



导航技术系列教材

自主导航技术

Autonomous Navigation Technology

■ 主编 胡小平



国防工业出版社

National Defense Industry Press

导航技术系列教材

自主导航技术

Autonomous Navigation Technology

主 编	胡小平		
编 著	吴美平	吴文启	潘献飞
	练军想	穆 华	逯亮清
	何晓峰	唐康华	李 涛
	张开东	蔡劭琨	刘 伟

国防工业出版社

· 北京 ·

内 容 简 介

本书比较系统地讲述了自主导航的基础理论与应用技术。全书共分六章,前三章简要介绍自主导航的基本概念、惯性导航和天文导航的基础知识,后三章主要论述惯性/卫星和惯性/特征匹配组合导航技术,以及惯性/多传感器组合导航技术在陆、海、空等领域的应用案例。

本书力求反映自主导航技术的最新理论成果和应用现状,突出基础理论与工程实践的结合。本书适于作为导航技术及相关专业的研究生教材,也可作为相关专业技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

自主导航技术/胡小平主编. —北京:国防工业出版社,
2016. 2

导航技术系列教材

ISBN 978 - 7 - 118 - 10607 - 7

I. ①自... II. ①胡... III. ①导航 - 教材 IV. ①TN96

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 018348 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

三河市众誉天成印务有限公司印刷

新华书店经售

※

开本 710 × 1000 1/16 印张 18 $\frac{3}{4}$ 字数 352 千字

2016 年 2 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—2000 册 定价 65.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777

发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755

发行业务:(010)88540717

《导航技术系列教材》丛书

编委会

主 编 胡小平

副主编 吴美平 吴文启

编 委 李 涛 罗 兵 曹聚亮 潘献飞 练军想

江明明 逯亮清 张开东 唐康华 何晓峰

穆 华 张礼廉 蔡劭琨 刘 伟 马 涛

先治文 王玉杰 范 晨 毛 军

总 序

导航技术是信息化社会和武器装备信息化的支撑技术之一。今天,导航技术的发展和运用,极大地拓展了人类的活动空间,推动了军事思想和作战样式的重大变革,在人类活动的各个领域,导航技术发挥着不可或缺的作用。导航技术的发展运用了现代科学技术众多领域的最新成果,是科学技术与国家基础工业紧密结合的产物,它的发展水平是一个国家科学技术水平、工业水平和综合国力的重要标志。

在中国,导航技术的发展历史几乎可以追溯到公元前 2600 年左右。根据史书记载,当年黄帝部落与蚩尤部落在涿鹿(现在的河北省)发生大战,黄帝的军队凭借指南车的引导,在大风雨中仍能辨别方向,最后取得了战争的胜利。这或许是有史可查的导航技术应用于军事活动的最早的成功案例。西汉《淮南子·齐俗训》中记载:“夫乘舟而惑者,不知东西,见斗极则悟矣”,意思是说在大海中乘船可以利用北极星辨别方向。这表明在中国古代航海史上,人们很早就使用了天文导航方法。到了明代(大约公元 1403—1435 年),我国著名航海家郑和,曾率领多达 60 余艘船舶的船队,远达红海和亚丁湾。在郑和的航海图中就有标明星座名称的《过洋牵星图》,可见当时我国的导航技术已经发展到了比较高的水平。

导航技术发展到今天,从技术层面讲可谓百花齐放,拥有天文导航、惯性导航、无线电导航、卫星导航、特征匹配导航(如地磁匹配、重力匹配、图像匹配等)、多传感器组合导航、基于网络的协同导航、仿生导航等诸多技术分支;从运用层面看可谓不可或缺,其运用领域涉及了航空、航海、航天、陆地交通运输等人类活动的各个领域。随着导航技术的不断发展和运用领域的不断拓展,对导航技术专业人才的请求也在日益增长。

导航技术涉及数学、物理学、力学、天文学、光学、材料学,以及微电子技术、计算机技术、通信技术等诸多学科领域,技术内涵十分丰富,发展速度可谓日新月异。因此,对于导航技术领域的专业人才来说,要求掌握扎实的专业基础理论和系统的专门知识、具有很强的科技创新意识和实际工作能力。这对导航技术领域专业人才培养工作,提出了新的更高的要求。

