·经/济/科/学/译/丛·

Solutions Manual for Microeconomic Theory

Mas-Colell, Whinston, and Green

MWG《微观经济理论》习题解答

原千晶（Chiaki Hara）
伊利亚·西格尔（Ilya Segal）　著
史蒂夫·塔德利斯（Steve Tadelis）

中国人民大学出版社

·经／济／科／学／译／丛·

Solutions Manual for Microeconomic Theory

Mas-Colell, Whinston, and Green

MWG《微观经济理论》习题解答

原千晶（Chiaki Hara）
伊利亚·西格尔（Ilya Segal）　著
史蒂夫·塔德利斯（Steve Tadelis）

曹　乾　译

中国人民大学出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

MWG《微观经济理论》习题解答/原千晶等著；曹乾译. —北京：中国人民大学出版社，2016.1
（经济科学译丛）
书名原文：Solutions Manual for Microeconomic Theory
ISBN 978-7-300-22306-3

Ⅰ.①M… Ⅱ.①原… ②曹… Ⅲ.①微观经济学-题解 Ⅳ.①F016-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 001517 号

经济科学译丛
MWG《微观经济理论》习题解答
原千晶　伊利亚・西格尔　史蒂夫・塔德利斯　著
曹　乾　译
MWG《Weiguan Jingji Lilun》Xiti Jieda

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	三河市汇鑫印务有限公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16 开本	**版　　次**	2016 年 1 月第 1 版
印　　张	34.25 插页 1	**印　　次**	2016 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	778 000	**定　　价**	75.00 元

《经济科学译丛》总序

中国是一个文明古国，有着几千年的辉煌历史。近百年来，中国由盛而衰，一度成为世界上最贫穷、落后的国家之一。1949 年中国共产党领导的革命，把中国从饥饿、贫困、被欺侮、被奴役的境地中解放出来。1978 年以来的改革开放，使中国真正走上了通向繁荣富强的道路。

中国改革开放的目标是建立一个有效的社会主义市场经济体制，加速发展经济，提高人民生活水平。但是，要完成这一历史使命绝非易事，我们不仅需要从自己的实践中总结教训，也要从别人的实践中获取经验，还要用理论来指导我们的改革。市场经济虽然对我们这个共和国来说是全新的，但市场经济的运行在发达国家已有几百年的历史，市场经济的理论亦在不断发展完善，并形成了一个现代经济学理论体系。虽然许多经济学名著出自西方学者之手，研究的是西方国家的经济问题，但他们归纳出来的许多经济学理论反映的是人类社会的普遍行为，这些理论是全人类的共同财富。要想迅速稳定地改革和发展我国的经济，我们必须学习和借鉴世界各国包括西方国家在内的先进经济学的理论与知识。

本着这一目的，我们组织翻译了这套经济学教科书系列。这套译丛的特点是：第一，全面系统。除了经济学、宏观经济学、微观经济学等基本原理之外，这套译丛还包括了产业组织理论、国际经济学、发展经济学、货币金融学、公共财政、劳动经济学、计量经济学等重要领域。第二，简明通俗。与经济学的经典名著不同，这套丛书都是国外大学通用的经济学教科书，大部分都已发行了几版或十几版。作者尽可能地用简明通俗的语言来阐述深奥的经济学原理，并附有案例与习题，对于初学者来说，更容易理解与掌握。

经济学是一门社会科学，许多基本原理的应用受各种不同的社会、政

治或经济体制的影响，许多经济学理论是建立在一定的假设条件上的，假设条件不同，结论也就不一定成立。因此，正确理解掌握经济分析的方法而不是生搬硬套某些不同条件下产生的结论，才是我们学习当代经济学的正确方法。

本套译丛于 1995 年春由中国人民大学出版社发起筹备并成立了由许多经济学专家学者组织的编辑委员会。中国留美经济学会的许多学者参与了原著的推荐工作。中国人民大学出版社向所有原著的出版社购买了翻译版权。北京大学、中国人民大学、复旦大学以及中国社会科学院的许多专家教授参与了翻译工作。前任策划编辑梁晶女士为本套译丛的出版做出了重要贡献，在此表示衷心的感谢。在中国经济体制转轨的历史时期，我们把这套译丛献给读者，希望为中国经济的深入改革与发展做出贡献。

