

刷百题 做学霸

扫一扫 找学霸



微信号: chinastar01

2016

百题大过关

修订版

中考数学

第三关

压轴题

曾大洋 林顺民◎主编



著名
品牌
标市

华东师范大学出版社

全国百佳图书出版单位

2016 百题大过关

中考数学

第三关 压轴题 (修订版)

主 编：曾大洋 林顺民

编写者：

曾大洋 林顺民 黄世民 杨进南

图书在版编目(CIP)数据

中考数学. 第三关:压轴题/曾大洋,林顺民主编. —修订本. —上海:华东师范大学出版社,2015. 2
(百题大过关)

ISBN 978-7-5675-3125-3

I. ①中… II. ①曾…②林… III. ①中学数学课—初中—习题集—升学参考资料 IV. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 034984 号

百题大过关

中考数学·第三关 压轴题(修订版)

主 编 曾大洋 林顺民

总 策 划 倪 明

项目编辑 舒 刊

审读编辑 徐惟简

装帧设计 卢晓红

责任发行 高 峰

出版发行 华东师范大学出版社

社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062

网 址 www.ecnupress.com.cn

电 话 021-60821666 行政传真 021-62572105

客服电话 021-62865537 门市(邮购)电话 021-62869887

地 址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口

网 店 <http://hdsdcbs.tmall.com>

印 刷 者 浙江省临安市曙光印务有限公司

开 本 787×1092 16 开

印 张 14.5

字 数 371 千字

版 次 2015 年 4 月第 5 版

印 次 2015 年 11 月第 3 次

印 数 48101 — 56200

书 号 ISBN 978-7-5675-3125-3/G·7978

定 价 26.00 元

出 版 人 王 焰

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调换或电话 021-62865537 联系)

《百题大过关》编委会

编委(按学科排序)

语文: 王学东 马建明

数学: 张瑞炳 曾大洋 侍作兵

英语: 李 忠 刘 建 王 韞 秦晓静 杨 柳

物理: 傅雪平 阎伦亮

化学: 何来荣 曹年华

生物: 吴红漫

历史: 王 雄

致小伙伴们

我不是学霸,不过,中考数学神奇地拿了A,之前一直是B来着.不知道是不是考前一个月狂刷百题大过关的第一关(基础题)和第二关(核心题)的原因,反正刷完了上战场,就拿了A.

狂刷百题,倒床便睡!

一日刷百题,考试九十九!

愿得一学神,白首不相离,带我上自习,每日刷百题.

与其考美自主招生,不如平时多刷百题.

换了新同桌,与学霸做起了同桌,从此开启日刷百题模式!

称你们是小伙伴,我们是你们的大朋友.让我们一起分享上面这些刷过百题的小伙伴们的经历.

每天背着5公斤的书包上学、每天喝8杯水睡 $n(n<8)$ 小时的小伙伴们,你们一定都有过刷题的经历!那经历是不是像上面的师兄学姐一样有点苦又有点High?

关于刷题,下面的一则新闻或许能给我们带来启示:上海学生在PISA(国际学生评估项目)测试中连续两次夺得第一,但每周作业时间同样位列世界第一.对此,专家说了,做作业对于提高成绩非常有效,但并非越多越好.算上周末,15岁学生平均每周最佳作业时间在11小时左右.“在最佳作业时间内作业时间越长成绩越好,但是超过最佳作业时间后成绩提高程度很小.”

看来,刷题的确能提高成绩,刷题是小伙伴们的必修课,但刷得不好也会成为灾难的.我们就是把刷题当做专业课来上的,目标是提升小伙伴们刷题的幸福指数,高效刷题.

必修课——轻松高效不拖堂

作为专业的出版单位,我们要做的,是将小伙伴们要刷的题精选再精选,在确保训练质量的前提下尽量控制题量,让必修课轻松高效、不会拖堂.为此,我们邀请了经验丰富的一线教师担纲编写,每本书或每个考点精心设计百道互不重复且具有一定梯度的训练题,题目排列杜绝杂乱无章和随意性.希望能帮助小伙伴们顺利过关.

幸福课——查询方便不伤眼

为了方便使用本丛书的小伙伴们,提高大家的幸福指数,对有一定难度的题目,我们不仅提供参考答案,还力求作最为详尽的解析,以供小伙伴们查询,让小伙伴们知其然,更知其所以然.为了不摧残小伙伴们的眼睛,我们在图书的编排上尽量简洁明了,字号适中,以提高小伙伴们刷题的速度.

专业课——紧跟考情不落伍

对于刷题,大朋友们是用专业的精神来对待的.每年的考试一结束,我们都会组织老师认真研究考题,把握考试变化的趋势,并提醒老师们要将最新的考试变化反映到图书上,也经常收集小伙伴们的改进建议,所以,我们的图书每年都会修订.有些图书,已经修订到第13版了,是不是很有生命力?

愿所有刷过百题的小伙伴们,轻松上考场,快乐做学霸!