本系列教材力求将本科生的专业教学与研究生的专业教学统筹考虑,包括

了《导航技术基础》《惯性传感器技术》《惯性导航系统技术》《卫星导航技术》《导航系统设计与综合实验》五本本科生教材,以及《自主导航技术》和《导航技术及其应用》两本研究生教材。其中,本科生教材侧重介绍导航技术的基本概念、基础理论与方法、常用导航系统的基本原理及其应用等方面的内容;研究生教材主要面向武器装备应用,重点介绍自主导航和组合导航的难点问题、关键技术、典型应用案例等方面的内容。为了兼顾系列教材的系统性与每本教材的独立性,研究生教材的部分内容与本科生教材稍有重复。

《导航技术基础》主要介绍导航技术涉及的基本概念与基础知识、惯性导航、无线电导航、特征匹配导航、天文导航、组合导航等内容。《惯性传感器技术》主要介绍转子陀螺仪、光学陀螺仪、振动陀螺仪、微机械陀螺仪、摆式加速度计等典型惯性传感器的工作原理、结构特点、精度测试与环境实验等内容。《惯性导航系统技术》重点介绍了捷联惯性导航系统的基本原理、导航方程、导航算法、误差分析、初始对准、误差标定与测试等内容。《卫星导航技术》主要介绍卫星导航基本原理、卫星导航信号与处理、卫星导航定位误差分析、卫星导航差分技术、卫星导航定姿技术、卫星导航对抗技术等内容。《导航系统设计与综合实验》为课程实验教材,突出技术与应用的结合,重点介绍典型惯性传感器和捷联惯性导航系统的概要设计、结构设计、电气系统设计、软件设计,以及惯性传感器误差补偿、系统标定与测试、综合实验方法等内容。《自主导航技术》比较系统地介绍了自主导航的主要理论方法与应用技术,并对惯性/多传感器组合导航系统在陆、海、空、天等领域的应用要求和特点进行了分析。《导航技术及其应用》是面向研究生案例课程教学的教材,主要介绍惯性导航、定位定向、卫星导航、特征匹配导航等导航技术在武器装备中的典型应用案例。

在编写本系列教材的过程中,得到了国防科学技术大学导航技术实验室其他同事的大力帮助,国防工业出版社辛俊颖编辑对系列教材的出版给予了极大的支持和帮助,在此一并表示诚挚的感谢。

导航技术涉及诸多学科的前沿,理论与技术的发展也还在与时俱进,鉴于编著者水平所限,书中疏漏和错误之处在所难免,恳请读者批评指正。

《导航技术系列教材》

编委会

2015年4月

前 言

导航技术的发展源于人类社会早期的军事和生产活动对方位识别或位置确定的需求,其发展历史几乎可以追溯到公元前 2600 年左右。今天,人类活动空间不断拓展,对导航技术的需求日益增长,导航技术得到飞速发展,拥有天文导航、惯性导航、无线电导航、卫星导航、特征匹配导航(如地磁匹配、重力匹配、图像匹配等)、多传感器组合导航、基于网络的协同导航、仿生导航等诸多技术分支,其应用涉及了航空、航海、航天、陆地交通运输等人类活动各个领域。

在一些特殊的应用领域,特别是军事应用领域,导航技术发挥着不可或缺的作用。例如,潜艇水下航行、远程轰炸机、远程无人侦察机、航天器星际飞行等,都要求运动载体在与外界不发生任何声、光、电等信息交互的情况下,能够完全依靠自身所携带的设备完成导航任务。这类应用需求牵引出了导航技术的一个重要发展方向,即自主导航技术。惯性导航和天文导航是目前发展比较成熟的两种典型的自主导航技术。

根据不同的导航需要,运动载体有时仅采用单一的自主导航手段就能满足要求,有时则必须将多种自主导航手段组合起来使用才能满足要求。对武器装备而言,组合导航通常是以惯性导航为基础,再辅以其它导航手段,如天文导航、特征匹配导航、视觉导航等。自主导航技术涉及近代数学、物理学、力学、天文学、光学、材料学以及微电子技术、计算机技术、通信技术等诸多学科领域,内容十分丰富。