《经济科学译丛》编辑委员会

译者序

本习题解答配套于由安德鲁·马斯-克莱尔、迈克尔·D·温斯顿、杰里·R·格林合著的《微观经济理论》。《微观经济理论》一书自出版以来，得到了全球经济学学者的广泛关注和好评。世界优秀大学已普遍采用此书作为教材，它已成为经济学者必备的一本教科书，被誉为微观经济理论的"圣经"。

经济学的学习，尤其是高级经济学的学习，非常类似于数学课程的学习，都需要做大量的习题。因此，《微观经济理论》课后提供了大量习题，难度不一：作者按照题目难度将其划分为三个等级：A（容易）、B（较难）和C（很难）。不少题目直接源于经典文献。我建议读者尽力解答这些题目，对于难度为C的题目，若读者感觉超出自己的能力，可以直接看参考答案。

《微观经济理论》教材以及本习题解答书都由我翻译。尽管绝大部分术语都是标准化的，但个别术语难免带有译者自身的风格，所以最好搭配由我翻译的《微观经济理论》一书使用。

由于原书存在着不少笔误，译者在翻译过程中已尽可能改正了一些明显的错误，但由于时间有限加之能力有限，译者不可能做到将所有习题都推演一遍，也不可能发现原书中所有错误，期待读者指正。我的邮箱为 caoqianseu@163.com。

曹　乾

东南大学，江苏南京

序

《微观经济理论》课后习题解答这个任务比较艰巨，工作量很大。但是看到最终结果，我们还是感到欣慰：我们花费的时间是值得的。我们一直试图做到简洁、详尽并举，并尽量减少这两个目标之间的冲突。对于个别题目，我们推荐读者参阅具体教材和文献。

原千晶（Chiaki Hara）做了海量工作，他解答了《微观经济理论》第Ⅰ部分和第Ⅳ部分习题。伊利亚·西格尔（Ilya Segal）提供了第10章和第22章习题的解答。史蒂夫·塔德利斯（Steve Tadelis）完成了第11、13、14、21和23章的习题解答，并且完成了《微观经济理论》第Ⅱ部分习题的解答任务。最后，伊利亚和史蒂夫一起完成了第12章的习题解答。本书习题解答的一些早期工作是由马克·纳克曼（Marc Nachman）完成的，我们感谢他为《微观经济理论》第Ⅱ部分和第12章习题解答打下的基础。

我们感谢安德鲁·马斯-克莱尔和迈克尔·温斯顿，感谢他们与我们的讨论。我们也感谢教授Ec2010a/b课程的很多教师，这是哈佛大学微观经济理论的系列课程，他们使用本教材的早期版本来教学，并提供了很多帮助。这个名单太长，此处我们不再一一列出。尽管这本习题集想必还存在一些错误，我们希望师生都能从中获益，这将使得《微观经济理论》这本好书更加有用。

最后，原千晶感谢他的父母和他四年来所待过的各个大学。伊利亚·西格尔感谢奥尔佳（Olga），感谢她坚定的支持。史蒂夫·塔德利斯感谢依雷特（Irit），感谢她一直以来的鼓励和支持。

原千晶
伊利亚·西格尔
史蒂夫·塔德利斯
1996年6月

目　录

第四部分　一般均衡

第五部分　福利经济学与激励

第一部分

个人决策

第 1 章 偏好与选择

习题与参考答案

1.B.1[B] 证明命题 1.B.1 中的性质（iii）。

【参考答案】

证明： 由于 $y \succ z$ 意味着 $y \succsim z$，由传递性可知 $x \succsim z$。反证一下，假设 $z \succsim x$。由于 $y \succsim z$，根据传递性可知 $y \succsim x$。但这与 $x \succ y$ 矛盾。因此，我们不能有 $z \succsim x$。因此，$x \succ z$。■

1.B.2[A] 证明命题 1.B.1 中的性质（i）和（ii）。

【参考答案】

证明：

证性质（i）。根据完备性可知，对于每个 $x \in X$，我们都有 $x \succsim x$。因此，在 X 中不存在满足 $x \succ x$ 的 x。所以，$\succ$ 为非反身的。假设 $x \succ y$ 和 $y \succ z$，因此，$x \succ y \succsim z$。根据命题 1.B.1 中的性质（iii）［见习题 1.B.1］可知，$x \succ z$。因此，$\succ$ 是传递的。性质（i）证毕。

