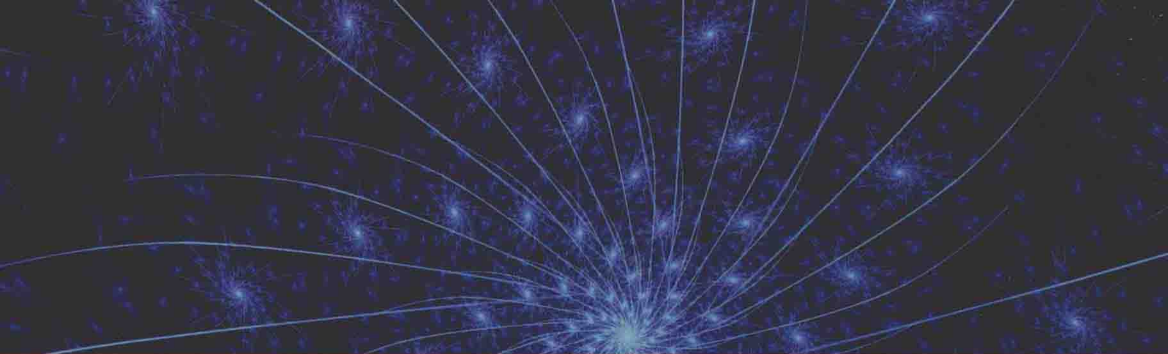
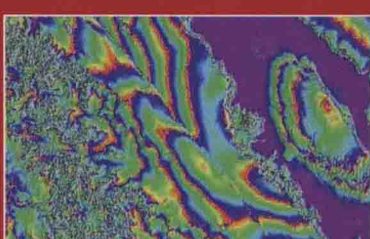


电磁场有限元与解析结合解法

马西奎 等 著



科 学 出 版 社

电磁场有限元与解析结合解法

马西奎 等 著

科学出版社
北 京

内 容 简 介

本书系统地总结了作者及其学术团队20余年来对电磁场有限元与解析结合解法的科学研究成果，使读者能够掌握该方法的基本原理、基本内容和求解实际问题的必要知识。全书共9章。首先为绪论。第1章是有限元法简介。第2章介绍有界二维静电场问题的分部结合型有限元与解析结合解法。第3章介绍无界二维电磁场问题的分域结合型有限元与解析结合解法。第4章介绍无界轴对称电磁场问题的分域结合型有限元与解析结合解法。第5章介绍无界三维电磁场问题的分域结合型有限元与解析结合解法。第6章介绍有限元与渐近边界条件技术。第7章介绍有限元数值解区域中电场强度的计算。第8章介绍有限元与不变测度方程法。

兼备解析方法和有限元方法两者的优点是有限元与解析结合解法的主要特点，它在很大程度上克服了解析方法和有限元方法两者的缺点。一般来说，纯解析法得到的是一种理论解，其精度高且计算量小，但解题范围有限，不同问题的方法各异，较难掌握。正好相反，纯有限元数值方法的优点是解题范围广且方法统一和易于掌握，其不足之处是给出一种近似的数值解，计算量大。

本书可供从事电气工程、电子工程、电磁场与微波技术、计算电磁学及相关专业领域研究和开发工作的科技人员参考，也可作为高等学校相关专业高年级本科生和研究生的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场有限元与解析结合解法/马西奎等著. —北京：科学出版社，2016.1
ISBN 978-7-03-046598-6

Ⅰ.①电… Ⅱ.①马… Ⅲ.①电磁场-有限元法 ②电磁场-解析理论
Ⅳ.①O441.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第290604号

责任编辑：耿建业 陈构洪 / 责任校对：郭瑞芝
责任印制：张 倩 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016年1月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2016年1月第一次印刷 印张：12 1/4
字数：236 000

定价：80.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

自20世纪60年代有限元法闯入电磁场问题分析这一领域后，工程电磁场的分析和设计有了革命性的变革，使得从前被人们认为完全超出解析范围的许多问题都能进行求解。特别是有限元法以其灵活性和通用性强以及解题能力广等优点而受到普遍欢迎，已成为现代化设计中强有力的工具。

