

ZHONGXUE

SHUXUE JIAOYU YU JIETI YANJIU

# 中学数学教育 与解题研究

李绍亮◎著

云南教育出版社

0 5 = 0  
8  
6 2 1 2 R  
17 + 6

ZHONGXUE

SHUXUE JIAOYU YU JIETI YANJIU

# 中学数学教育 与解题研究

李绍亮◎

云南教育出版社

责任编辑：刘晓云 李 菁

封面设计：张 勇

## 中学数学教育与解题研究

李绍亮 著

---

云南教育出版社出版发行 (昆明市书林街 100 号)

云南国防印刷厂印装

---

开本：850×1168 1/32 印张：11 字数：265000

1999 年 8 月第 1 版 1999 年 8 月第 1 次印刷

印数：1—3000

---

ISBN 7-5415-1511-6/G·1268 定价：14.00 元

## 序

长期以来，学问只被认为是高等学府、研究所专家、教授们的领域。其实，学问无所不在，中小学、幼儿园里也大有学问。摆在我们面前的《中学数学教育与解题研究》一书，就是一个例证。

数学是中学重要的基础学科之一。大凡有作为的科学家，在他们成长的道路上，几乎没有一个不是中学数学把他们引入科学的殿堂。很多出类拔萃的专家、学者、管理者，也得益于中学数学对他们思维能力的培养。李绍亮撰写的《中学数学教育与解题研究》，尽管文中有很多数学题，但它不是数学习题集，也不是简单地数学解题的指导书。它是从中学数学教材教法研究入手，探索中学数学教育改革，培养学生能力的一本教育科学研究的论文集，它是李绍亮老师一生心血的结晶。

李绍亮是一位普通的中学数学教师，在近 40 年的中学数学教学生涯中，担任过 20 多年的班主任。他没有满足于对教材、教学的娴熟，在教书育人、默默无闻的奉献中，艰辛探索，勤于笔耕，终于在退休之时，有桃李满天下之得，更有《中学数学教育与解题研究》之喜。难得，可贵！这在云南省中学界还是不多的。

我衷心地祝贺《中学数学教育与解题研究》出版。希望有更多的中小学教师在教学之余，不断总结自己的经验、教训，探索教育改革的路子，有更多的论著发表、出版。教育科学研究兴旺之时，必是教育改革硕果累累之日。

楊崇龍

1997年1月12日

# 目 录

|                                                              |      |
|--------------------------------------------------------------|------|
| 第一章 改革理论与实践 .....                                            | (1)  |
| 一 面向 21 世纪中国数学教育改革的若干思考 .....                                | (1)  |
| 二 自学辅导、单元集中、演讲与讨论结合的教学方法<br>初步探索 .....                       | (10) |
| 三 “学教式”教学方法的初步总结 .....                                       | (19) |
| 四 怎样培养学生的自学能力 .....                                          | (33) |
| 五 “学教式”教学法的实践与理论 .....                                       | (38) |
| 第二章 重点、难点透视 .....                                            | (45) |
| 一 漫谈用字母表示数<br>——符号化思想是人们认识的飞跃 .....                          | (45) |
| 二 如何理解 $\emptyset \subseteq A$ .....                         | (47) |
| 三 函数概念辨析 .....                                               | (49) |
| 四 奇偶性定理的变形、推广及应用 .....                                       | (53) |
| 五 反函数的存在与求法 .....                                            | (56) |
| 六 函数 $f(x) = x + \frac{k}{x}$ 的单调性及应用<br>——兼谈一道例题的解法错误 ..... | (59) |
| 七 三角函数图像的变换 .....                                            | (65) |
| 八 三角函数图像的对称轴与对称中心 .....                                      | (67) |
| 九 等差数列与等比数列的一些性质 .....                                       | (69) |
| 十 漫谈解无理不等式 .....                                             | (74) |