证性质（ii）。因为对于每个 $x \in X$ 我们都有 $x \succsim x$，所以对于 $x \in X$ 有 $x \sim x$。因此，$\sim$ 是反身的。假设 $x \sim y$ 和 $y \sim z$，则 $x \succsim y$，$y \succsim z$，$y \succsim x$，$z \succsim y$。根据传递性可知，这意味着 $x \succsim z$ 和 $z \succsim x$。因此，$x \sim z$。假设 $x \sim y$，于是 $x \succsim y$ 和 $y \succsim x$。因为，$y \succsim x$ 和 $x \succsim y$（这只是将前面的结论重写了一遍而已），所以 $y \sim x$。因此，$\sim$ 是对称的。性质（iii）证毕。■

1.B.3[B] 证明若 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是严格递增的函数，以及 $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是个代表偏好关系 $\succsim$ 的效用函数，则由 $v(x) = f(u(x))$ 定义的函数 $v: X \rightarrow \mathbb{R}$ 也是个代表偏好关系 $\succsim$ 的效用函数。

【参考答案】

证明： 令 $x \in X$ 和 $y \in X$。因为 $u(\cdot)$ 代表着偏好关系 $\succsim$，所以 $x \succsim y$ 当且仅当 $u(x) \geqslant u(y)$。由于 $f(\cdot)$ 是严格递增的，$u(x) \geqslant u(y)$ 当且仅当 $f(u(x)) \geqslant f(u(y))$ 即 $v(x) \geqslant v(y)$。因此，$x \succsim y$ 当且仅当 $v(x) \geqslant v(y)$。所以，$v(\cdot)$ 也代表着偏好关系 $\succsim$。■

1.B.4[A] 考虑一个理性偏好关系 $\succsim$。证明若 $u(x) = u(y)$ 意味着 $x \sim y$，而且

$u(x)>u(y)$ 意味着 $x\succ y$，则 $u(\cdot)$ 是代表偏好关系$\succsim$的效用函数。

【参考答案】

证明： 首先，假设 $x\succsim y$，如果我们还有$y\succsim x$，则 $x\sim y$，从而有 $u(x)=u(y)$。另一方面，如果 $x\succsim y$，但 $y\succsim x$ 不成立，则 $x\succ y$，从而有 $u(x)>u(y)$。因此，如果$x\succsim y$，那么$u(x)\geqslant u(y)$。

现在反过来看。假设 $u(x)\geqslant u(y)$。如果我们有 $u(x)=u(y)$，那么 $x\sim y$，从而$x\succsim y$。另一方面，如果我们有 $u(x)>u(y)$，则$x\succ y$，从而 $x\succsim y$。因此，如果 $u(x)\geqslant u(y)$，那么$x\succsim y$。所以，$u(\cdot)$ 代表着$\succsim$。■

1.B.5^B 证明若 X 是有限的而且$\succsim$是 X 上的一个理性偏好关系，则存在一个能代表$\succsim$的效用函数。[提示：首先考虑下列特殊情形，即消费者对于 X 中任何两个元素的排序都是严格的（即不存在无差异的情形）；然后构造一个能代表这些偏好的效用函数；最后将你的论证扩展到一般情形。]

【参考答案】

证明： 由于 X 是有限的，假设它的元素数量为 N 个。我们首先用归纳法证明如果 X 中任何两个不同的元素不是无差异的，则存在一个效用函数。如果 $N=1$，则没有什么需要证明的，因为只需要对这个唯一的元素赋予任何数值即可。因此，令 $N>1$ 并假设上面的结论（效用函数的存在性）对于$N-1$为真。我们需要证明这个结论对于 N 也为真。将 X 记为 $X=\{x_1，\cdots，x_{N-1}，x_N\}$。根据我们的假设，$\succsim$可用 X 的子集即$\{x_1，\cdots，x_{N-1}\}$ 上的一个效用函数表示。不失一般性，我们可以假设 $u(x_1)>u(x_2)>\cdots>u(x_{N-1})$。

考虑以下三种情形：

情形 1：对于每个 $i<N$，$x_N\succ x_i$。

情形 2：对于每个 $i<N$，$x_i\succ x_N$。

情形 3：存在 $i<N$ 和 $j<N$，使得 $x_i\succ x_N\succ x_j$。

由于任何两个元素都不是无差异的，这三种情形是穷举的和互斥的。我们将说明在上述每种情形下，为了使得 $u(\cdot)$ 能代表整个 X 上的偏好关系$\succsim$，应该如何确定 $u(x_N)$ 的值。