一群大朋友

编写说明

数学是中考学科“含金量”最重的一门学科,对需要参加中考,尤其是想升入高一级学校继续学习的初三学生来说,必须认真面对数学科中考,勇敢闯过中考数学这个重要关口。机遇与挑战并存,希望与困难同在。

综观各地的中考数学卷,满分一般是 120 分或 150 分,考试用时大多是 2 小时,题量(包括解答题中的小题)大概为 35 题左右,题型有“选择题”、“填空题”、“解答题”三类,题目按难度区分又有“容易题”、“中档题”、“稍难题”三种(整卷“容易题”、“中档题”、“稍难题”的分值之比约为 7:2:1)。许多同学的中考成绩不理想,其原因不外有两个,或者因为自身基础知识薄弱,运算、推理、应用能力欠缺;或者由于对中考产生紧张、畏难情绪导致看错、理解错题意,对各种难度题目平均使用力量导致考试用时不够。为了帮助初中毕业生更好地闯过中考数学这一大关,我们编写了这套《百题大过关·中考数学》丛书,目的是让各位读者读完全套丛书,研究、做完书中的例题、练习题后,能了解中考数学卷的结构,发挥自己的最大潜能,顺利解答中考数学试卷,取得较好的成绩,考上理想的学校。

本着为考生服务的宗旨,丛书的编写尽量顺应初中毕业生的实际学习状况,选题力求全面性与典型性,注意根据中考数学命题的统计分布来确定各知识点、各题型的题量,尽量涵盖多年来中考常见的各种题型;同时注意中考数学命题的变化趋势,尽量选取近年来中考的创新题型。

学生在学习程度上有差异,有好、中、差之分,学习的过程从易到难。为适合不同学生不同阶段的学习需要,我们按照中考数学试题的难易程度,把这套丛书分为三册书来编写,它们分别为《第一关 基础题》、《第二关 核心题》、《第三关 压轴题》。各册简介如下:

《第一关 基础题》所选的题目为容易题,若按整卷满分 150 分计,中考容易题分值在 100 分左右,基础较差的考生认真用好该册书后,能确保拿到容易题(即基础题)的分数,中考成绩便超过 100 分。该书按知识点来编排,对初中阶段数学基础知识进行全面的复习,总题量有 600 题。

《第二关 核心题》所选的题目为中档题,若按整卷满分 150 分计,中考中档题分值在 30 分左右,基础一般的考生认真用好该册书后,能确保拿到中档题(即核心题)的分数,中考成绩便可达到 130 分以上。该书按数学思想方法和能力要求来编排,强调数学的核心本质与应用,总题量有 400 题。

《第三关 压轴题》所选的题目为稍难题,若按整卷满分 150 分计,中考稍难题分值在 15 分左右。基础较好的考生认真用好该册书后,能确保拿到稍难题(即压轴题)的分数,中考成绩便可达 140 分以上。该书按“题型”编排,对每一类型的压轴题做详尽的介绍,总题量有 100 题。

当然,上述各类同学在使用完相应的一本书后,可根据自己的具体情况,再选取其他一本或两本书来研读,这对进一步夯实基础知识,提高解题能力,取得更好成绩大有裨益。

本书《第三关 压轴题》为丛书的第三册。针对初中数学压轴题类型,本书分“实验操作类”、“猜想证明类”等八种题型进行评述。在各题型的评述中,详尽讲解了该题型的压轴题在中考命题中的特点与趋势,并讲清该题型的解题策略,同时附典型例题加以说明。对每一道典型例题,详细阐述了它的命题意图、答题要旨(解题思路与得分关键)、满分解答过程、易错分析

(失分原因),还选取相应的变式训练题让读者练习巩固.相信大家认真阅读本书并做好相关变式训练题(书末附有答案与提示)后会受益匪浅,特别是基础较好的同学一定会过好“优秀”关.

吃透百题,胜券在握.愿读者增强信心,闯过“基础题”、“核心题”、“压轴题”三关,在数学中考中打个漂亮仗!

编者

目录

专题一 实验操作类试题 / 1

- 一、剪切与拼图 / 1
- 二、折叠与翻折 / 6
- 三、平移与旋转 / 12

专题二 猜想证明类试题 / 19

- 一、猜想命题的规律或结论(不要求证明)的试题 / 19
- 二、猜想命题的结论(并且要求证明)的试题 / 26

专题三 动态几何类试题 / 32

- 一、点动型试题 / 32
- 二、线动型试题 / 59
- 三、形动型试题 / 71

专题四 阅读理解类试题 / 81

- 一、归纳概括型阅读 / 81
- 二、学习研究型阅读 / 86

专题五 方案设计类试题 / 96

- 一、以代数知识为背景的方案设计题 / 96
- 二、以几何为背景的方案设计题 / 108

专题六 开放探究类试题 / 113

- 一、条件、结论、过程开放型试题 / 113
- 二、条件、结论探究型试题 / 116

专题七 综合运用类试题 / 138

- 一、代数型综合题 / 138
- 二、几何型综合题 / 145

专题八 实际应用类试题 / 153

- 一、以几何为背景的应用类试题 / 153
- 二、以代数为背景的应用类试题 / 157
- 三、以统计为背景的应用类试题 / 169

参考答案或提示 / 173

命题特点与趋势

在近几年的中考压轴题中,数学实验操作类试题的命制往往是以几何图形为背景,通过剪切与拼图、折叠与翻折、平移与旋转构造出新图形,从图形的形状和位置的变化中去探求函数、方程、全等、相似、解直角三角形等知识间的内在联系.实验操作类试题是近几年来中考数学试卷中出现的一种新题型,随着新课程改革的不断深入,实验操作类试题作为考查学生分析、解决问题能力以及创新意识的良好载体,已逐渐成为中考的热点题型之一.