|     |                                        |       |
|-----|----------------------------------------|-------|
| 十一  | 虚数单位 $i$ 与虚数 .....                     | (77)  |
| 十二  | 误解辨析<br>——重视条件的充要分析, 防止“以偏概全”<br>..... | (80)  |
| 十三  | 有向线段定比分点的意义、公式及应用 .....                | (82)  |
| 十四  | 抛物线上定长动弦中点坐标的最值问题 .....                | (89)  |
| 十五  | 利用坐标轴平移化简圆锥曲线方程 .....                  | (94)  |
| 十六  | 关于双曲线极坐标方程辨析 .....                     | (98)  |
| 第三章 | 解题策略 .....                             | (103) |
| 一   | 选择题的结构、设计与解法 .....                     | (103) |
| 二   | 再谈选择题的设计原则与解题策略 .....                  | (115) |
| 三   | 解填空题的若干要求和策略 .....                     | (126) |
| 四   | 解综合题的原则与策略 .....                       | (142) |
| 五   | 含参问题 .....                             | (149) |
| 六   | 探索性问题 .....                            | (155) |
| 七   | 应用题选讲 .....                            | (161) |
| 第四章 | 思想·方法·技巧 .....                         | (169) |
| 一   | 常用数学思想 .....                           | (169) |
| 二   | 中学数学中化归思想的运用 .....                     | (184) |
| 三   | 设参、用参与基本量思想 .....                      | (192) |
| 四   | 常用数学方法与典型问题 .....                      | (198) |
| 五   | 引参、用参、消参 .....                         | (230) |
| 六   | 利用最值求解参数 .....                         | (236) |
| 七   | 构造解析几何模型解某些三角题 .....                   | (239) |
| 八   | 利用组合意义解题 .....                         | (245) |
| 九   | 变式研究、探索发现——从不等式 $a^2 \geq 0$ 谈起 .....  | (249) |
| 第五章 | 数学高考评述 .....                           | (259) |
| 一   | 试题对中学数学教学的几点导向 .....                   | (259) |

|    |                                                |       |
|----|------------------------------------------------|-------|
| 二  | 难度稳中有降、注重考察素养<br>——浅议 1995 年高考数学试题 .....       | (260) |
| 三  | 稳中有降、变中求新 .....                                | (262) |
| 四  | 稳中求新尾巴翘, 试题新颖好题多<br>——1996 年数学高考试题评析 .....     | (263) |
| 五  | 体现素质教育导向 注重思维能力考查<br>——1997 年高考数学试卷设计的启示 ..... | (279) |
| 六  | 解析几何的高考复习 .....                                | (283) |
| 七  | 热点评析——直线与二次曲线 .....                            | (288) |
| 八  | 从 1994 年高考数学试题第 (22) 题谈起 .....                 | (312) |
| 九  | 浅谈应考策略 .....                                   | (320) |
| 附录 | .....                                          | (324) |
| 一  | 服从于“三个面向”, 立足于全体学生, 努力做好政治思想工作 .....           | (324) |
| 二  | 李绍亮的“班主任经” .....                               | (332) |
| 三  | 烛光闪烁——记昆八中数学教师李绍亮 .....                        | (333) |
| 四  | 数学教学方法改变以后我的得与失 .....                          | (335) |
| 后记 | .....                                          | (337) |

## 第一章 改革理论与实践

### 一 面向 21 世纪中国数学教育改革的若干思考

江总书记在党的十四届五中全会上重要讲话中指出：“在现代化建设中，必须把可持续发展作为一个重大战略。”联合国教科文组织在北京召开的“面向 21 世纪教育国际研讨会”，形成一个“圆桌会议报告——学会关心：21 世纪的教育”。概括起来，“学会关心”的全部意义，就是要正确处理好人与人的关系、人与社会的关系、人与环境的关系、人与自然的联系。“可持续发展”和“学会关心”是 21 世纪人类必须解决好的两大问题，这就要求教育思想、教育体制、教育内容、教育方法都必须有一个较大的转变，树立现代教育价值观、人才观、质量观、教学观，以适应 21 世纪经济和社会可持续发展的需要。

《中国教育改革和发展纲要》中指出，要“全面提高学生的思想道德、文化科学、劳动技能和身体心理素质”，“教育改革和发展的根本目的是提高民族素质，多出人才，出好人才”。从“应试教育”转向“素质教育”，是党中央、国务院为贯彻“可持续发展”这一指导思想的重大决策，各类教育都必须贯彻这一战略转移。

## 数学应成为大众的数学

时至今日，数学已深入到科研、生产和生活各个领域，现代生活越来越变得高度社会化，而高度社会化的一个基本特点就是精确化、定理化和定量思维，越来越多地需要数学作为基本的语言和工具。新的世纪要求人们必须具有更高的数学修养，这是因为：

1. 科学技术的迅速发展，特别是以计算机为标志的信息时代到来。

2. 大多数职业必将要求从业人员具有收集、分析和处理资料、信息的能力。

3. 市场经济需要人们掌握更多有用的数学知识。

4. 人们生活质量的提高有待于数学知识的丰富。

5. 数学语言正在生活化，或者说生活中需要越来越多的数学语言。

✓ 总之，现代社会处处充满着数学，每个人都应掌握大量的数学知识，形成良好的“数感”和正确的“数学意识”，以便更好地适应生活和处理工作。于是使大众数学成为现实，用大众数学的思想改造传统的数学教育理论与实际体系，已经成为国家实施数学教育的一个指导思想。人人学有用的数学，人人掌握数学，不同的人学不同的数学，乃是在大众数学意义下的数学教育体系所追求的教育目标。