如果是情形 1，那么将 $u(x_N)$ 的值取得比 $u(x_1)$ 大即可。如果是情形 2，将$u(x_N)$的值取得比 $u(x_{N-1})$ 小即可。现在假设我们面对的是情形 3。令 $I=\{i\in\{1，\cdots，N-1\}：x_i\succ x_{N+1}\}$ 和 $J=\{j\in\{1，\cdots，N-1\}：x_{N+1}\succ x_j\}$。完备性再加上不存在无差异关系这个假设意味着 $I\cup J=\{1，\cdots，N-1\}$。传递性意味着集合 I 和 J 都是“区间”，即如果 $i\in I$ 且 $i'<i$，那么 $i'\in I$；如果$j\in J$ 且$j'>j$，那么 $j'\in J$。令 $i^*=\max I$，那么 $i^*+1=\min J$。将 $u(x_N)$ 的值定位于开区间$(u(x_{i^*+1})，u(x_{i^*}))$。于是容易看出 $u(\cdot)$ 能代表整个 X 上的偏好关系$\succsim$。

现在假设 $X=\{x_1，\cdots，x_N\}$ 中的某两个元素可能是无差异的。对于每个$n=1，\cdots，N$，定义 $X_n=\{x_m\in X：x_m\sim x_n\}$。于是根据无差异$\sim$的反身性（参见命题 1.B.1（ii）），$\bigcup_{n=1}^{N}X_n=X$。另外，根据无差异$\sim$的传递性（参见命题 1.B.1（ii）），如果 $X_n\neq X_m$，则 $X_n\cap X_m\neq\varnothing$。因此，令 M 为 $\{1，\cdots，N\}$ 的一个子集，使得对于任何 $m\in M$ 和任何 $n\in M$ 但$m\neq n$，都有 $X=\bigcup_{m\in M}X_m$ 和$X_m\neq X_n$。我们定义 $\{X_m：m\in M\}$ 上的关系$\succsim^*$为 $x_m\succsim^* x_n$ 当且仅当$x_m\succsim x_n$。事实上，根据 M 的定义，$\{X_m：m\in M\}$ 中的任何两个不同元素都不是无差异的。因此，根据前面的结果，存在能代表$\succsim^*$关系的效用函数 $u^*(\cdot)$。于是定义$u：X\to\mathbb{R}$ 为$u(x_n)=u^*(x_m)$，若 $m\in M$ 且 $x_n\in X_m$。容易看出，根据传递性，$u(\cdot)$ 代表着$\succsim$。■

1.C.1[B] 考虑选择结构 $(\mathscr{B}, C(\cdot))$，其中，$\mathscr{B}=\{\{x, y\}, \{x, y, z\}\}$ 且 $C(\{x, y\})=\{x\}$。证明如果 $(\mathscr{B}, C(\cdot))$满足弱公理，那么我们必定有 $C(\{x, y, z\})=\{x\}$，$=\{z\}$ 或$=\{x, z\}$。

【参考答案】

证明：如果 $y\in C(\{x, y, z\})$，则弱公理意味着 $y\in C(\{x, y\})$，这与 $C(\{x, y\})=\{x\}$ 矛盾。因此，$y\notin C(\{x, y, z\})$。所以，$C(\{x, y, z\})\in\{\{x\}, \{y\}, \{x, z\}\}$。■

1.C.2[B] 证明弱公理（定义 1.C.1）等价于下列性质：

假设 B，$B'\in\mathscr{B}$，而且 x，$y\in B$ 和 x，$y\in B'$，那么如果 $x\in C(B)$ 且 $y\in C(B')$，我们必定有 $\{x, y\}\subset C(B)$ 和 $\{x, y\}\subset C(B')$。

【参考答案】

证明：容易看出，问题中的性质等价于下列性质：如果 B，$B'\in\mathscr{B}$，而且 x，$y\in B$ 和 x，$y\in B'$，以及 $x\in C(B)$ 且 $y\in C(B')$，那么我们有 $x\in C(B')$ 和 $y\in C(B)$。所以，我们只要证明这个性质和弱公理等价即可。

