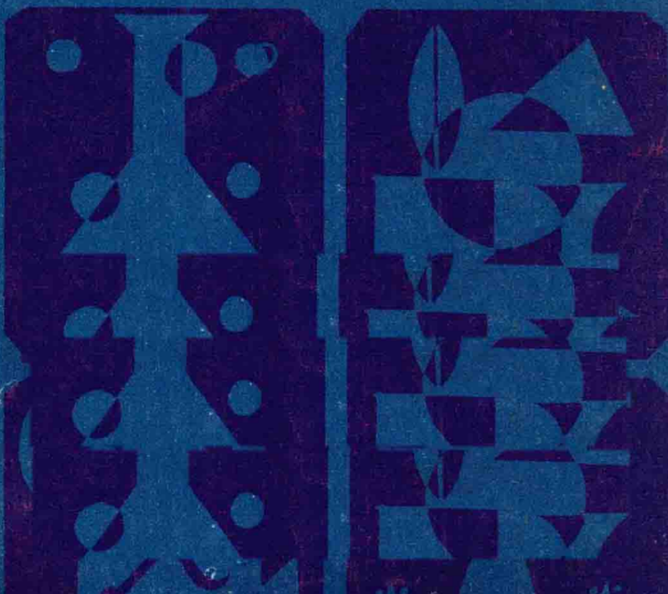
数理化通讯

（初中版）

全国十三所重点中学合编



2

新蕾出版社

目　录

目　录

综 述

思维力求严密

南京师大附中 马 明

让思维插上“想象”这个翅膀，固然可以在思维的无限领域中翱翔，但思维还必须严密，否则也是学不好数学的。

星期天我去小明家玩，我问他弟弟今年几岁，小明却对我说：“他三年后的年龄是他三年前的年龄的三倍。”这当然难不倒我。

设小明弟弟今年x岁，那么三年后便是（$x+3$）岁，三年前便是（$x-3$）岁，依题意有

$$x+3=3(x-3),$$

解得$x=6$（岁）。

用文字代表数以后，我们的思维过程就很清楚，但用时要慎重。

我们换个问题谈谈。

小明对我说，他找到了一个最大的自然数！他的方法与我刚才求“年龄”的方法一样：

设最大的自然数等于x，那么x^2也是自然数，而且不会比x小；当然，x^2也不会比x大，因为已经假设x是最大的自然数了。于是，剩下的情况只可能是

$$x^2=x,$$

由于x是自然数，所以$x=1$。

这说明1是最大的自然数！？

哟，这简直是魔术般的结果——单位1居然是最大的自然

数.

为什么会产生如此荒谬的结论呢？原因在于第一步的“假设”——设最大的自然数是存在的，并用 x 表示.但实际上最大的自然数并不存在，所以这种“假设”是不允许的. 而用 x 去表示小明弟弟的年龄则是允许的，因为小明弟弟的年龄总是存在的嘛！

这个教训很重要，它告诫人们：在研究的对象还没有确定是否存在的情况下，不能贸然地假设它存在. 这一点，直到十九世纪，一些有名的大数学家还没有注意到，总认为那样假设是“理所当然”的事，“不必多虑”，以致数学史上出现一些笑话.

再看两个问题：

（1）用比圆盘周长还要长出 1 米的细线围成一个圆，放在与圆盘同心圆的位置上.假设圆盘半径等于10cm，请估计一下，在圆盘与细线之间能穿过你的拳头吗？为什么？

（2）设想用比地球赤道还长出 1 米的细线围成一个圆，放在与赤道同心圆的位置上，请估计一下：在赤道与细线之间能穿过你的拳头吗？为什么？

这是两个很简单的问题，我想你一定是这样回答的：

圆盘与细线之间能穿过拳头，因为细线比圆盘周长要长多了；

而赤道与细线之间就穿不过了，恐怕连一张薄纸也穿不过，因为这时的细线相对来说与赤道差不多一样长。

如果你认真地计算一下，会吃惊地发现，这两个问题中的宽度竟是一样，都等于16cm，你的拳头都能穿过！计算如下：

设圆盘的半径等于 r cm（这时 $r=10$），则细线长 $l=(2\pi r+100)$cm，且细线圆的半径 $R=\dfrac{2\pi r+100}{2\pi}=(r+\dfrac{100}{2\pi})$

（cm），于是$R-r=\dfrac{100}{2\pi}\approx16$（cm）.

从计算中发现宽度（$R-r$）与圆盘半径（r）无关，因此对赤道来说，宽度（$R-r$）也是16cm.

可见，计算可以帮助我们思维，使思维严密起来.

更使人惊奇的是，细线虽比赤道只长出1米，可是它围的平面面积比赤道围的要大出600多万平方米.但第一个问题中的细线所围的面积比圆盘所占据的面积增大的就少得多了！尽管线的长度也长出1米.如果不信，请自己核算一下，这是一道很好的练习题.