✓ 然而，当前数学教学偏重理论，忽视应用是一个世界性的问题。由于历史的原因，这个问题我国较为突出。在社会主义市场经济大潮到来的时候，大中学生却对利息、折扣、保险、纳税、分期付款等问题的算法一无所知。从 1991 年美国教育测试中心组织的第二次国际教育成就评价课题研究公布的数学测试成绩看，中国 13 岁学生总平均分为 80 分，位于 20 个国家和地区之

首；但对稍带应用性的题目，如看图找最短路线、按直方图回答问题等，却只居中游水平，位于瑞士、韩国、英国、法国、加拿大等国之后。这种现实和社会的需要形成强烈的反差，因此把“应用还给数学”就成为对数学教育的迫切要求，成为实施数学教育的一个指导思想。特别引人注目的是 1993 年全国试行的《义务教育初中数学教学大纲》中，在“教学目的”部分中明确指出：“解决实际问题，是指能够解决带有实际意义和相关学科中的数学问题，以及解决生产和生活中的实际问题，在解决实际问题中，要使学生受到把实际问题抽象成数学问题的训练，逐步培养他们分析问题和解决问题的能力，形成用数学的意识。”这一要求的重大变化，反映了大众数学存在于义务教育的基本精神中，它将代表一种新的数学教育思想和实践体系，对我们深入研究大众数学无疑是极大的鼓舞。

### 数学课程教材建设是基础的基础

教材是教学之本，是提高数学教育教学质量的主要物质基础。九年制义务教育初中数学教材较好地体现了“三个面向”和教育方针的精神，体现了大众数学方向的初步实践，在内容上充实了先进的科学知识，注意了能力的培养，加强了同生活的联系，具有可读性、启发性和趣味性，适合学生的年龄特点和心理特征。教材有一定的弹性（分基本和选学两部分），明确规定了学习水平的四个层次，为因材施教提供了基础。但是，该教材对于“不同能力和不同学习目的”这一差异原则的处理是否恰当和科学值得研究。例如，对于初中毕业即将就业或间接就业（读职高或技工学校）的学生，基本知识加“统计”应用，远远满足不了他们未来实际生活和劳动的需要。由于我国人口状况和经济发展水平决定了短期内大班（学生人数在 50 人以上）教学不可能有较大改变，学生数学能力的差异必然导致混合能力的班级，

只是单一教材内部的弹性,无法满足不同需要、不同水平学生的数学学习要求,教师的教学只能注意多数具有相近水平的学生,而无暇顾及其余水平的学生,所有学生基本上按同样的步子学习同样的知识内容,我国数学教育改革的“一纲多本”方针,在教学实际中尚未发挥其意义.因为全国基本上是大区域统一教材,教师是没有比较和选择学习材料的权力.与义务教育相衔接的普通高中新的课程方案和教学大纲,以及据此编写的高中数学新教材也将出台,这是基础教育的一件大事,我们希望:

1. 改革的视角必须突破单一教材的模式,实行“一本多层次”的课程结构,即在我国统一或大局部统一的数学教学大纲下,每一套教材都有适合三个或四个不同层次水平的课本,并且在每一水平的课本内再有适度的弹性,真正对每一个学校都有实际意义的“一纲多本”,以“适合不同能力和不同学习目的的学生需要”.

2. 新教材要处理好需要与可能的关系;妥善处理传统知识与现代科学知识的关系;正确处理传授知识和培养能力两者相互依存和相互促进的关系;正确处理逻辑程序与心理程序的关系;处理好初、高中教材有机衔接与平行学科(如物理、化学)和谐、匹配、发展的关系.

3. 教材要紧密联系学生所熟悉的生活、生产实际,生动活泼,易教易学;要重视揭示法则、性质、公式、定理等的发现和推导过程,知识方面的内在联系;根据现代计算机发展的情况,也应该结合计算机的需要加强代数演绎的逻辑性,培养学生的数理逻辑思维能力,形成推理意识.