首先，假设弱公理已得到满足。假设 B，$B'\in\mathscr{B}$，而且 x，$y\in B$ 和 x，$y\in B'$，以及 $x\in C(B)$ 和$y\in C(B')$。将弱公理应用两次，即可得到 $x\in C(B')$ 和 $y\in C(B)$。因此，题目中的性质也得到了满足。

其次，假设我们的性质已得到满足，我们需要从这个性质推导出弱公理也得以满足的结论。令 $B\in\mathscr{B}$，x，$y\in B$，$x\in B'$ 和 $x\in C(B)$。另外，令 $B'\in\mathscr{B}$，x，$y\in B'$ 以及 $y\in C(B')$，于是上面的条件意味着$x\in C(B')$(和 $y\in C(B)$)。因此，满足弱公理。■

1.C.3[C] 假设选择结构 $(\mathscr{B}, C(\cdot))$满足弱公理。考虑下列两个可能的显示偏好关系，即$\succ^*$和$\succ^{**}$：

$x\succ^* y\Leftrightarrow$存在某个 $B\in\mathscr{B}$ 使得 x，$y\in B$，$x\in C(B)$ 和 $y\notin C(B)$；

$x\succ^{**} y\Leftrightarrow x\succsim^* y$ 但 $y\succsim^* x$ 不成立。

其中，$\succsim^*$是与定义 1.C.2 定义的显示性至少一样好的关系。

(a) 证明$\succ^*$和$\succ^{**}$在 X 上给出的关系是相同的；也就是说，对于任何 x，$y\in X$，我们有 $x\succ^* y\Leftrightarrow x\succ^{**} y$。如果 $(\mathscr{B}, C(\cdot))$不满足弱公理，这个结论还成立吗?

(b) $\succ^*$一定是传递的吗?

(c) 证明如果 $\mathscr{B}$ 含有 X 的所有三元子集（即这样的子集只含有三个元素），那么$\succ^*$是传递的。

【参考答案】

证明：证 (a)。假设 $x\succ^* y$，则存在某个 $B\in\mathscr{B}$ 使得 x，$y\in B$，$x\in C(B)$ 和$y\notin C(B)$，因此，$x\succsim^* y$。假设 $y\succsim^* x$，则存在 $B\in\mathscr{B}$ 使得 x，$y\in B$，$x\in C(B)$。但弱公理意味着 $y\in C(B)$，这就产生了矛盾。因此，如果$x\succ^* y$，我们就不能有 $y\succsim^* x$，因此，$x\succ^{**} y$。

另一方面，假设 $x\succ^{**} y$，则 $x\succsim^* y$，但 $y\succsim^* x$ 不成立。因此，存在某个 $B\in\mathscr{B}$ 使得 x，$y\in B$，$x\in C(B)$，而且如果对于任何$B'\in B$都有 x，$y\in B'$，那么 $y\notin C(B')$。特别地，$x\in C(B)$ 和$y\notin C(B)$。因此，$x\succ^* y$。

如果没有弱公理，上面的两个关系式无法得到保证。我们从上面的证明过程可以看到，弱公理未必能保证若 $x\succ^* y$ 则$x\succ^{**} y$。但是反过来说未必正确，我们举个例子来说明。定义 $X=\{x, y, z\}$，$\mathscr{B}=\{\{x, y\}, \{x, y, z\}\}$，$C(\{x, y\})=\{x\}$ 和 $C(\{x, y, z\})=\{y\}$。那么，$x\succ^* y$ 且 $y\succ^* x$，但下列两个关系即 $x\succ^* y$ 或$y\succ^* x$ 都不成立。

对于（b）。$\succ^*$ 未必是传递的。我们举个例子，定义 $X=\{x, y, z\}$，$\mathscr{B}=\{\{x, y\}, \{y, z\}\}$，$C(\{x, y\})=\{x\}$ 和 $C(\{y, z\})=\{y\}$。于是我们有 $x\succ^* y$ 和 $y\succ^* z$，但是我们没有 $x\succsim^* z$（因为 $\mathscr{B}$ 中的两个集合都不包含 $\{x, z\}$），因此，我们也不会有 $x\succ^* z$。

证（c）。根据命题 1. D. 2 的证明。如果 $\mathscr{B}$ 含有 X 的所有三元子集，则 $\succsim^*$ 是传递的。根据命题 1. B. 1（i），$\succ^{**}$ 是传递的。由于 $\succ^*$ 和 $\succ^{**}$ 是相同的，$\succ^*$ 也是传递的。