解题要领

实验操作类试题的题干分为动手操作和问题探究两部分,需要通过操作、观察、猜想、证明、计算等数学活动来完成解题.解决的过程要综合用到数形结合、函数与方程、运动变化、特殊与一般等数学思想,通过分类讨论、相似与全等、函数建模等方法实现问题的解决.下面列举范题说明此类问题的解题策略.

一、剪切与拼图

剪切与拼图型试题往往直接考查实际操作能力,就是在原来图形的基础上通过剪切后重新拼合成符合条件的新图形.这类题大多联系生活实际,内容开放,需要进行多方面、多角度、多层次探索,能检验思维的灵活性、发散性和创新性.

001 用一块边长为 60 cm 的正方形薄钢片制作一个长方体盒子.

(1) 如果要做成一个没有盖的长方体盒子,可先在薄钢片的四个角上截去四个相同的小正方形(如图 1),然后把四边折合起来(如图 2).

- ① 求做成的盒子底面积 $y(\text{cm}^2)$ 与截去小正方形边长 $x(\text{cm})$ 之间的函数关系式;
- ② 当做成的盒子的底面积为 900 cm^2 时,试求该盒子的容积.

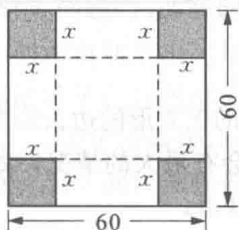


图 1

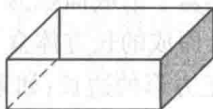


图 2

第 001 题

(2) 如果要做成一个有盖的长方体盒子,其制作方案要求同时符合下列两个条件:

① 必须在薄钢片的四个角上各截去一个四边形(其余部分不能裁截);

② 折合后薄钢片既无空隙又不重叠地围成各盒面.

请你画出符合上述制作方案的一种草图(不必说明画法与根据);并求当表面积为 2800 cm^2 时,该盒子的高.

【命题意图】 试题以身边的题材为背景,重点考查方程应用能力及动手操作能力. 试题立意新,构思巧妙,突出学数学、用数学的课改理念. 同时,试题有力地促进数学教学由重视解题训练转向重视理论联系实际.

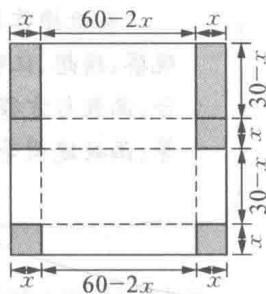
【答案要旨】 解题思路“实际问题——数学问题——求解”. 问题(1)的解题关键是用含 x 的代数式表示底面的边长,然后利用面积公式求出 y 与 x 的函数关系式;问题(2)是本题的难点,解题的关键是准确把握长方体盒子的对称性设元并列方程. 经分析,问题(2)所截去的四个四边形中必有 2 个同样形状、同样大小的矩形和 2 个同样形状、同样大小的正方形,且当正方形的边长为 x 时,矩形的两边分别为 x 和 30 ,把握这个特征,于是问题轻松求解.

【满分解答】

解 (1) ①由题意得:盒子底面的边长为 $(60-2x)$,所以 $y = (60-2x)^2$. ②当 $y = 900$ 时,即 $(60-2x)^2 = 900$,解得 $x_1 = 15$, $x_2 = 45$,但当 $x = 45$ 时, $60-2x = -30$,所以 $x = 45$ 不符合题意,舍去. 所以当 $y = 900$ 时,小正方形边长为 $x = 15$,此时盒子的容积 $= 900 \times 15 = 13\,500 (\text{cm}^3)$.

(2) 由题意得:截去的四个四边形的各边如图 3 所示. 所以有 $60^2 - 2x^2 - 2 \times 30x = 2800$,整理得: $x^2 + 30x - 400 = 0$,解得: $x_1 = 10$, $x_2 = -40$ (不合题意,舍去). 即 $x = 10$.

答:当表面积为 2800 cm^2 时,该盒子的高为 10 cm .

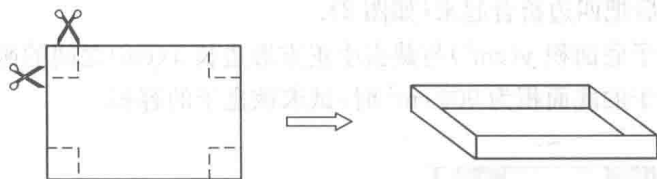


第 001 题图 3

【易错分析】 草图各边比例不规范,各边必要的标注欠缺;表面积概念不清,导致不能准确找到等量关系.