不过，事物总是一分为二的。随着人们对有限元法的深入研究，特别是在工程实际中的应用，也出现了一些问题，而且越来越明显。其中，最为突出的是所解问题的复杂性和经费与计算机能力有限之间的矛盾。就一般的有限元法来说，由于它不论什么问题，均使用三角形单元或者曲边四边形单元离散，并一律采用分片低阶(或高阶)多项式逼近，这样才使得其非常适合于计算机编程计算，可以编写出能处理任意边界和许多不同问题的有限元通用计算程序。虽然通用性强这一特点使得有限元法能够求解任何复杂的工程电磁场问题，但它却使有限元法在实际应用中难以考虑所解问题的具体特点，这样必然会带来自由度多和工作量大的不足。所以说，有限元法虽然是功能强大的计算方法，但对特定问题来说不是一种最为经济的方法。

就有限元法理论的一般意义来讲，单元离散未必要选取三角元，可针对问题的特征采用多种形式；插值也未必采用多项式，也可选用满足基本方程和部分规则边界条件的本征函数的组合。回顾近40年来有限元法的发展和应用，发现人们往往忽视了发挥近百年来已打下坚实基础的解析法在解决电磁场问题中所应有的作用。实际上，利用已有解析法研究成果有针对性地部分代替离散与插值，就可以弥补一般的有限元法没有针对问题的特征给予区别对待(这正是解析法的特点)这一点不足，这将会明显地提高有限元法的计算效率和计算精度。从另一角度来讲，以前用纯解析法所不能解决的问题，也正是由于采用部分离散、插值和数值求解而能得到实用的结果。

近20年来，由西安交通大学马西奎教授领导的科研小组对电磁场有限元与解析结合解法的实施方法及其应用进行了系统深入的研究，先后有6位博士研究生和硕士研究生参加了这一课题的研究。以获得博士学位或硕士学位的时间先后为序，他们分别是王德林硕士、郭飞博士、王蓉蓉硕士、韩社教博士、张西波硕士和梁晓靖硕士。他们是完成这一课题研究工作的生力军，做出了创造性成果，并在国内外学术期刊上发表了一系列论文。本专著实际上就是对这一课题研究成果的系统总结。本专著试图详细介绍电磁场有限元与解析结合解法的基本内容，使读者在

阅读本专著以后能具备用电磁场有限元与解析结合解法处理实际问题的必要知识，掌握计算机编程的明确途径。

在开展电磁场有限元与解析结合解法这一课题的研究过程中，先后得到了国家自然科学基金、教育部高等学校博士学科点专项科研基金和教育部高等学校骨干教师资助计划的资助；本专著在编写和出版过程中也得到了西安交通大学电气工程学院、电力设备电气绝缘国家重点实验室以及科学出版社的大力支持，我们在此一并表示衷心的感谢。

马西奎、韩社教和王德林参加了本专著的撰写工作。

本专著的出版与作者课题组多年来的科研工作是密不可分的，在此向对本专著所包括的研究成果做出宝贵贡献的研究生表示感谢。同时感谢所有协助本专著出版的人们。特别是，我要感谢，有一个耐心和支持我工作的家庭，要感谢我的妻子丁西亚教授和我的女儿马丁，她们在我多年的教学和科研工作中给予了许多理解和默默的支持。

限于我们的学识水平，虽然数易其稿，书中可能会有不足和疏漏，热忱欢迎各位对本书提出宝贵意见。

马西奎
2015 年 8 月
于西安交通大学

目　录

绪　论

在这里，首先概述了有限元与解析结合解法的产生和意义。然后，分别简要介绍了有限元与解析结合解法的内容和特点，以及有限元与解析结合解法的构成和类型。最后，介绍了本专著的目的和内容。

0.1　有限元与解析结合解法的提出

自从电磁场基本方程由 Maxwell 在 1873 年建立以来，经典数学分析方法就一直是电磁场理论及其应用发展中一个极为重要的手段。数学与电磁场理论这两门学科在很多方面已结合为一体，相互推动和相互促进。但正因为这样，经典数学分析方法进展的困难，使得采用纯解析方法已解决不了复杂的工程电磁场问题。可以说 20 世纪的上半叶，在电磁场问题的解法上并没有取得什么重大的突破。然而，在 20 世纪 60 年代计算机闯入电磁场问题分析这一领域后，给工程电磁场问题的理论分析和工程设计带来了革命性的变革，使得从前被人们认为完全超出解析范围的许多问题都能进行求解，并且逐渐地形成了一门依赖于计算机和计算数学发展的新学科——计算电磁学[1]。