下面是运动场上发生的事：甲、乙、丙三人每天比赛短跑，并每天记下名次.若干天后查记录，发现在多数情况下甲的名次在乙之前，乙又在丙之前.于是甲很高兴地说："在多数情况下我当然更在丙之前了，因为$a>b,b>c$，当然$a>c$嘛！"

可是丙不服气，丙说："那可不一定！"接着，丙摆出充分理由使大家信服，"在多数情况下甲的名次在乙之前，乙在丙之前，而丙又在甲之前"的这种"奇迹"是可能存在的！

丙是怎么说的，以及下面几道有趣的问题的正确答案请在下期寻找.

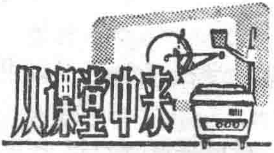
1.第一个三角形的每一条边都比第二个三角形的每一条边要长些，那么：

第一个三角形的周长大于第二个三角形的周长吗？

第一个三角形的面积大于第二个三角形的面积吗？

2.有一本书，共有500页.排字工人在排页码时要准备多少个铅字"1"？

3.在三角形内有20个点，用连同原三角形顶点在内的23个点作为三角形的顶点，最多可以组成多少个互不重叠的三角形？



数学中的思考

——漫谈“一元二次方程”的学习

上海师大附中　潘光博

“一元二次方程”一章是初中代数的一个重点．学好数学最重要的是要勤于思考．“读书不想，隔靴搔痒”，想，就是学好的关键．那么“一元二次方程”这一章应思考些什么呢？怎样思考呢？下面仅就“一元二次方程”这章的有关内容，提供几个“思考点”．

一　理解性思考

例如“$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）叫做一元二次方程的一般形式．”为什么要求$a\neq 0$呢？自然的结论是：若$a=0$，方程就不是二次了．若再往深一步想，可以写出几个实例来试一试．如（1）试解方程$2(a-3)x^2-(a+3)x+3=0$；（2）问k为何实数时，$(k-1)x^2-2x-3=0$有不等实根．若不考虑二次项系数不为0的条件，就会得出（1）中方程必有两解$x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{3}{a-3}$的错误结

最少可以组成多少个互不重叠的三角形？

4．线段AB上有若干个分点，把AB分成许多小段．如果随意用字母A或字母B来记这些分点．请证明：所有这些小段中两端端点字母不同的线段数总是奇数．

5．每一个三角形有6个基本元素（三个内角与三条边）．如果一个三角形的5个基本元素与另一个三角形的5个基本元素分别相等，那么这两个三角形一定全等吗？

论.实际上，这仅是$a\neq 3$时的解答.当$a=3$时，仅有一解$x=\frac{1}{2}$.同样也会得出（2）中只需$k>\frac{2}{3}$的错误解答，而正确答案应为$k>\frac{2}{3}$且$k\neq 1$.这样一思考，对概念的理解加深了，思维就更周密了.

二　探究性思考

学数学就要大胆设疑，敢于探索，追根刨底．例如，方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）当$b^2-4ac>0$时，有两个不等实根α与β，再追问一下：方程是否还有第三个与α、β不相等的实根γ？于是，设α、β、γ均是原方程的根，且两两不相等，则有

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0 \tag{1}$$

$$a\beta^2+b\beta+c=0 \tag{2}$$

$$a\gamma^2+b\gamma+c=0 \tag{3}$$

（1）-（3）化简，得

$$a(\alpha+\gamma)+b=0 \tag{4}$$

（2）-（3）化简，得

$$a(\beta+\gamma)+b=0 \tag{5}$$

（4）-（5）得

$$a(\alpha-\beta)=0 \tag{6}$$

因为$a\neq 0$，$\alpha\neq\beta$，这与（6）式矛盾，所以不存在第三个根.

上述思考，对扩大知识面，提高逻辑思维的能力是有好处的.

三　归纳性思考

归纳性思考是更基本的思维形式．如课本中的一元二次方程的解法，先解$x^2=4$，次解$(x+3)^2=2$，再用配方法解

$x^2-4x-3=0$，最后用配方法导出$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的求根公式，把这几个例子连成一线，就不难发现其中体现了一个从简到繁，化繁为简的探索过程，即通过解简单的方程而得到复杂方程的解法．这种“以简驭繁”的探索方法，正是数学中应用极为广泛的归纳法．