【变式训练】

001' 探索研究:如图 1,把一张长 10 cm ,宽 8 cm 的矩形硬纸板的四周各剪去一个同样大小的正方形,再折合成一个无盖的长方体盒子(纸板的厚度忽略不计).



第 001' 题图 1

(1) 要使长方体盒子的底面积为 48 cm^2 ,那么剪去的正方形的边长为多少?

(2) 你感到折合而成的长方体盒子的侧面积会不会有最大的情况? 如果有,请你求出最大值和此时剪去的正方形的边长;如果没有,请你说明理由;

(3) 如果把矩形硬纸板的四周分别剪去 2 个同样大小的正方形和 2 个同样形状、同样大小的矩形,然后折合成一个有盖的长方体盒子,当长方体盒子的高等于所剪去的正方形的边长时,是否有侧面积最大的情况? 如果有,请你求出最大值和此时剪去的正方形的边长;如果

没有,请你说明理由.

002 已知:如图1,图形①满足 $AD = AB$, $MD = MB$, $\angle A = 72^\circ$, $\angle M = 144^\circ$. 图形②与图形①恰好拼成一个菱形(如图2). 记 AB 的长度为 a , BM 的长度为 b .

(1) 图形①中 $\angle B = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$, 图形②中 $\angle E = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$;

(2) 小明有两种纸片各若干张,其中一种纸片的形状及大小与图形①相同,这种纸片称为“风筝一号”;另一种纸片的形状及大小与图形②相同,这种纸片称为“飞镖一号”.

① 小明仅用“风筝一号”纸片拼成一个边长为 b 的正十边形,需要这种纸片 张;

② 小明若用若干张“风筝一号”纸片和“飞镖一号”纸片拼成一个“大风筝”(如图3),其中 $\angle P = 72^\circ$, $\angle Q = 144^\circ$, 且 $PI = PJ = a + b$, $IQ = JQ$. 请在图3中画出拼接线并保留画图痕迹.(本题中均为无重叠、无缝隙拼接)

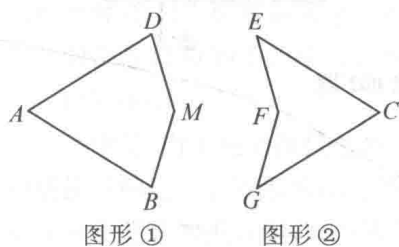


图1

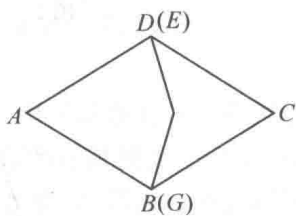


图2

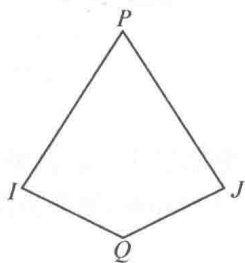


图3

第002题

【命题意图】 试题呈现方式新颖,突出动手操作能力. 要解答好此题,除必须掌握菱形的性质、三角形全等的性质、三角形(或四边形)的内角和及密铺地面的秘诀外,还应具备较强的观察、分析及探索能力. 作为压轴题,它的难度有所降低,但更实用,充分体现“玩中学,学中做”的课改理念.

【答题要旨】 这是一道操作探索题,解决此类试题通常应先通过观察,然后借助度量、猜想或辅助线发现结论. 问题(1)的解题关键是连结 AM , 然后借助 $\triangle ADM \cong \triangle ABM$ 的性质及三角形(或四边形)的内角和求出 $\angle B$ 的度数,而 $\angle E$ 可借助图2菱形的性质求解;问题(2)第①小题应将实际问题转化为图形的镶嵌;第②小题主要考查基本作图的应用,其画法为:如图4,以 P 为圆心, a 为半径画弧,与 PI 和 PJ 分别交于 M 、 N 两点,然后分别以点 M 、点 N 为圆心, b 为半径在 $\angle IPJ$ 的内部画弧,取两弧交点中离点 P 较近的一点,连结这点与点 Q ,画出满足题意的拼接线.

【满分解答】

解 (1) 72 , 36 .

(2) ① 5(提示:要用“风筝一号”纸片拼成一个边长为 b 的正十边形,由正十边形性质可知“风

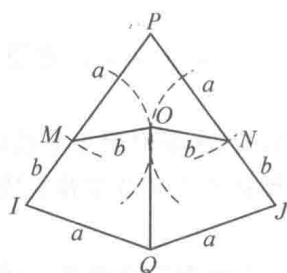
筝一号”纸片的点 A 与正十边形的中心重合, 又 $\angle A = 72^\circ$, 则需要这种纸片的数量 $= \frac{360^\circ}{72^\circ} = 5$).

② 依题意, 可用两张“风筝一号”纸片和一张“飞镖一号”纸片拼成一个“大风筝”, 其拼接线如图 4 所示.