随着计算电磁学的建立和发展，人们已经提出了求解电磁场基本方程的许多有意义的数值解法，例如矩量法(method of moment，MoM)、有限差分法(finite difference method，FDM)、有限元法(finite element method，FEM)、边界元法(boundary element method，BEM)、有限体积法(finite volume method，FVM)、模拟电荷法(charge simulation method，CSM)、时域有限差分法(finite difference time-domain method，FDTD)等。目前，电磁场数值计算方法的研究及其应用已深入到高电压设备的绝缘设计、放电现象的分析、电子透镜的设计、雷达技术、微波和天线技术、电波传播、光纤通信、电磁探测、电磁成像、电磁兼容等领域。特别是有限元法以其灵活性和通用性强以及解题能力广等优点而受到普遍欢迎[2,3]，已成为现代化设计中强有力的工具。原则上讲，任何无法直接通过理论分析或者通过实验手段来得到结果的实际工程问题，只要确立基本方程，就可以通过采用有限元法来解决。

不过，事物总是一分为二的。随着人们对有限元法的深入研究，特别是在工程实际中的应用，也出现了一些问题，而且越来越明显。其中，最为突出的是所解问题的复杂性和经费与计算机能力有限之间的矛盾。由于有限元法的特点是不论什

么对象和什么问题，均在各个方向进行离散，并且一律采用分片低阶（或高阶）多项式插值来逼近各类问题的解函数。虽然这有通用性强的一面，但也必然会带来自由度多、工作量大的不足。特别是，对于三维、耦合、无限域、非线性等问题，所需的单元、内存和计算量都十分庞大，造成原则上用有限元法能够解决，而实际上却由于计算条件所限，在工程上又难以实现的情况[4]。通用性强这一特点使得有限元法能够求解任何复杂的工程电磁场问题，但它却使有限元法在实际应用中难以考虑所解问题的具体特点。所以说，有限元法虽然是功能强大的计算方法，但对特定问题来说不一定是最为经济的方法。试问一下，小型工程问题使用大型通用程序，岂不是有点像“杀鸡用了牛刀”一样。

回顾近 40 年来计算电磁学的蓬勃发展，发现人们的研究有所偏废，往往忽视了充分发挥近百年来已打下坚实基础的解析法在解决电磁场问题中所应有的作用。虽然纯解析法能解决问题的范围有限已是不争的事实，但能否利用它来弥补纯有限元数值解法的不足呢？实际上，有限元和解析法的结合——有限元与解析结合解法正是解决问题的一种有效途径。它至少可以借用部分解析研究成果以减少纯数值方法的计算工作量。

0.2 有限元与解析结合解法的研究内容和特点

由于采用了统一的离散及插值多项式，而没有针对问题的特征给予区别对待（这正是解析法的特点），使得有限元法并不是十分经济有效的方法，造成数值计算成本的不少浪费。若利用已有的解析法研究成果，有针对性地部分代替离散与插值，将会明显地改善上述一般有限元法所遇到的困难和矛盾，从而带来显著的经济效益。从另一角度来讲，以前用纯解析法所不能解决的问题，也正是由于采用部分离散、插值和数值求解而能得到实用的结果。如何实现这一目的，正是有限元与解析结合解法所要研究的基本内容，也是期待着人们去深入研究的课题。

实现有限元与解析相结合解法的方法相当广泛，凡是在数值分析中采用部分解析函数而最终得到的是一系列离散化数值结果的分析方法均属于这一范畴[4,5]。在有限元与解析结合解法的应用中，如何选取所应用的解析函数、如何将解析函数结合在离散过程中、如何建立适合计算机运算的格式以及使复杂问题的计算达到简捷、准确和节约费用的目的，都是需要认真解决的问题。研究的重点在于如何处理好有限元与解析方法两者的作用，通过解析手段帮助有限元计算降维，而同时又通过有限元数值离散手段来弥补所取解析函数的不足。

兼备解析方法和有限元方法两者的优点是有限元与解析结合解法的主要特点，它在很大程度上克服了解析方法和有限元方法两者的缺点。一般地说，纯解析法得到的是一种理论解，其精度高和计算量小，但解题范围有限，不同问题的方法

各异，较难掌握。然而，正好相反，纯有限元数值方法的优点是解题范围广且方法统一和易于掌握，其不足之处是给出一种近似的数值解，且计算量大。

对于一个具体的问题，选择哪种结合方法使有限元方法与解析方法两者相结合是一个很重要的问题。一般是依据待解问题的结构，通过对几方面性能（计算的难易、计算效率、计算成本、结果的精度、存储要求、多功能性等）进行比较后来决定的。算法选取的好坏是影响到能否计算出结果、精度的高低或计算量大小的关键。

