

现代物理基础丛书

71

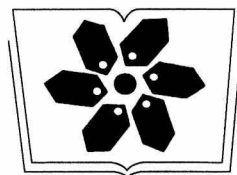
量子场论

Quantum Field Theory

李灵峰 著
古杰 万林焱 张洋 译



科学出版社



中国科学院科学出版基金资助出版

现代物理基础丛书 71

量子场论

Quantum Field Theory

李灵峰 著

古杰 万林焱 张洋 译



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是研究生课程“量子场论”的教材,内容涵盖相对论性波动方程、正则量子化、微扰论与费曼规则、量子电动力学、路径积分方法、重整化、整体与局域对称性、对称性自发破缺与 Higgs 机制、电弱统一理论,以及量子色动力学等内容. 本书的主要特点是给出了详尽的推导过程,方便读者阅读和学习,所用材料主要基于作者多年来在美国、中国授课的讲义,并加以扩充,而且一直依据学生的反馈和建议进行改进. 本书对读者的起点要求不高,具备量子力学和电动力学知识的高年级本科生就可理解,而且尽量自足,并不要求读者太多群论和粒子物理知识. 这在本书中讲授对称性和电弱统一理论的部分有明确的体现.

本书适合高等院校理论物理专业的研究生以及高年级本科生阅读学习,也可以作为相关专业的研究人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

量子场论/(美)李灵峰著;古杰,万林焱,张洋译.—北京:科学出版社,2015.9

(现代物理基础丛书;71)

ISBN 978-7-03-045897-1

I. ①量… II. ①李… ②古… ③万… ④张… III. ①量子场论
IV. ①0413.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 230845 号

责任编辑:钱俊 裴威/责任校对:彭涛
责任印制:徐晓晨/封面设计:无极书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京京华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015年9月第一版 开本:720×1000 1/16

2015年9月第一次印刷 印张:26

字数:503 000

定价:148.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

电弱和强相互作用理论标准模型的构造在 20 世纪 70 年代就取得了巨大的成功, 现如今它已经成为一套基本原理, 而除此之外的新物理则被称为“超出标准模型的物理”(the beyond standard model physics). 标准模型的理论是基于规范对称性的原理建立的——强相互作用、弱相互作用和电磁相互作用都是在量子场论的框架下建立起来的规范相互作用. 对于任何一个对现代高能物理感兴趣的人来说, 规范场论知识的重要性是不言而喻的.

本书的内容包括场论和规范理论的基本原理以及它们在粒子物理中的应用, 主要目标是给学生和研究人员提供一个对上述内容的实用的介绍. 在讲述的过程中专注于最终有用的结果, 尽可能地省略了复杂的数学证明, 而代之以启发式的讨论和具体的例证, 并且包括了大部分参考资料中省略掉的中间步骤.

作者在卡内基梅隆大学、新竹清华大学和北京的清华大学等学校教授研究生场论课程已有 30 多年. 本书是基于作者的讲稿整理而成的, 其中也参考了很多来自学生的反馈和建议. 此外, 书中的内容也被加以扩展以满足想要自学本科目的同学的需要. 阅读本书的预备知识是一年期的量子力学课程.

本书内容分为三个部分. 第一部分是场论的基本知识, 其中第 1、2 章回顾了狭义相对论的内容, 讨论张量分析和相对论性波动方程; 第 3~5 章讨论的是正则量子化、微扰论的内容以及 QED 的应用; 第 6 和 7 章分别是路径积分量子化的方法和重整化理论. 第二部分是有关对称性的讨论, 第 8、9 章分别是整体与局域对称性以及对称性自发破缺的内容. 第三部分是描述标准模型的内容, 第 10、11 章分别建立了电弱相互作用理论和强相互作用的 QCD 理论. 书中包含的内容可以在两学期的量子场论课程从容地讲完.

尽管关于量子场论已经有不少优秀的英文教材, 但是中文的场论教材却不多见. 作者希望这一中文版的场论教材可以作为现有教材的一个补充. 本书第一部分的内容翻译自 2013 年秋季作者在北京清华大学教授的场论课程的讲稿. 第二部分和第三部分翻译自作者在各地 (包括美国、中国大陆和中国台湾) 讲授标准模型及其应用时所使用的讲稿. 翻译工作由古杰、张洋、万林焱三位同学完成. 他们三位都选修了作者 2013 年秋季在北京清华大学的场论课程. 其中古杰仔细检查了前几章的翻译初稿, 并提出了许多修改意见. 万林焱同学除承担许多章节的翻译工作之外, 还提供了很多编排稿件的技术性建议. 张洋完成了对翻译稿最后的修改工作, 并将稿子组织成最终的格式. 正是由于这三位同学所做的工作, 本书的出版成为可

能, 在此谨向他们表示感谢.

本书最后列出的参考文献和参考书目是作者所熟悉的资料中经常被引用到的, 但它并不是一个全面的列表. 在此对没有被充分提及的同行表示歉意. 作者希望这个列表已经提供了充足的材料, 可以让感兴趣的读者由此出发继续寻找其他的文献.

本书是作者多年到各处访问的过程中完成的. 在此要感谢北京清华大学的邝宇平院士、王青教授和阮东教授, 中国科学院理论物理研究所的吴岳良院士、张肇西院士和庄辞博士, 华中科技大学的龚云贵教授, 重庆邮电大学的张益教授, 新竹清华大学的耿朝强教授, 感谢他们对作者的热情招待. 此外, 还要感谢中国科学院科学出版基金的资助, 以及科学出版社钱俊编辑给予的许多帮助和建议.