【易错分析】 问题(1)因不会添加辅助线导致解题困难; 问题(2)或所画图形不规范(如画图痕迹欠缺, 各边缺少必要的标注等); 或因对无重叠、无缝隙拼接的理解不清而找不到问题解答的切入点.

【变式训练】

002 如图 1, 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形, $AB \parallel DC$, 由 4 个这样的等腰梯形可以拼出如图 2 所示的平行四边形.



第 002 题图 4

(1) 求四边形 $ABCD$ 四个内角的度数;

(2) 试探究四边形 $ABCD$ 四条边之间存在的等量关系, 并说明理由;

(3) 现有图 1 中的等腰梯形若干个, 利用它们你能拼出一个菱形吗? 若能, 请你画出大致示意图.

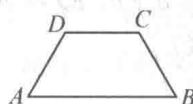


图 1

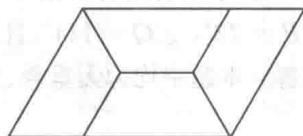


图 2

第 002 题

003

操作示例:

对于边长为 a 的两个正方形 $ABCD$ 和 $EFGH$, 按如图 1 所示的方式摆放, 在沿虚线 BD 、 EG 剪开后, 可以按图中所示的移动方式拼接为图 1 中的四边形 $BNED$.

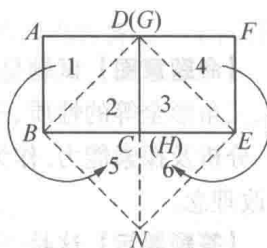


图 1

从拼接的过程中容易得到结论:

① 四边形 $BNED$ 是正方形; ② $S_{\text{正方形}ABCD} + S_{\text{正方形}EFGH} = S_{\text{正方形}BNED}$.

实践与探究:

(1) 对于边长分别为 a 、 b ($a > b$) 的两个正方形 $ABCD$ 和 $EFGH$, 按如图 2 所示的方式摆放, 连结 DE , 过点 D 作 $DM \perp DE$, 交 AB 于点 M , 过点 M 作 $MN \perp DM$, 过点 E 作 $EN \perp DE$, MN 与 EN 相交于点 N .

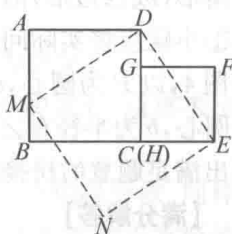


图 2

① 证明四边形 $MNED$ 是正方形, 并用含 a 、 b 的代数式表示正方形 $MNED$ 的面积;

第 003 题

② 在图 2 中,将正方形 $ABCD$ 和正方形 $EFGH$ 沿虚线剪开后,能够拼接为正方形 $MNED$,请简略说明你的拼接方法(类比图 1,用数字表示对应的图形).

(2) 对于 n (n 是大于 2 的自然数) 个任意的正方形,能否通过若干次拼接,将其拼接成为一个正方形? 请简要说明你的理由.

【命题意图】 试题给出两个正方形的组合图形,采用了类似于勾股定理探究时使用的图形割补拼接法,将动手操作与演绎推理有机结合. 该题不仅可以加强对思维能力的培养,而且使创新教育和实践能力的培养落到了实处,充分地体现了新课程的理念.

【答题要旨】 解题关键是把握拼图变换过程中“面积不变”这一特征,围绕着构造全等三角形进行割补拼接,最后从特殊到一般得到结论:任意的两个正方形,按照一定的条件通过若干次拼接,均能拼接成为一个正方形.

【满分解答】

解 (1) ① 证明:由作图的过程可知四边形 $MNED$ 是矩形.

在 $\triangle ADM$ 与 $\triangle CDE$ 中, $\because \angle ADM + \angle MDC = \angle CDE + \angle MDC = 90^\circ$, $\therefore \angle ADM = \angle CDE$. $\because AD = CD$, $\angle A = \angle DCE$, $\therefore \triangle ADM \cong \triangle CDE$. $\therefore DM = DE$, $\therefore$ 四边形 $MNED$ 是正方形. $\because DE^2 = CD^2 + CE^2 = a^2 + b^2$, $\therefore$ 正方形 $MNED$ 的面积为 $a^2 + b^2$.

② 过点 N 作 $NP \perp BE$, 垂足为 P , 如图 3.

可以证明图中 6 与 5 位置的两个三角形全等, 4 与 3 位置的两个三角形全等, 2 与 1 位置的两个三角形也全等. 所以将 6 放到 5 的位置, 4 放到 3 的位置, 2 放到 1 的位置, 恰好拼接为正方形 $MNED$.

(2) 答:能.

理由是:由上述的拼接过程可以看出:对于任意的两个正方形都可以拼接为一个正方形,而拼接出的这个正方形可以与第三个正方形再拼接为一个正方形……依次类推. 由此可知:对于 n 个任意的正方形,可以通过 $(n-1)$ 次拼接,得到一个正方形.

【易错分析】 错误的原因是对割补拼接拼图的基本常识没有掌握,不能构造全等三角形进行割补拼接,演绎推理能力有待提高.