0.3　有限元与解析结合解法的构成和类型

按结合的方法不同，有限元与解析结合解法可以分为分域、分部和分向三种类型。

分域结合型是指将计算对象在几何上划分成两个或两个以上区域，根据各个区域的特征，在不同的区域分别采用纯有限元法和纯解析方法，以发挥不同方法在特定区域的各自特长，这样做往往要比在全域采用单一的方法来得有效。这一类方法通常称为耦合法或混合法。一般地说，在形状规则、远区、无限域和线性区，采用解析方法；在形状非规则、近区、有限域和非线性区，则采用有限元数值方法。耦合法使用的关键是在两个区域交界面处衔接条件的离散和耦合。

分部结合型是指解函数中含有部分给定的解析函数及部分需要数值求解的待定系数。它首先要构造一个由一系列已知解析函数（基函数）及若干未知待定系数组成的解函数，然后根据问题所给定的控制方程及边界条件，采用有限元数值方法来建立含有这些待定系数的离散化方程，从而得到问题的近似解。

分向结合型是指多维问题的解函数在某些方向上采用解析函数，而在另外的方向上仍保留离散和插值形式。与在全部方向上都采用离散和插值形式的数值方法相比较，采用分向结合型的有限元与解析结合方法解所建立的离散化方程的维数相当低，从而大规模地减少计算工作量。此方法通常称之为有限元半解析数值方法。该方法的经济效果显著，适用于求解高维、无限域问题。

0.4　本专著的目的和内容

本专著将介绍电磁场有限元与解析结合解法的基本原理，给读者一个比较完整、详细的该方法基本内容的叙述。在阅读本专著以后，读者能够容易地理解和掌握电磁场有限元与解析结合解法的基本内容，具备用该方法处理实际问题的必要知识，并能明确进行计算机编程计算的途径。

本专著在第1章中首先简单介绍了变分问题与边值问题的关系、变分问题的直接解法——里兹(Ritz)法和有限元法，最后介绍了有限元法与解析方法相结合

的基本思想。在第 2 章中，分别以矩形和圆柱形屏蔽多层介质耦合微带传输线的准静态特性分析问题为例，来介绍应用分部结合型有限元与解析结合解法求解有界二维静电场问题的基本原理和过程。其基本思想是，把各介质层中电位的试探函数用含有待定系数的傅里叶(Fourier)级数表示(其中的待定系数由介质分界面上电位的线性插值函数从形式上确定)，代入对应的变分问题中的泛函，通过取极值来建立含有待定系数的离散化方程，从而得到问题的近似解。这种有限元与解析结合解法在特定区域中给出的试函数，由于避免了单元的大量剖分，不仅大大地提高了计算效率，也提高了计算精度。第 3 章以无界二维电磁场问题为例，来说明分域结合型有限元与解析结合解法的基本原理。基于区域分裂的思想，通过引入一虚拟圆形边界，将整个无界域划分为圆内和圆外两部分。在圆内有限区域采用通常的有限元法离散，而将整个圆外无限区域看作一个“无限大”的单元，采用以本征函数展开的傅里叶级数作为插值函数的离散方法。这种处理方法能够很好地把有限元法的求解区域推广至无穷远，实现了它在无界二维电磁场数值分析中的应用。第 4 章介绍分域结合型有限元与解析结合解法在无界轴对称电磁场问题数值求解中的应用。与无界二维电磁场问题不同，由于在轴对称问题中存在着第一类勒让德(Legendre)多项式积分，数学模型要复杂得多，使得直接应用在无界二维电磁场中的处理方法遇到了困难。为了解决这一困难，我们提出了一种非协调插值函数形式，使得分域结合型有限元与解析结合解法在无界轴对称电磁场问题求解中得到了成功的应用。在第 5 章中，将以无界三维静电场问题为例，来说明用有限元与解析结合解法求解无界三维电磁场问题的基本原理。第 6 章介绍求解无界电磁场问题的另一种方法——有限元法与渐近边界条件技术。在这种方法中，首先通过引入一个包围所有源和物体的虚构边界面以将无限区域截断成有限区域。然后，在此虚构边界面上构造一种适当的边界条件(称为渐近边界条件)，它就可以唯一地定义在该虚构边界面内使用有限元法求解的边值问题。第 7 章介绍有限元数值解区域中电场强度高精度计算的准解析方法。第 8 章介绍有限元与不变测度方程法的基本原理及其在无界电磁场问题求解中的应用。

参考文献

[1] 王秉中. 计算电磁学[M]. 北京：科学出版社，2002.