本书作为导航技术专业的研究生教材,比较系统地介绍了自主导航的基础理论与应用技术。全书共分 6 章。第 1 章介绍自主导航涉及的基本概念、常用坐标系和时间系统等内容。第 2 章介绍惯性导航,包括惯性导航系统组成、惯性导航方程、惯性导航算法、惯性导航误差分析、惯性导航系统误差标定与补偿、惯性导航系统初始对准等内容。第 3 章介绍天文导航,包括天文导航的基本概念、航海天文导航、航天天文导航等内容。第 4 章介绍惯性/卫星组合导航,包括卫星导航原理与误差分析、惯性/卫星组合导航方程、惯性/卫星组合定姿方法及 Micro PNT 技术等内容。第 5 章介绍惯性/特征匹配组合导航,包括特征匹配导航基本原理与方法、地形匹配导航、图像匹配导航、地磁匹配导航、重力匹配导航等内容。第 6 章介绍惯性基组合导航应用案例,包括组合导航算法、陆用自主导

航、潜航器自主导航、水面舰艇自主导航、制导航弹组合导航等内容。

本书第1章由胡小平和吴美平执笔,第2章由吴文启、潘献飞、练军想执笔,第3章由胡小平、王玉杰、先治文、马涛执笔,第4章由逯亮清和何晓峰执笔,第5章由穆华、张开东和蔡劭琨执笔,第6章由练军想、李涛和唐康华执笔。全书由胡小平和潘献飞统稿。

在编写本书的过程中,得到刘伟、张红良、刘科、毛军、冯春妮、郑鹏程等同事的大力帮助,国防工业出版社辛俊颖编辑对本书的出版给予了极大的支持和帮助,在此一并表示诚挚的谢意。

自主导航涉及多门学科领域的技术前沿,其理论与技术还在不断发展,鉴于编著者水平所限,书中疏漏和错误之处在所难免,恳请读者批评指正。

编著者

2015年7月

目 录

第1章 绪论	1
1.1 导航的基本概念	1
1.2 常用坐标系	2
1.2.1 常用坐标系的定义	3
1.2.2 坐标转换矩阵	5
1.3 时间系统	6
参考文献	8
第2章 惯性导航	9
2.1 基本原理	9
2.1.1 惯性导航的基本概念	9
2.1.2 平台式惯性导航系统的基本原理	10
2.1.3 捷联式惯性导航系统的基本原理	12
2.2 惯性导航力学编排方程	13
2.2.1 速度微分方程——比力方程	13
2.2.2 位置微分方程	16
2.2.3 平台式惯性导航系统的平台指令角速度	16
2.2.4 捷联惯性导航姿态微分方程	17
2.2.5 极区惯性导航力学编排方程	23
2.3 捷联惯性导航算法	29
2.3.1 姿态更新算法	30
2.3.2 速度更新算法	46
2.3.3 位置更新算法	54
2.3.4 捷联惯性导航算法的新发展	54
2.4 惯性导航系统误差分析	55
2.4.1 惯性器件误差模型	55
2.4.2 捷联惯性导航系统误差模型	64

2.4.3	惯性导航系统误差特性分析	68
2.4.4	惯性导航系统的精度评估	73
2.5	惯性导航系统标定	78
2.5.1	基于高精度转台的标定	78
2.5.2	基于模观测的标定	84
2.5.3	系统级标定	89
2.6	惯性导航系统初始对准	92
2.6.1	初始对准基本原理	92
2.6.2	自对准	92
2.6.3	传递对准	99
	参考文献	103
第3章	天文导航	105
3.1	球面天文学的基本概念	106
3.1.1	天球与天球坐标	106
3.1.2	天体的视运动	108
3.1.3	天文年历与天文钟	110
3.2	航海天文导航	111
3.2.1	航海天文定位	111
3.2.2	航海天文定向	118
3.2.3	太阳偏振光定向原理	122
3.3	航天天文导航	130
3.3.1	航天天文导航的位置面	131
3.3.2	航天天文导航的简化量测方程	134
3.3.3	脉冲星导航原理	149
	参考文献	155
第4章	惯性/卫星组合导航	156
4.1	引言	156
4.1.1	卫星导航系统	156
4.1.2	卫星定位方式	157
4.1.3	卫星导航的主要误差源	158
4.1.4	惯性/卫星组合导航	161
4.2	惯性/卫星组合方程	165
4.2.1	惯性/卫星松组合导航方程	166