【变式训练】

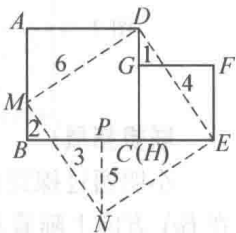
003 在图 1 至图 5 中,正方形 $ABCD$ 的边长为 a ,等腰直角三角形 FAE 的斜边 $AE = 2b$,且边 AD 和 AE 在同一直线上.

操作示例:

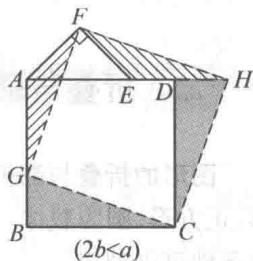
当 $2b < a$ 时,如图 1,在 BA 上选取点 G ,使 $BG = b$,连结 FG 和 CG ,裁掉 $\triangle FAG$ 和 $\triangle CGB$ 并分别拼接到 $\triangle FEH$ 和 $\triangle CHD$ 的位置构成四边形 $FGCH$.

思考发现:

小明在操作后发现:从剪拼方法易知 EH 与 AD 在同一直线上,且 $\triangle FAG \cong \triangle FEH$, $\therefore AG = EH$. 过点 F 作 $FM \perp AE$ 于点 M (图略),则 $AM = ME = b$, $\therefore MD = a - b$. 又 $EH = AG = a - b$, $\therefore MD = EH$, 则 $DH = ME = BG$. 故将 $\triangle CGB$ 拼接到 $\triangle CHD$ 的位置时,点 G 与点 H 重合. 这样,对于剪拼得到的四边形 $FGCH$ (如图 1),利用 SAS 公理可判断 $\triangle HFM \cong \triangle CHD$, 易得 $FH = HC = GC = FG$, $\angle FHC = 90^\circ$. 进而根据正方形的判定方法,可以判断出四边形 $FGCH$ 是正方形.



第 003 题图 3



第 003' 题图 1

实践探究:

- (1) 正方形 $FGCH$ 的面积是_____;(用含 a 、 b 的式子表示)
- (2) 类比图 1 的剪拼方法,请你就图 2 至图 5 的三种情形分别画出剪拼成一个新正方形的示意图.

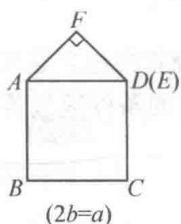


图 2

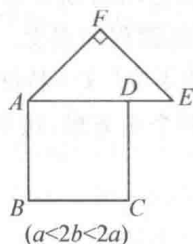


图 3

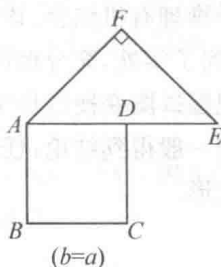


图 4

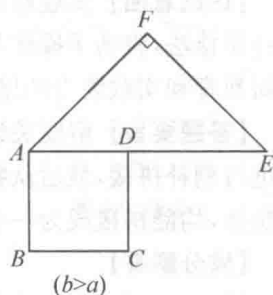


图 5

第 003' 题

联想拓展:

小明通过探究后发现:当 $b \leq a$ 时,此类图形都能剪拼成正方形,且所选取的点 G 的位置在 BA 方向上随着 b 的增大不断上移.当 $b > a$ 时,如图 5 的图形能否剪拼成一个正方形?若能,请在图中画出剪拼的示意图;若不能,简要说明理由.

二、折叠与翻折

图形的折叠与翻折实际上就是全等变化,其实质就是轴对称.折叠、翻折型试题通常以矩形、正方形、圆为载体.其解题关键为:分清折叠前后哪些量变了、哪些量没有变,折叠后又有哪

些条件可以利用.

004 课程学习:正方形折纸中的数学.

动手操作:如图 1,四边形 $ABCD$ 是一张正方形纸片,先将正方形 $ABCD$ 对折,使 BC 与 AD 重合,折痕为 EF ,把这个正方形展平,然后沿直线 CG 折叠,使 B 点落在 EF 上,对应点为 B' .

数学思考:

- (1) 求 $\angle CB'F$ 的度数;
- (2) 如图 2,在图 1 的基础上,连结 AB' ,试判断 $\angle B'AE$ 与 $\angle GCB'$ 的大小关系,并说明

理由;

解决问题:

(3) 如图 3, 按以下步骤进行操作:

第一步: 先将正方形 $ABCD$ 对折, 使 BC 与 AD 重合, 折痕为 EF , 把这个正方形展平, 然后继续对折, 使 AB 与 DC 重合, 折痕为 MN , 再把这个正方形展平, 设 EF 和 MN 相交于点 O ;

第二步: 沿直线 CG 折叠, 使 B 点落在 EF 上, 对应点为 B' , 再沿直线 AH 折叠, 使 D 点落在 EF 上, 对应点为 D' ;

第三步: 设 CG 、 AH 分别与 MN 相交于点 P 、 Q , 连结 $B'P$ 、 PD' 、 $D'Q$ 、 QB' , 试判断四边形 $B'PD'Q$ 的形状, 并证明你的结论.