四 关联性思考

学数学要求通过思考，把握各种知识之间的联系，这在解决综合题时，特别有用．例：“已知a、b、c是实数，且$a+b+c=0$，$abc=1$，求证a、b、c 中必有一个大于$\frac{3}{2}$．”本题在形式上似乎与二次方程毫无联系，但若能从$b+c=-a$，$bc=\frac{1}{a}$（设a是其中正的一个数），从而联想到韦达定理，把b与c看作是方程$x^2+ax+\frac{1}{a}=0$的两个根，那么问题就不难解决了：因为b、c是实数根，由$\Delta=\frac{a^3-4}{a}\geqslant 0$得$a\geqslant\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{\frac{32}{8}}>\frac{3}{2}$．本例告诉我们知识之间的联系是普遍的，思索会帮助我们把一个个知识点连成线、结成网，从而可以解决形式各异的实际问题．

错例分析

华东师大二附中 滕永康

解无理方程时，如果有关概念不清楚，容易产生错误。在学习过程中，搞清产生错误的原因，有时比知道正确的解法更为重要。

下面三道习题的解法都有错误，你能分别指出它们错在哪里吗？

习题一 解方程$6x-3-\sqrt{2x-9}=5x+1-\sqrt{2x-9}$。

错误解法：∵ 原方程可写成

$$6x-3=5x+1 \qquad (1)$$

解之可得 $x=4$。

习题二 解方程$\sqrt{x-3}(\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x-5})=x-3$。

错误解法：由原方程可得

$$\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x-5}=\sqrt{x-3} \qquad (2)$$

利用两边平方的方法，解之可得

$$x_1=7,\ x_2=-\frac{3}{2}.$$

把x_1，x_2分别代入（2）可知，原方程的解为$x=7$（$x=-\frac{3}{2}$为增根，应舍去）。

习题三 解方程

$$\frac{\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{x-2}}=\frac{\sqrt{5x-4}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x-2}}.$$

错误解法：利用合分比定理，由原方程可得

$$\frac{\sqrt{2x+5}}{\sqrt{x-2}}=\frac{\sqrt{5x-4}}{\sqrt{x-2}} \qquad (3)$$

即 $\sqrt{2x+5}=\sqrt{5x-4}$

解之可得　　　　$x=3$。

经检验可知，原方程的解为　$x=3$。

错误分析与正确解法：

习题一的错误解法中，由于方程（1）与原方程不同解——原方程是无理方程，方程（1）是一元一次方程，因此尽管作为方程（1）的解不需要检验，但作为原方程——无理方程的解，必须进行检验。

正确解法：由原方程可得　$6x-3=5x+1$，

从而　　　　$x=4$。

代入原方程检验，由于此时$\sqrt{2x-9}$无意义，所以$x=4$为增根，应舍去。

综上所述可知，原方程无解。

习题二的错误解法中，遗漏了一种情况：$\sqrt{x-3}=0$的讨论。

众所周知，等式两边不能约去等于0的因式。因此，当约去的因式（如本题的$\sqrt{x-3}$）有可能为0时，应分情况讨论。

正确解法：∵　$\sqrt{x-3}\left(\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x-5}\right)=x-3$。

①如$\sqrt{x-3}=0$，则$x_1=3$；

②如$\sqrt{x-3}>0$，则$\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x-5}=\sqrt{x-3}$。

解之可得　$x_2=7$，$x_3=-\frac{3}{2}$（参见错误解法）。

经检验可知，x_1、x_2是原方程的解。

习题三的错误解法中，由于方程（3）是经过合分比定理得到的，它的实际过程比较复杂，容易产生增根或失根。一般地，在解方程中运用比例性质时，不要随意变化分母。

正确解法：由分比定理得

两个容易混淆的定理

北大附中　陆　乘

“平行于三角形一边的直线截其他两边，所得线段对应成比例；其中的一边和这边上截得的一条线段以及另一边和另一边上截得的对应线段成比例.”“平行于三角形的一边并且和其他两边相交的直线，所截得的三角形和原三角形相似.”这两个定理很容易混淆.

什么情况下，要通过证两个三角形相似推出比例式，在什么情况下又不需要证三角形相似而推出比例式呢？仔细观察一下，从所推得的比例式的异同，就会弄清的.

先看一下图1，若知$DE\parallel BC$，根据第一个定理的推论可得：$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$、$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$及$\dfrac{DB}{AB}=\dfrac{EC}{AC}$；也可以根据第二

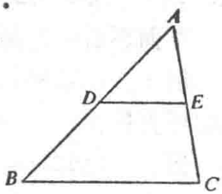


图 1

$$\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{x-2}}=\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x-2}},$$

$\therefore\quad \sqrt{x-2}=0,\ x_1=2;$

或

$$\frac{1}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{x-2}}=\frac{1}{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x-2}},$$

$$\sqrt{2x+5}-\sqrt{x-2}=\sqrt{5x-4}-\sqrt{x-2},$$

$\therefore\quad x_2=3.$

经检验可知x_1、x_2都是原方程的解.