4.2.2	惯性/卫星紧组合导航方程	170
4.2.3	惯性/卫星深组合导航方程	171
4.2.4	组合方式的比较分析	176
4.2.5	基于软件接收机的组合导航	180
4.3	惯性/卫星组合定姿	181
4.3.1	卫星载波相位定姿原理	182
4.3.2	定姿模糊度求解	187
4.3.3	惯性/卫星重调式组合定姿	190
4.3.4	惯性/卫星滤波式组合定姿	192
4.4	Micro-PNT 技术	196
4.4.1	应用需求	196
4.4.2	Micro-PNT 的关键技术	197
	参考文献	199
第 5 章	惯性/特征匹配组合导航	200
5.1	基本方法	201
5.1.1	适配性分析	201
5.1.2	特征匹配及组合导航算法	207
5.2	惯性/地形匹配组合导航	212
5.2.1	高度测量传感器	212
5.2.2	TERCOM 系统	214
5.2.3	SITAN 系统	214
5.3	惯性/图像匹配组合导航	218
5.3.1	图像传感器	218
5.3.2	图像匹配技术	221
5.3.3	图像匹配结果及组合模型	222
5.4	惯性/地磁匹配组合导航	224
5.4.1	地磁场特征	225
5.4.2	地球位场延拓方法	226
5.4.3	地磁测量误差补偿方法	232
5.4.4	惯性/地磁匹配组合导航水下试验案例	236
5.5	惯性/重力匹配组合导航	240
5.5.1	地球重力场	240
5.5.2	重力测量	242
5.5.3	重力匹配 EKF 模型	243

5.5.4 典型系统	246
参考文献	248
第6章 惯性基组合导航应用案例	249
6.1 组合导航算法	249
6.1.1 最小二乘算法	249
6.1.2 卡尔曼滤波算法	251
6.2 陆用自主导航	252
6.2.1 陆用惯导系统的零速修正	253
6.2.2 陆用惯性导航系统行进间初始对准	256
6.2.3 典型案例	259
6.3 潜航器自主导航	264
6.3.1 多普勒计程仪测速原理	265
6.3.2 多普勒计程仪参数标定	266
6.3.3 INS/DVL 自主导航滤波器模型	266
6.3.4 典型案例	269
6.4 水面舰艇自主导航	272
6.4.1 惯导系统初始对准和标校	273
6.4.2 典型案例	275
6.5 制导航弹组合导航	278
6.5.1 系统设计	279
6.5.2 制导航弹组合导航算法	280
6.5.3 典型案例	282
参考文献	287

第1章 绪 论

从技术层面讲,导航技术可谓百花齐放,包括了天文导航、惯性导航、无线电导航、卫星导航、特征匹配导航(如地磁匹配导航、重力匹配、图像匹配等)、激光导航、多传感器组合导航、基于网络的协同导航、仿生导航等。涉及数学、物理学、力学、天文学、光学、材料学,以及微电子技术、计算机技术、通信技术等多学科领域,内容非常丰富。从应用层面看,导航技术可谓不可或缺,无论是在军事领域,还是在人类活动的其他各个领域都得到了越来越广泛的应用。本章简要介绍与自主导航相关的基本概念、常用坐标和时间系统。

1.1 导航的基本概念

在导航技术学术界,并没有关于导航的普遍认同的严格定义。《简明牛津辞典》(Concise Oxford Dictionary)的定义是:“通过几何学、天文学、无线电信号等任何手段确定或规划船舶、飞机的位置及航迹的方法”。中国《惯性技术词典》将导航定义为:“通过测量并输出载体的运动速度和位置,引导载体按要求的速度和轨迹运动”。本书作者认为,导航的概念应当体现“引导航行”的意思,因此,将导航定义为:“引导舰船、车辆、飞机、航天器等运动载体或人员安全准确地沿着所选定的航线到达目的地的过程”。

上述关于导航的定义并无本质区别,只是从不同的侧面表述了导航所需要包含的要素。无论是哪种定义,有两点是一致的:其一,导航的对象是运动载体或人员(有时也统称为导航用户),完成导航任务需要及时确定导航对象的位置和速度,有时还需要确定运动载体的航向、加速度、姿态等其它运动参数(通常将这些运动参数统称为导航参数);其二,导航系统对用户应该有引导作用。因此,导航信息应包括导航参数和引导指令。获得导航参数的基本原理和技术措施多种多样,这就发展出了惯性导航、天文导航、无线电导航、卫星导航等多种导航手段。如果将两种或多种导航手段综合利用,就称为组合导航。