[2] 金建铭. 电磁场有限元法[M]. 西安：西安电子科技大学出版社，1998.

[3] 刘诗俊. 变分法、有限元和外推法[M]. 北京：中国铁道出版社，1986.

[4] 曹志远. 解析与数值结合法及其应用[J]. 计算结构力学及其应用，1992，9(2)：220-226.

[5] 袁驷. 计算力学的有限元线法[J]. 力学进展，1992，22(2)：208-216.

第 1 章　有限元法简介

在这一章中，我们将首先简单介绍变分问题与边值问题的关系、变分问题的直接解法——里兹(Ritz)法以及有限元法。然后，介绍有限元法与解析方法相结合的基本思想。

1.1　变分法简述

1.1.1　泛函极值问题与变分问题

在工程问题中，除了要解决某个函数的极值问题外，通常还需要解决泛函的极值问题。不严格地说，凡变量的值是由一个或几个函数的选取而确定的，这种变量就称为“泛函”。这里，我们以平面上的最短路径问题来说明泛函和泛函极值问题。已经知道，在 xoy 平面上，一条过两个定点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 的曲线的长度为

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{d}x \tag{1.1.1}$$

现在的问题是，在满足条件 $y(x_1) = y_1$ 和 $y(x_2) = y_2$ 且有一阶连续导数的函数类中，求使 I 取极小值的曲线 $y_0(x)$。实际上，此问题是求过两点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 的 C^1 类曲线中最短的一条，或者最短路径问题。不难看出，在式(1.1.1)中，变量 I 是一条曲线 $y = y(x)$ 的函数，称 I 为函数 $y(x)$ 的函数，简称“泛函”。

如果提出这样的问题：求连结 A 和 B 两点的最短路径的方程，也就是求满足下列条件：

$$\left.\begin{aligned} &I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x \to \min \\ &y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2 \end{aligned}\right\} \tag{1.1.2}$$

的 $y(x)$，这称为泛函极值问题。变分法是研究求泛函极值的一种方法，它是数学物理方法中的一个重要分支[1]。因为在数学中，称函数极值问题为“微分问题”，所以相应地称泛函极值问题为“变分问题”。

在讨论变分问题时，应指明泛函所依赖的函数需要满足的条件。例如，对于上述最短路径问题的泛函 I，它所依赖的函数 $y(x)$ 应满足条件：

$$y(x_1)=y_1,\quad y(x_2)=y_2$$

在变分法中，常把具有某些共同性质的函数集称为“容许函数类”。而最短路径问题就是要从如上描述的容许函数类 $y(x_1)=y_1$ 和 $y(x_2)=y_2$ 中确定使 I 达到极小的那一条曲线。

总之，满足一定边界条件的泛函极值问题称为变分问题。

1.1.2　变分问题与边值问题

现在考虑下列一般形式的泛函极值问题或变分问题：

$$\left.\begin{aligned}I=\int_{x_1}^{x_2}F[x,y(x),y'(x)]\mathrm{d}x\rightarrow\min\\ y(x_1)=y_1\ ,\ y(x_2)=y_2\end{aligned}\right\}\tag{1.1.3}$$

1736 年，大数学家欧拉指出：要使积分

$$I=\int_{x_1}^{x_2}F[x,y(x),y'(x)]\mathrm{d}x\tag{1.1.4}$$

取极值，函数 $y(x)$ 必须满足：

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0\tag{1.1.5}$$

方程(1.1.5)就是著名的“欧拉方程”。这就是在容许函数类中使式(1.1.4)达到极值时 $y(x)$ 应适合的必要条件。只需要求出欧拉方程满足所给边界条件 $y(x_1)=y_1$ 和 $y(x_2)=y_2$ 的解答，则得到的函数 $y(x)$ 必然使式(1.1.4)取极值，相应地得到的函数 $y(x)$ 称为泛函极值问题式(1.1.3)的极值函数。

换句话说，求变分问题式(1.1.3)的解可转换成求如下欧拉方程的边值问题

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0\\ y(x_1)=y_1,\quad y(x_2)=y_2\end{aligned}\right\}\tag{1.1.6}$$

的解。或者说，微分方程边值问题的求解和对应的变分问题的求解是等价的[1-3]。

1.1.3　多元函数的变分问题

我们可以把上面的有关结果推广到多自变量和多因变量的情况。设有下列泛函的表达式：

$$I[u]=\iint\limits_S F(x,y,u,u_x,u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\tag{1.1.7}$$