个定理得出$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.再根据相似三角形的性质得出$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$，前者的比例式是由$AB$、$AC$以及它们被$DE$所截得的$AD$、$DB$、$AE$、$EC$六条线段所组成的，而后者的比例式是由$\triangle ADE$、$\triangle ABC$的六条边$AD$、$DE$、$AE$、$AB$、$BC$、$AC$所组成.其中相同的是都包括$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$. 但特别要注意它们的不同点，前者不包括$DE$、$BC$两条线段，后者则不包括$DB$、$EC$两条线段.也就是当不涉及平行线段$DE$、$BC$时就不必推证两个三角形相似，若找$DE$、$BC$与其它线段关系时，就必须先证明两个三角形相似.再推出对应边成比例.此外若把比例式写成$\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{DB}$也错了.因$DB$和$AD$不是对应边.

下面再看一些例题.

例1 已知$DE \parallel BC$，$AB=8$，$AD=3$，$EC=3$，求AC.此题可直接使用第一个定理来解（见图1）.

例2 已知$DE \parallel BC$，$AB=8$，$DB=5$，$BC=10$，求DE.此题须用第二个定理证出$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.推出比例式$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$后再求解（见图1）.

例3 $\triangle ABC$中，D为AC上一点，E为CB延长线上一点，且$BE=AD$，连DE与AB交于F（见图2），求证$\frac{EF}{FD}=\frac{AC}{BC}$.

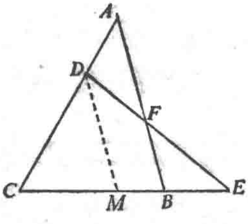


图2

此题无法直接利用已知条件

推出结论.需要添加辅助线——平行线，使已知与未知建立关系，从而使问题得到解决.添的方法不同，使用的定理也不一样.现举两种证法加以说明.

证明（1）：如图2，过D作$DM\parallel AB$交CB于M，

则 $\dfrac{EF}{FD}=\dfrac{EB}{BM}$，

$\because$ $BE=AD$， $\therefore$ $\dfrac{EF}{FD}=\dfrac{AD}{BM}$，

又$\because$ $DM\parallel AB$，$\therefore$ $\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{BC}{BM}$.

$\therefore$ $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{AD}{BM}$， $\therefore$ $\dfrac{EF}{FD}=\dfrac{AC}{BC}$.

证明（2）：如图3，连D作$DN\parallel CB$交AB于N.则$\triangle BEF\backsim\triangle NDF$.

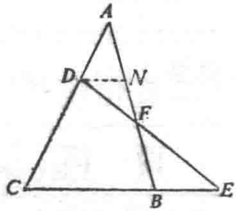


图 3

$\therefore$ $\dfrac{EF}{DF}=\dfrac{BE}{DN}$.

$\because$ $BE=AD$，

$\therefore$ $\dfrac{EF}{DF}=\dfrac{AD}{DN}$.

又$\because$ $DN\parallel CB$，

$\therefore$ $\triangle ADN\backsim\triangle ACB$.

$\therefore$ $\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{DN}{CB}$.

$\therefore$ $\dfrac{AD}{DN}=\dfrac{AC}{CB}$. $\therefore$ $\dfrac{EF}{DF}=\dfrac{AC}{BC}$.

证明（1）用的是第一个定理，而证明（2）是用第二个定理.

下面有两道题，题设中都有“平行”的条件.结论又都是

证明四条线段成比例.请同学们想一想.该怎样证明?

1.如图4，已知$GD /\!/ FE$，$FC /\!/ GB$，求证$\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$.

2.如图5.已知$AE /\!/ BC$,$BG=GC$，求证$\frac{FG}{FE}=\frac{GD}{DE}$.

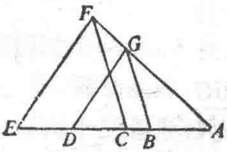


图 4

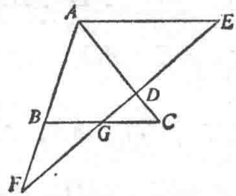


图 5

二氧化碳气两问

福州三中 杨光禄

一、打开汽水瓶盖时为什么会有气泡翻腾?

“汽水”与糖水是没有多大区别的，汽水里只是多了一些二氧化碳气罢了.

气体的溶解度随压强的增大而增大.制汽水时，加大压强把二氧化碳气溶解在糖水里.当打开瓶盖时，瓶里的压强减小，气体的溶解度随之减小，使二氧化碳气象煮开的水，形成气泡翻腾出来.

二、“干冰”是什么?

“干冰”是由二氧化碳冷却凝结成的.但从外观上看雪白的象冰一样，所以也称为“冰”.这是由于“干冰”遇热升华变成二氧化碳气，不象冰熔化时能变成水.“干”字就是这个含义.