严格地说导航包含了导航科学和导航技术两类问题。导航理论、导航传感器测量原理、导航误差机理等属于导航科学的范畴,而导航传感器技术和导航系统技术及其应用、航迹规划与保持等属于导航技术的范畴。科学与技术的进步是循序渐进和相互促进的,导航科学与导航技术的发展也是如此。因此,人们习惯将导航科学与导航技术统称为导航技术。针对不同的导航对象,导航技术有

时称为制导技术(例如导弹)或领航技术(例如飞机、舰船)。

完成导航任务所需的仪器设备统称为导航系统。导航传感器和导航计算机是导航系统的核心部件。导航传感器是用来测量与导航有关的物理量(如速度、加速度)的装置,导航计算机是完成数据采集、处理和解算并输出导航信息的装置。在惯性导航系统中,加速度计和陀螺仪是导航传感器,用于测量运动载体的视加速度和姿态角(或姿态角增量、姿态角变化率),而在卫星导航系统中,卫星接收机可视为导航传感器和导航计算机的组合物,不仅可以测量用户相对于导航卫星的距离或距离变化率,同时还能够输出用户的位置(有的接收机还可以输出速度和航向)。测量用户的运动参数可以利用各种不同的导航传感器,因此也就发展出了各种类型的导航系统,例如,惯性导航系统、天文导航系统、卫星导航系统、无线电导航系统等。导航系统有的是全部安装在运动载体上,能够独立工作,例如,惯性导航系统和天文导航系统;也有的是除用户部分外还需要借助其他外部设施才能工作,例如,卫星导航系统和无线电导航系统。

导航过程可以是人参与的也可以是自动实现的。因此,通常将导航分为自主导航与非自主导航两大类。所谓自主导航,是指运动载体完全依靠自身所携带的设备,自主地完成导航任务,与外界不发生任何声、光、电等信息交互。否则,称为非自主导航。显然自主导航具有隐蔽性好、工作不受外界条件(自然、非自然)的影响等特点,具有重要的军事应用价值。但是,应该指出的是自主导航至今没有严格和统一的定义。针对航天器自主导航问题,美国学者 Lemay 提出用下列四个特点来界定自主导航的概念:①自给或者独立;②实时;③无信号发射;④不依靠地面站。惯性导航和天文导航是典型的自主导航,无线电导航和声纳导航是典型的非自主导航。

1.2 常用坐标系

在简单的力学问题中,描述物体相对于地球的运动时,一般假设地球是一个惯性坐标系,而忽略它的自转,但在导航中却不能这样假设,必须考虑地球自转对于导航计算的影响。导航也是一个多坐标系问题:惯性传感器测量的是其相对于惯性坐标系的运动,全球定位系统(GPS)测量的是接收机天线相对于一组卫星星座的位置和速度,而用户想知道的是他们相对于地球的位置。因此,为了实现精确导航,必须对不同坐标系之间的关系进行严格建模。

正交坐标系有 6 个自由度:原点 O 的位置和 x 、 y 和 z 三个轴的方向,而这 6 个自由度只能在另外一个为之定义的坐标系中才能表示,如图 1-2-1 所示。任何导航问题至少包括两个坐标系:一个载体坐标系和一个参考坐标系。载体坐标系描述待导航载体的位置或方向,而参考坐标系描述已知物体,例如地球。载体相对于参考坐标系的位置和方向是待求的。通常情况下,很多导航问题涉及

的参考坐标系不止一个,甚至载体坐标系也不止一个。

任何两个坐标系之间都可存在相对位置和姿态关系,也可存在相对速度、相对加速度和相对旋转关系等。虽然描述姿态的方法有多种,但对应具体的方法,两个坐标系之间的相对姿态是一组唯一的数字,而其他运动学参量的描述却不唯一,矢量就是其中一种。矢量可以沿着任何三个互相垂直的坐标轴分解。举例来说,坐标系 α 相对于坐标系 β 的位置可以用坐标系 α 的轴、坐标系 β 的轴,或者第三个坐标系 γ 的轴来表示。这里,矢量的上标表示在该坐标系中描述矢量,即投影坐标系。注意,定义投影坐标系时,原点的定义不是必需的。

导航中常用的坐标系包括:地心惯性坐标系(Earth-Centered Inertial Frame, ECI)、地心地固坐标系(Earth Centered Earth Fixed Frame, ECEF)、当地地理坐标系和载体坐标系等。