4. 弹性的教材应该有合理的评价关系,建立相配套的学习成绩评价手段,科学的评价旨在评价所学知识的掌握水平,帮助教师和学生做出下一阶段有意义的学习决策.以同样的知识内容考评不同学习水平的学生,对一部分学生将会丧失评价意义,而

对另一部分学生将会挫伤他们的学习积极性。

5. 新教材要系列化、多样化, 把整体性与灵活性紧密结合起来, 体现多样性、层次性和弹性。鉴于现在中、小学生的课外读物偏少, 而作为应试需要的解题之类的书却充斥市场, 因此可编写一些与教材相匹配的课外读物作为教材的一个新的品种序列, 以方便教师的“教”与学生的“学”。

### 数学教师必须实现继续学习

课程改革的成败, 数学教育水平的提高, 关键在于教师。近几年来, 为提高数学教师水平, 教育行政部门作了很大努力。例如, 规定了达标的要求, 开办了教师进修学校或教育学院对教师进行多种形式的培训提高, 许多教师拿到了本、专科毕业证书, 然而一些教师觉得他们所学的高等数学对中学数学教学用处不大。其实应当在“可持续发展观”指导下, 重新认识数学。这是因为:

✓ 数学具有作为科学的方法论属性, 利用电脑的特殊功能, 实验、尝试错误、模型模拟已经成为当今数学家或者工程技术人员研究数学、应用数学的最为常见的策略, 而公理化体系仅仅是整理数学的一种手段。

数学不仅是一门科学, 也是一门技术。例如宇宙飞行器的运行、轨迹推算、汽车造型、工业设计中的计算机模拟乃至人们日常生活中随处可见的时装制作、发型设计软件, 都使人们强烈地感受到数学同时具有科学和技术的特性。

✓ 数学是关于客观世界的数学化过程。数学家们反省自身的研究生涯, 发现一个基本数学过程的循环, 它反复出现, 形成最基本的模式, 即抽象、符号和应用。而这一模式与人类的基本认识规律是一致的, 即“问题情境——建立模型——解释与应用”。这个过程就称之为数学地组织现实世界的数学化过程。

由此看来今后的数学随着现代化的推进与发展会变为人们日常生活的一种需要，从而成为一个合格公民必备的数学素养。作为数学教师要适应未来需要，必须实现继续学习，才能在新教材使用中驾驭自如，恰当地发挥自身的创造性和教材的优势。为此需要坚持以下几点：

1. 数学的继续学习不应停留在数学本身的理论研究，而应对数学观念和事实的“来龙去脉”、各科的联系与交叉、数学思想与数学发展的道路、对学习和掌握数学知识过程的心理程序和规律进行研究。

2. 教师应学点现代数学，特别是了解计算机的出现对现代数学的影响，更新自身的数学观，使数学课堂变得充满智慧和富有生命力。

3. 教师应学习和了解现代化认知心理学的最新进展，更新对学生的学习活动的看法，即“没有活动，没有做就形不成学习”，“学生个个都是聪明的”。使课堂教学以激励学生，发挥学生自主的精神为主旋律。

4. 教师应尽力摆脱在现行考试制度下形成的一系列僵死的教条，努力以自己活生生的课堂实践去发现、探索教育教学的规律，而对不同学生，不同内容，其课堂教学应该是多姿多彩的，以实现自身的创造价值。

实现“应试教育”向“素质教育”转变的关键  
之一是改革高考制度

数学教育改革是一个复杂的系统工程，涉及教学大纲、课程计划、教材编写、教师、学生及学生家长，涉及社会各方面（包括经费、设备等），需要有配套的措施，当然首要的是需要一个科学、合理的方案。成功地施行，也需要各方面的协调配合。然而高考制度的改革仍是数学教育改革一个至关重要的条件。有专

家指出：“按现行高考办法，数学教育改革几乎不可能进行。”尽管教育行政部门三令五申不要用升学率来评价学校的教育质量和教师教学质量的高低，但社会仍然以升学率作为考核学校和教师成绩的惟一标准。在这种压力下，学校和教师总是想办法追求升学率，再加之高考毕竟是选拔性考试，需要有相当的区分度，又要体现公平竞争，试题不能都出容易题，或者以哪一种资料为主，这个尖锐的矛盾就导致学校存在着一些不符合教育规律的现象。如在普通高中几乎有一年的时间用来准备高考，教师为了帮助学生应付高考，煞费心机将习题分类，让学生熟悉各种类型题目，反复地模拟考试。一方面教学内容减少了，另一方面习题集又在加厚，师生的负担也随之加重，形成恶性循环，所以数学教育要改革，高考是一个关键问题。而要解决高考问题，地方、学校、教师是无法解决的。有不少专家建议，将升学准备交给社会，我们认为这是一个可行的建议，这样做有利于“应试教育”向“素质教育”转化；有利于数学教育改革；有利于减轻社会对学校及教师的压力；有利于各种教育教学活动按计划有序进行；有利于全面贯彻教育方针和培养 21 世纪的人才。

