1}^{+\infty}P(A_i)$$

再利用式 (1.1.13)，便得到

$$P\big(\sum_{i=1}^{+\infty}A_i\big)\leqslant\sum_{i=1}^{+\infty}P(A_i)$$ □

条件概率与条件数学期望是研究随机过程的重要工具，故下面我们给出：