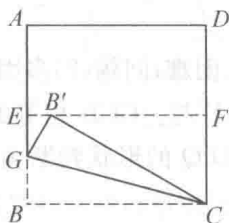


图1

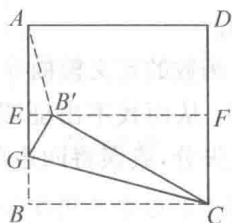


图2

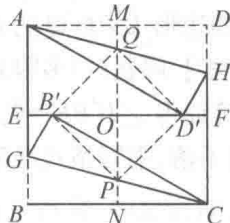


图3

第 004 题

【命题意图】 试题背景源自教材, 题目似曾相识, 虽然“猜不到”, 却是“摸得着”. 主要考查正方形的性质与判定、折叠的性质、三角函数的定义等知识. 试题的设计由浅入深, 既重视考查知识形成过程中自主学习的能力, 又能较好地检测分析与探究能力.

【答题要旨】 问题(1)由对折得出 $CB = CB'$, 再由 $\sin \angle CB'F = \frac{1}{2}$ 得出 $\angle CB'F$ 的度数; 问题(2)可利用对称性证明 $\angle B'AE = \angle B'BE$ 及 $\angle GCB = \angle GCB'$, 再运用同角的余角相等即可得出结论; 问题(3)关键是利用三角形全等及对称性证明 $OB' = OP = OD' = OQ$, 再由 $PQ \perp B'D'$ 得到四边形 $B'PD'Q$ 为正方形.

【满分解答】

(1) 如图 1, 由对折可知, $\angle EFC = 90^\circ$, $CF = \frac{1}{2}CD$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形, $\therefore CD = CB$, $\therefore CF = \frac{1}{2}BC$. $\because CB' = CB$, $\therefore CF = \frac{1}{2}CB'$, $\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle B'FC$ 中, $\sin \angle CB'F = \frac{CF}{CB'} = \frac{1}{2}$, $\therefore \angle CB'F = 30^\circ$.

(2) 如图 4, 连结 BB' 交 CG 于点 K , 由对折可知, EF 垂直平分 AB , $\therefore B'A = B'B$, $\angle B'AE = \angle B'BE$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形, $\therefore \angle ABC = 90^\circ$, $\therefore \angle B'BE + \angle KBC = 90^\circ$.

由折叠知, $\angle BKC = 90^\circ$, $\therefore \angle KBC + \angle GCB = 90^\circ$, $\therefore \angle B'BE = \angle GCB$. 又由折叠知, $\angle GCB = \angle GCB'$, $\therefore \angle B'AE = \angle GCB'$.

(3) 四边形 $B'PD'Q$ 为正方形.

证明: 如图 5, 连结 AB' , 由(2)可知 $\angle B'AE = \angle GCB'$, 由折叠可知, $\angle GCB' = \angle PCN$, $\therefore \angle B'AE = \angle PCN$, 由对折知 $\angle AEB' = \angle CNP = 90^\circ$, $AE = \frac{1}{2}AB$, $CN = \frac{1}{2}BC$. 又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形, $\therefore AB = BC$, $\therefore AE = CN$, $\therefore \triangle AEB' \cong \triangle CNP$, $\therefore EB' = NP$. 同

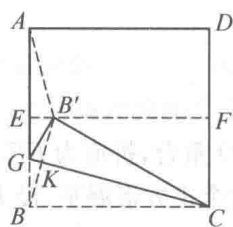


图4

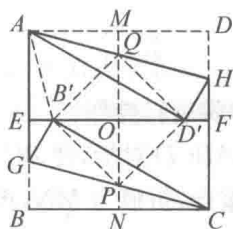


图5

第 004 题

理可得, $FD' = MQ$. 由对称性可知, $EB' = FD'$, $\therefore EB' = NP = FD' = MQ$. 由两次对折可得, $OE = ON = OF = OM$, $\therefore OB' = OP = OD' = OQ$, 由对折知, $MN \perp EF$ 于点 O , $\therefore PQ \perp B'D'$ 于点 O , $\therefore$ 四边形 $B'PD'Q$ 为正方形.

【易错分析】 问题(1)多因对三角函数的定义模糊导致切入困难; 问题(2)多因不会借助同角的余角相等证得 $\angle B'BE = \angle GCB$, 从而找不出证明 $\angle B'AE$ 与 $\angle GCB'$ 相等的依据; 问题(3)或因题意不清、书写格式混乱导致失分, 或误将四边形 $B'PD'Q$ 的形状判断为矩形导致结论错误.

【变式训练】

004 如图 1, 矩形纸片 $ABCD$ 的边长分别为 a 、 b ($a < b$), 点 M 、 N 分别为边 AD 、 BC 上两点(点 A 、 C 除外), 连结 MN .