### 数学教育中必须加强对学生良好个性品质的培养

义务教育初中数学教学大纲中，把“培养良好的个性品质和初步的辩证唯物主义的观点”作为教学目的之一写入了大纲，并明确解释良好的个性品质主要是指“正确的学习目的，浓厚的学习兴趣，顽强的学习毅力，实事求是的科学态度，独立思考，勇于创新的精神和良好的学习习惯”，这在 1949 年以后的中学数学教学大纲中还是第一次，因为这是培养社会主义建设人才，培养合格劳动者、合格公民的前提。从哲学意义上讲，人的素质中最核心的是世界观和方法论。所以培养良好的个性品质是素质教育的首要任务，也是数学教学的主要内容，同时也是“可持续发展

观”在数学教育中德育因素的体现。

从目前我国中等数学教育的总体情况看，对培养学生良好的个性品质没有给以普遍的重视，或者信心不足，或者找不到合适的方法和途径。数学教育的目的常常被简单地理解为传授知识和基本技能，或者再加上“三大能力”，忽略对非智力因素的研究。实际上，中学数学和中学其他学科一样，担负着培养社会主义现代化建设人才的任务，我们应从育人的角度来全面理解数学教学目的。如何改变这种状况，加强对学生良好个性的培养，如何“有意”、“有机”、“有序”、“有情”，从而“有效”存在于数学教育活动中，进一步提高数学教育水平，是中学数学教育的一个主要课题，值得深入研究、讨论和探索。关于培养和发展学生的良好个性品质，有如下途径：

1. 在数学教学中，可以结合具体的数学内容，采用多种方法和途径教育学生懂得学习数学知识是当代社会每个公民为适应日常生活、参加生产和进一步学习所必需，不懂数学的人不可能在现代社会中成为一个合格的公民，更谈不上成为优秀的技术工人、工程师、企业家、科学家。总之，要教育学生树立正确的学习目的和远大的理想，建立正确的数学观，这样在数学学习中才有持久的动力。

2. 在数学教学中，以激发学生的求知欲望和学好数学的自信心入手，去培养学生学习数学的兴趣。决定学习兴趣的一个主要心理因素是求知欲、成就感和自信心。兴趣常从行为结果中获得满足感和成就感而得到巩固和加强。如果一个学生产生了数学艰深难懂，枯燥无味、高不可攀的念头，必然会导致回避数学课、回避数学老师、不接触数学读物的自闭行为，因此应重新认识学生。学生不是一张白纸，即使是一年级的儿童，他们也有着生活的体验与知识的积累，这其中就包含着大量的数学活动经验和运用数学解决问题的策略，何况每个学生都有自己的生活背

景、家庭环境,这种特定的生活和社会文化氛围,会导致不同的学生有不同的思维方式,因此数学活动中应持客观态度,树立“学生个个都聪明的观点”。

✓ 所有的新知识只有通过学生自身的“再创造”活动,使其纳入自己的认知结构中,才可能成为有效的知识。因此应创设适当的问题情景,让学生带着问题学习和思考,启发学生思索,使学生的学习过程成为学生自己探索和发现的过程。

利用数与形的抽象性,使学生获得一个纯粹以数和形为思维对象的思维定向,引导学生在这个空间里领略数学的抽象美、理论体系的结构美、数学结论的和谐美和应用的广泛性,以激发学生的求知欲望。在实际教学中,知识、技能、能力等诸方面的教学目标要定得合理、适度,既要有挑战性,又要有可行性,否则学生会在频繁失败之后,情绪低落,知难而退。

要充分发挥教学评价手段对学习的激励功能,引导学生理解、领会数学是现实的、充满智慧和人人都能体会的,引导学生了解、体会、理解和掌握知识的纵横联系,在掌握知识和方法的过程中获得数学学习成功的快乐。运用恰当的比喻、生动的语言,在课堂中创造一种轻松、活泼的气氛,寓学于乐。

积极开展第二课堂活动,有关数学发展史、数学和数学家的趣闻轶事、数学中的趣味游戏、一题多解或一题多变,以及数学建模活动等均可作为课外活动的素材,适当充实数学课堂教学,尝试问题解决也能有效地调动学生积极因素,激发学生热爱数学、研究数学的兴趣。

3. 数学以其高度的抽象性和严谨性作为其主要特点,而青少年学生则习惯于具体思维,其思维单一化、表面化,它不一定反映问题的实质和全部,数学学习不可能一帆风顺。数学教学中要帮助学生不断纠正学习中的错误,培养他们学习的毅力和一丝不苟、坚持真理、修正错误的实事求是的科学态度;