我们提供另外一种证明方法。令 $x, y, z\in X$，$x\succ^* y$ 和 $y\succ^* z$。于是，$\{x, y, z\}\in\mathscr{B}$，而且根据（a），我们还有 $x\succ^{**} y$ 和 $y\succ^{**} z$。因此，$y\succsim^* x$ 和 $z\succsim^* y$ 都不成立。由于 $\succsim^*$ 理性化了 $(\mathscr{B}, C(\cdot))$，这意味着 $y, z\notin C(\{x, y, z\})$。由于 $C(\{x, y, z\})\neq\varnothing$，$C(\{x, y, z\})=\{x\}$，因此 $x\succ^* z$。■

1. D. 1[B] 举出一个能被若干偏好关系理性化的选择结构的例子。注意：如果预算集族 $\mathscr{B}$ 包含了 X 的所有二元子集，则至多存在一个理性化的偏好关系。

【参考答案】

最简单的例子是 $X=\{x, y\}$，$\mathscr{B}=\{\{x\}, \{y\}\}$，$C(\{x\})=\{x\}$，$C(\{y\})=\{y\}$。于是，$X$ 上的任何理性偏好关系都能理性化 $C(\cdot)$。■

1. D. 2[A] 证明如果 X 是有限的，则任何理性偏好关系都能生成一个非空选择规则；也就是说，对于任何 $B\subset X$ 且 $B\neq\varnothing$，我们都有 $C(B)\neq\varnothing$。

【参考答案】

证明：根据习题 1. B. 5，令 $u(\cdot)$ 是个代表偏好关系 $\succsim$ 的效用函数。由于 X 是有限的，对于任何 $B\subset X$ 且 $B\neq\varnothing$，存在 $x\in B$ 使得对于所有 $y\in B$ 我们都有 $u(x)\geqslant u(y)$。于是，$x\in C^*(B, \succsim)$，因此，$C^*(B, \succsim)\neq\varnothing$。[这个题目也可以直接证明（不使用效用函数），但这种方法在本质上和习题 1. B. 5 的证明是相同的。] ■

1. D. 3[B] 令 $X=\{x, y, z\}$，考虑选择结构 $(\mathscr{B}, C(\cdot))$，其中：

$$\mathscr{B}=\{\{x,y\},\{y,z\},\{x,z\},\{x,y,z\}\}$$

$C\{x, y\}=\{x\}$，$C\{y, z\}=\{y\}$ 和 $C\{x, z\}=\{z\}$。（和例 1. D. 1 相同。）证明 $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ 必定违背了弱公理。

【参考答案】

证明：反证。假设弱公理成立。如果 $x\in C(X)$，则 $x\in C(\{x, z\})$，这与 $C\{x, z\}=\{z\}$ 矛盾。如果 $y\in C(X)$，则 $y\in C(\{x, y\})$，这和 $C\{x, y\}=\{x\}$ 矛盾。如果 $z\in C(X)$，则 $z\in C(\{y, z\})$，这与 $C\{y, z\}=\{y\}$ 矛盾。因此，$(\mathscr{B}, C(\cdot))$ 必定违背弱公理。■

1. D. 4[B] 证明存在理性化偏好关系 $\succsim$ 的选择结构 $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ 满足**路径不变**（path-invariance）性质：对于任何两个 $B_1, B_2\in\mathscr{B}$，若 $B_1\cup B_2\in\mathscr{B}$ 且 $C(B_1)\cup C(B_2)\in\mathscr{B}$，则我们有 $C(B_1\cup B_2)=C(C(B_1)\cup C(B_2))$；也就是说，决策问题可以被安全地细分。进一步的讨论可参见 Plott（1973）。

【参考答案】

证明：令 $\succsim$ 在 $\mathscr{B}$ 上理性化了 $C(\cdot)$。令 $x\in C(B_1\cup B_2)$ 和 $y\in C(B_1)\cup C(B_2)$，则 $x\succsim y$，这是因为 $B_1\cup B_2\supset C(B_1)\cup C(B_2)$。于是，$x\in C(C(B_1)\cup C(B_2))$。