(1) 如图 2, 分别沿 ME 、 NF 将 MN 两侧纸片折叠, 使点 A 、 C 分别落在 MN 上的 A' 、 C' 处, 直接写出 ME 与 FN 的位置关系;

(2) 如图 3, 当 $MN \perp BC$ 时, 仍按问题(1)中的方式折叠, 请求出四边形 $A'EBN$ 与四边形 $C'FDM$ 的周长(用含 a 的代数式表示), 并判断四边形 $A'EBN$ 与四边形 $C'FDM$ 周长之间的数量关系;

(3) 如图 4, 若对角线 BD 与 MN 交于点 O , 分别沿 BM 、 DN 将 MN 两侧纸片折叠, 折叠后, 点 A 、 C 恰好都落在点 O 处, 并且得到的四边形 $BNDM$ 是菱形, 请你探索 a 、 b 之间的数量关系;

(4) 在问题(3)情况下, 当 $a = \sqrt{3}$ 时, 求菱形 $BNDM$ 的面积.

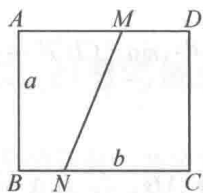


图1

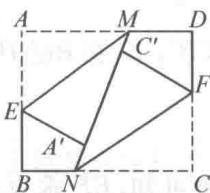


图2

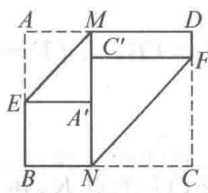


图3

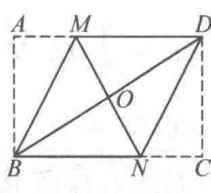


图4

第 004' 题

005 已知矩形纸片 $ABCD$, $AB = 2$, $AD = 1$, 将纸片折叠, 使顶点 A 与边 CD 上的点 E 重合.

(1) 如果折痕 FG 分别与 AD 、 AB 交于点 F 、 G (如图 1), $AF = \frac{2}{3}$, 求 DE 的长;

(2) 如果折痕 FG 分别与 CD 、 AB 交于点 F 、 G (如图 2), $\triangle AED$ 的外接圆与直线 BC 相切, 求折痕 FG 的长.

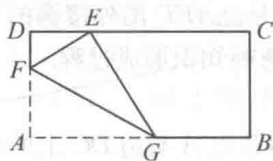


图 1

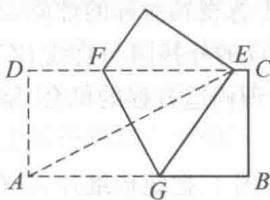


图 2

第 005 题

【命题意图】 试题以矩形为载体, 借助折叠变换考查轴对称的性质、勾股定理、直线与圆相切的性质等知识以及运用数形结合、化归思想分析问题、解决问题的能力.

【答题要旨】 问题(1)为基本题, 答题的关键是理解轴对称的性质; 问题(2)为提高部分, 解题的关键是利用中点构造中位线, 利用勾股定理构造方程求出 DE . 因此, 利用 90° 的圆周角所对的弦是直径是问题(2)的突破口. 而当直线 BC 与圆相切时, 圆心 O 到直线 BC 之距等于 $\triangle AED$ 的外接圆的半径长, 利用这一特殊性质并运用勾股定理构造方程是解答本题的核心思想.

【满分解答】

解 (1) 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, $AD = 1$, $AF = \frac{2}{3}$, $\angle D = 90^\circ$. 根据轴对称的性质, 得 $EF = AF = \frac{2}{3}$, $\therefore DF = AD - AF = \frac{1}{3}$, 在 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中, $DE = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

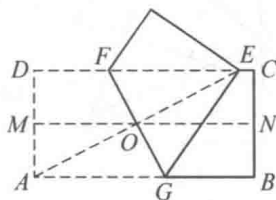
(2) 如图 3, 设 AE 与 FG 的交点为 O , 根据轴对称的性质, 得 $AO = EO$, 取 AD 的中点 M , 连结 MO , 则 $MO = \frac{1}{2}DE$, $MO \parallel DC$, 设 $DE = x$, 则 $MO = \frac{1}{2}x$, 在矩形 $ABCD$ 中, $\angle C = \angle D = 90^\circ$, $\therefore AE$ 为 $\triangle AED$ 的外接圆的直径, O 为圆心.

延长 MO 交 BC 于点 N , 则 $MN \parallel CD$, $\therefore \angle CNM = 180^\circ - \angle C = 90^\circ$. $\therefore ON \perp BC$, 四边形 $MNCD$ 是矩形.

$\therefore MN = CD = AB = 2$, $\therefore ON = MN - MO = 2 - \frac{1}{2}x$. $\because \triangle AED$ 的外接圆与 BC 相切, $\therefore ON$ 是 $\triangle AED$ 的外接圆的半径, $\therefore OE = ON = 2 - \frac{1}{2}x$, $AE = 2ON = 4 - x$.

在 $\text{Rt}\triangle AED$ 中, $AD^2 + DE^2 = AE^2$, $\therefore 1^2 + x^2 = (4 - x)^2$.

解这个方程, 得 $x = \frac{15}{8}$, $\therefore DE = \frac{15}{8}$, $OE = 2 - \frac{1}{2}x = \frac{17}{16}$.



第 005 题图 3