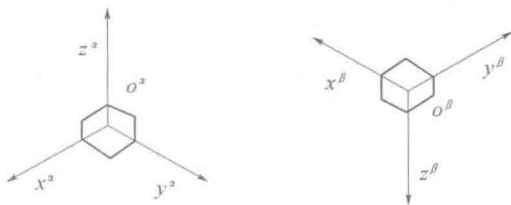


图 1-2-1 两个正交坐标系

1.2.1 常用坐标系的定义

1. 地心惯性坐标系 $O_E - X_I Y_I Z_I$

在物理学上,惯性坐标系是指相对于宇宙其他部分而言没有加速度和转动的坐标系。但由这种定义所确定的惯性坐标系并不是唯一的,在导航中,常用的是一个专门的惯性坐标系——地心惯性坐标系,简记为*i*系。如图 1-2-2 所示,地心惯性坐标系以地心为原点(O_E); $O_E X_I$ 轴在平赤道面内指向平春分点,由于春分点随时间变化具有进动性,根据 1976 年国际天文协会决议,1984 年起采用新的标准历元,将 2000 年 1 月 15 日的平春分点作为基准方向; $O_E Z_I$ 轴垂直于赤道平面,与地球自转轴重合,指向北极; $O_E Y_I$ 轴的方向是使该坐标系成为右手直角坐标系的方向。

严格地讲,地心惯性坐标系并不是一个真正意义上的惯性坐标系,因为地球在围绕太阳运动的轨道上受到加速度影响,它的旋转轴在缓慢地移动,而且整个银河系也在旋转。但对于导航应用而言,地心惯性坐标系是惯性坐标系的一种足够精确的近似。

2. 地心地固坐标系 $O_E - X_E Y_E Z_E$

地心坐标系的原点在地心 O_E ,轴 $O_E X_E$ 在赤道平面内指向某时刻 t_0 的起始

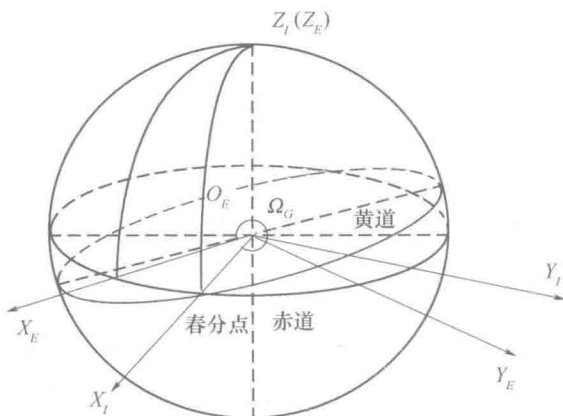


图 1-2-2 地心惯性坐标系与地心地固坐标系

子午线(通常取格林威治天文台所在子午线),轴 $O_E Z_E$ 垂直于赤道平面指向北极,轴 $O_E Y_E$ 的方向是使得该坐标系成为右手直角坐标系的方向,如图 1-2-2 所示。由于坐标轴 $O_E X_E$ 与所指向的子午线随地球一起转动,因此地心坐标系是一个运动参考系,简记为 e 系,也常简称为地球系。

3. 载体坐标系 $O_b - x_b y_b z_b$

载体坐标系的原点 o_b 为载体质心。 $o_b x_b$ 轴为载体对称轴,指向载体前方。 $o_b y_b$ 轴垂直于主对称面,指向右方。 $o_b z_b$ 轴在载体主对称面内垂直于轴 $o_b x_b$,指向使得载体坐标系成为右手直角坐标系的方向,即下方,如图 1-2-3 所示。这一坐标系简记为 b 系。

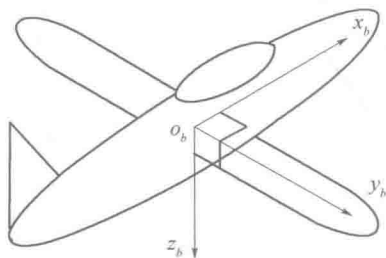


图 1-2-3 载体坐标系

4. 地理坐标系 $O - NED$

坐标原点 O 为载体质心在大地水准面上的投影, N 轴为地理真北; E 轴为地理东; D 轴垂直于参考椭球面,指向地球内部。一般简记为 g 系。

地理坐标系各轴根据不同应用有不同的取法,有时也采用“北、天、东”、“东、北、天”等不同顺序构成右手直角坐标系。由于北向轴和东向轴在地球两极处的不确定性,导致当地水平地理坐标系的一个主要缺点是在地球两极存在