式中，x、y 为自变量；u 为 x、y 的待定函数；积分域 S 在 xoy 平面内，且 $u(x,y)$ 在 S 域的边界 C 上为给定的函数：

$$u(x,y)\big|_C = g(x,y) \quad (\text{已知函数}) \tag{1.1.8}$$

如同上面一样，要使式(1.1.7)所示的积分取极值，函数 $u(x,y)$ 必须满足：

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)=0 \tag{1.1.9}$$

这就是相应于泛函式(1.1.7)的欧拉方程，是 I 取极值的必要条件。它是一个二阶偏微分方程，解这个方程，得到带积分常数的极值函数 $u(x,y)$。代入沿 C 的边界条件式(1.1.8)后，解出积分常数，最后得函数 $u(x,y)$。

例 1.1.1　求与下列变分问题相应的边值问题。

$$\left.\begin{aligned} I(u)=\iint_S\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2f(x,y)u\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ \text{取极值} \\ u(x,y)\big|_C = g(x,y) \end{aligned}\right\} \tag{1.1.10}$$

式中，C 是二维区域 S 的边界。

解　现在由于

$$F(x,y,u,u_x,u_y)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2f(x,y)u$$

所以欧拉方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-f(x,y)$$

这就是熟知的 Poisson 方程。因此，变分问题式(1.1.10)等价于如下微分方程的边值问题：

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 u=-f(x,y) \quad (\text{在 } S \text{ 域中}) \\ u\big|_C = g(x,y) \end{aligned}\right\} \tag{1.1.11}$$

或者说，泛函的极值函数 $u(x,y)$ 也就是微分方程边值问题的解。

1.2　变分问题的直接解法——里兹(Ritz)法

在 1.1 节中，我们看到泛函取极值的求解归结为欧拉方程的求解，这是变分问题的间接解法。通过这一间接解法可以看出，某些微分方程边值问题的求解等价于相应变分问题的求解。对于变分问题可根据极值意义采用直接方法，以求其近

似解。里兹法就是求解变分问题的一种近似方法[2]。

里兹法的基本思想是用一个有限项适当选择的函数 $\varphi_i(x)$ 的线性组合来近似地代表真实解，称为试探解，可以写为

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x) \tag{1.2.1}$$

式中，每个函数 $\varphi_i(x)$ 都能单独地满足边界条件，称函数 $\varphi_i(x)$ 为基函数。如果将 $\varphi_i(x)$ 组成一个完备系，那么在理论上它可以导致精确解。但实际上由于计算量正比于 n 的平方，在求近似解时，希望 n 尽量选取得小。为了计算方便，往往将 $\varphi_i(x)$ 选为一组正交函数。

问题的实质就转化为如何求出试探解式(1.2.1)中的系数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$。这需要将式(1.2.1)代入泛函中，有

$$I(u) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,\mathrm{d}x \approx \int_{x_1}^{x_2} F\left[x, \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x), \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i'(x)\right]\mathrm{d}x$$

这样，积分后就把泛函 $I(u)$ 转化成这些系数 $c_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的函数，即

$$I(u) = I(c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

当其对每个系数的偏导数为零，即

$$\frac{\partial I}{\partial c_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.2.2}$$

时，该函数的极小值即可求得。解线性联立方程组式(1.2.2)求出 c_i 并代入式(1.2.1)中，得近似解。当 $n \to \infty$ 时，若 $\tilde{y} \to y$，则该过程收敛于精确解。一般地说，近似解的精度与基函数系 $\varphi_i(x)$ 的选择及项数的多寡有关。如果试探函数的性质与泛函所需解的性质相近，则里兹法有较高的精度。

例 1.2.1 已知 $y(0) = 0, y(1) = 0$，试确定 $y = f(x)$，使泛函

$$I(y) = \int_0^1 (y'^2 + 2x^3 y)\,\mathrm{d}x$$

取极值。

解 以幂函数 $1, x, x^2, x^3, \cdots$ 的前 4 项的线性组合

$$\tilde{y} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

作为试探函数，将边界条件 $y(0) = 0, y(1) = 0$ 代入上式，得 $c_0 = 0, c_1 = -(c_2 + c_3)$。将

$$\tilde{y} = -(c_2 + c_3)x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

代入泛函 $I(y)$ 中积分后，得