令 $x\in C(C(B_1)\cup C(B_2))$ 和 $y\in B_1\cup B_2$，则存在四种情形：

情形 1：$x\in C(B_1)$，$y\in B_1$。

情形 2：$x\in C(B_1)$，$y\in B_2$。

情形 3：$x\in C(B_2)$，$y\in B_1$。

情形 4：$x\in C(B_2)$，$y\in B_2$。

如果情形 1 或情形 4 为真，则从理性化的概念直接可知 $x\succsim y$。如果情形 2 为真，则选择任何 $z\in C(B_2)$，于是 $z\succsim y$。因为 $x\in C(C(B_1)\cup C(B_2))$，所以 $x\succsim z$。因此，根据传递性可知，$x\succsim y$。如果情形 3 为真，则选择任何 $z\in C(B_1)$，余下的论证类似情形 2。■

1.D.5^{C} 令 $X=\{x, y, z\}$ 和 $\mathscr{B}=\{\{x, y\}, \{y, z\}, \{z, x\}\}$。假设选择现在是随机的，也就是说，对于每个 $B\in\mathscr{B}$，$C(B)$ 是 B 中备选物上的频率分布。例如，如果 $B=\{x, y\}$，我们写成 $C(B)=(C_x(B), C_y(B))$，其中，$C_x(B)$，$C_y(B)$ 都非负且 $C_x(B)+C_y(B)=1$。我们说，随机选择函数 $C(\cdot)$ 可以**被偏好理性化**（rationalized by preferences），如果我们能够找到 X 上的关于六种可能（严格）偏好关系的一个概率分布 Pr，使得对于每个 $B\in\mathscr{B}$，$C(B)$ 正好是由 Pr 诱导出的选择频率。例如，如果 $B=\{x, y\}$，那么 $C_x(B)=\Pr(\{\succ: x\succ y\})$。这个概念源自 Thurstone (1927)，它引起了广泛的计量经济兴趣（事实上，它为可观测选择的误差项提供了理论支持）。

(a) 证明随机选择结构 $C(\{x, y\})=C(\{y, z\})=C(\{z, x\})=(1/2, 1/2)$ 可以被偏好理性化。

(b) 证明随机选择结构 $C(\{x, y\})=C(\{y, z\})=C(\{z, x\})=(1/4, 3/4)$ 不能被偏好理性化。

(c) 确定一个 $\alpha\in(0, 1)$，使得 $C(\{x, y\})=C(\{y, z\})=C(\{z, x\})=(\alpha, 1-\alpha)$ 从能被偏好理性化变为不能被偏好理性化。

【参考答案】

证明：

证 (a)。将下列 6 种可能的偏好每种都赋予概率 1/6：

$$x\succ y\succ z，x\succ z\succ y，y\succ x\succ z，y\succ z\succ x，z\succ x\succ y \text{ 和 } z\succ y\succ x。$$

证 (b)。如果给定的随机选择函数是可理性化的，那么下列偏好至少有一个为真的概率至多为 $3\times(1/4)=3/4$，这几个偏好为 $x\succ y$，$y\succ z$ 和 $z\succ x$。但是事实上，这三种偏好关系中至少有一种总是成立的，这是因为如果前两个不成立，则 $y\succ x$ 和 $z\succ y$。因此，传递性意味着第三个偏好关系成立。因此，给定的随机选择函数不是可理想化的。

证 (c)。我们可以使用与 (b) 类似的论证解得 $\alpha\geqslant 1/3$。由于

$$C(\{x,y\})=C(\{y,z\})=C(\{z,x\})=(\alpha,1-\alpha) \text{ 等价于}$$
$$C(\{y,x\})=C(\{z,y\})=C(\{x,z\})=(1-\alpha,\alpha)$$

如果将 (b) 中的观点应用于 $y\succ x$，$z\succ y$ 和 $x\succ z$，那么我们可以得到 $1-\alpha\geqslant 1/3$，也就是说，$\alpha\leqslant 2/3$。因此，为了使得题目给定的随机选择函数是可理性化的，α 的取值必定为 $\alpha\in[1/3, 2/3]$。而且，这个条件实际上也是充分的：对于任何 $\alpha\in[1/3, 2/3]$，对于下列每个偏好分别赋予概率 $\alpha-(1/3)$：$x\succ y\succ z$，$y\succ z\succ x$ 和 $z\succ x\succ y$；对于下列每个偏好分别赋予概率 $(2/3)-\alpha$：$x\succ z\succ y$，$y\succ x\succ z$ 和 $z\succ y\succ x$。于是我们得到了给定的随机选择函数。■