奇异性。因此,采用此坐标系为导航坐标系的导航方程机械编排不适合在极区附近使用。

1.2.2 坐标转换矩阵

1. 方向余弦矩阵

坐标转换矩阵是一个 3×3 的矩阵,用符号 C_{α}^{β} 表示,用于将矢量从一个投影坐标系转换到另一个投影坐标系。其中,下标表示源坐标系,上标表示转换坐标系。坐标转换矩阵的行对应转换坐标系,列对应源坐标系,即

$$\mathbf{x}_{\delta\gamma}^{\beta} = C_{\alpha}^{\beta} \mathbf{x}_{\delta\gamma}^{\alpha} \quad (1-2-1)$$

其中, $\mathbf{x}$ 为任意矢量。当坐标转换矩阵用于表示姿态时,更一般的表示方法是:用上标表示参考坐标系 β ,用下标表示载体坐标系 α 。因此,这个矩阵表示从载体坐标系到参考坐标系的转换,与欧拉角的习惯表示相反。同理,也可以用 C_{β}^{α} 表示从参考坐标系到载体坐标系的转换。

图 1-2-4 表示坐标转换矩阵的每个元素在将一个矢量从坐标系 α 变换到坐标系 β 投影轴上所起的作用。整理式(1-2-1),坐标转换矩阵可由任意一个矢量在这两个坐标系中表示的两组坐标值的乘积得到:

$$C_{\alpha}^{\beta} = \frac{\mathbf{x}_{\delta\gamma}^{\beta} \mathbf{x}_{\delta\gamma}^{\alpha T}}{|\mathbf{x}_{\delta\gamma}|^2} \quad (1-2-2)$$

虽然式(1-2-2)代入式(1-2-1)成立,但由于不同矢量对应的 C_{α}^{β} 不同,该方法定义的 C_{α}^{β} 不唯一,因而须采用图 1-2-4 所示的方法对 C_{α}^{β} 严格定义。

$$C_{\alpha}^{\beta} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \alpha_x \rightarrow \beta_x & \alpha_y \rightarrow \beta_x & \alpha_z \rightarrow \beta_x \\ \hline \alpha_x \rightarrow \beta_y & \alpha_y \rightarrow \beta_y & \alpha_z \rightarrow \beta_y \\ \hline \alpha_x \rightarrow \beta_z & \alpha_y \rightarrow \beta_z & \alpha_z \rightarrow \beta_z \\ \hline \end{array}$$

图 1-2-4 坐标转换矩阵各元素的功能

坐标转换矩阵各元素可由两个坐标系的单位矢量点乘得到,结果分别等于各个相应轴夹角的余弦:

$$C_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{\beta x} \cdot \mathbf{u}_{\alpha x} & \mathbf{u}_{\beta x} \cdot \mathbf{u}_{\alpha y} & \mathbf{u}_{\beta x} \cdot \mathbf{u}_{\alpha z} \\ \mathbf{u}_{\beta y} \cdot \mathbf{u}_{\alpha x} & \mathbf{u}_{\beta y} \cdot \mathbf{u}_{\alpha y} & \mathbf{u}_{\beta y} \cdot \mathbf{u}_{\alpha z} \\ \mathbf{u}_{\beta z} \cdot \mathbf{u}_{\alpha x} & \mathbf{u}_{\beta z} \cdot \mathbf{u}_{\alpha y} & \mathbf{u}_{\beta z} \cdot \mathbf{u}_{\alpha z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \mu_{\beta x, \alpha x} & \cos \mu_{\beta x, \alpha y} & \cos \mu_{\beta x, \alpha z} \\ \cos \mu_{\beta y, \alpha x} & \cos \mu_{\beta y, \alpha y} & \cos \mu_{\beta y, \alpha z} \\ \cos \mu_{\beta z, \alpha x} & \cos \mu_{\beta z, \alpha y} & \cos \mu_{\beta z, \alpha z} \end{pmatrix} \quad (1-2-3)$$

其中, $\mathbf{u}_i$ 为 i 轴的单位矢量, $\mu_{i,j}$ 为 i 轴和 j 轴的夹角,因此该矩阵常被称为方向余弦阵。