李灵峰

2015 年于北京

目 录

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 绪论	1
1.1.1 量子场论的必要性	1
1.1.2 自然单位制	4
1.2 狭义相对论回顾	7
1.2.1 Lorentz 变换	7
1.2.2 能量和动量	10
1.2.3 张量分析	12
1.3 作用量原理	17
1.3.1 质点力学	17
1.3.2 场论	19
1.4 对称性和 Noether 定理	20
1.4.1 质点力学	21
1.4.2 场论	23
第 2 章 相对论性波动方程	27
2.1 相对论性方程	27
2.1.1 Klein-Gordon 方程	27
2.1.2 Dirac 方程	30
2.1.3 螺旋度和手征性	35
2.2 Lorentz 群	44
2.2.1 生成元	45
2.2.2 简单表示	47
2.3 附录: $SU(2)$ 对称性	50
2.3.1 $SU(2)$ 群	51
2.3.2 三维空间旋转群 $O(3)$	60
2.3.3 旋转群与量子力学	64
第 3 章 正则量子化	66
3.1 标量场	68
3.1.1 正则量子化	68

3.1.2	场的对易子及因果性	73
3.1.3	含对称性的标量场	74
3.2	费米场	76
3.2.1	反对易关系	76
3.2.2	对称性	79
3.3	电磁场	80
3.3.1	规范不变性	81
3.3.2	量子化	82
3.4	附录	84
3.4.1	简谐振子	84
3.4.2	$U(1)$ 局域对称性	85
3.4.3	非相对论性场论	87
第 4 章	微扰论与费曼规则	91
4.1	相互作用理论	91
4.1.1	$\lambda\phi^4$ 的例子	91
4.1.2	物理态的性质	92
4.1.3	Källén-Lehmann 谱表示	93
4.1.4	初态与初态的场 —— 渐近条件	95
4.2	S 矩阵	99
4.3	LSZ 约化公式	101
4.4	U 矩阵	103
4.5	真空期望值的微扰展开	105
4.5.1	Wick 定理	107
4.5.2	Feynman 传播子	109
4.5.3	真空振幅	111
4.5.4	计算 S 矩阵元	112
4.6	Feynman 规则	115
4.7	附录: 截面积和衰变率	117
4.7.1	衰变率	117
4.7.2	截面积	118
第 5 章	量子电动力学	120
5.1	量子电动力学理论	120
5.1.1	量子化	120
5.1.2	光子的传播子	123
5.1.3	QED 中的 Feynman 规则	124

5.2	e^+e^- 湮没	125
5.2.1	$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$	125
5.2.2	$e^+e^- \rightarrow$ 强子	129
5.3	$ep \rightarrow ep$	130
5.3.1	质子作为点粒子	131
5.3.2	强相互作用的影响	135
5.4	Compton 散射	138
5.5	附录: Ward 恒等式	142
第 6 章	路径积分方法	144
6.1	一维量子力学	144
6.1.1	跃迁振幅	144
6.1.2	Green 函数	147
6.1.3	例子: 自由粒子的路径积分	150
6.2	场论	151
6.2.1	生成泛函	151
6.2.2	连通的 Green 函数	152
6.2.3	自由场生成泛函	154
6.2.4	微扰展开与 Feynman 图	157
6.3	Grassmann 代数	163
6.3.1	一维	163
6.3.2	一般情况	164
6.3.3	Grassmann 代数的 Gauss 积分	165
第 7 章	重整化理论	168
7.1	重整化	168
7.1.1	$\lambda\phi^4$ 理论的重整化	169
7.1.2	BPH 重整化	176
7.1.3	正规化	182
7.2	幂次计算和可重整化性	190
7.2.1	包含费米子和标量场的理论	190
7.2.2	包含矢量场的理论	195
7.2.3	复合算符	200
7.3	重整化群	202
7.4	附录: n 维积分	207
7.4.1	n 维“球”坐标	207
7.4.2	维数正规化中的一些积分	210

第 8 章 整体与局域对称性	214
8.1 整体对称性	214
8.1.1 Abel 对称性	214
8.1.2 非 Abel 对称性	218
8.1.3 对称性破缺和重整化	220
8.2 局域对称性	221
8.2.1 电磁相互作用的局域对称性	221
8.2.2 Abel 局域对称性	224
8.2.3 非 Abel 对称性 —— Yang-Mills 场	226
8.3 规范理论的路径积分量子化	230
8.3.1 规范理论的体积因子	231
8.3.2 Faddeev-Popov 鬼场	236
8.3.3 协变规范	237
第 9 章 对称性自发破缺与 Higgs 机制	244
9.1 引言	244
9.1.1 对称性与简并	244
9.1.2 对称性自发破缺	245
9.1.3 Goldstone 定理	246
9.2 非相对论系统中的对称性自发破缺 —— 超流现象	249
9.3 相对论性系统中对称性自发破缺	254
9.3.1 整体对称性	254
9.3.2 局域对称性	265
第 10 章 电弱统一理论	270
10.1 弱作用的基本特征	270
10.1.1 弱作用过程的分类	270
10.1.2 弱作用中的选择定则	271
10.2 弱作用的唯象模型	273
10.2.1 Fermi 理论	274
10.2.2 宇称不守恒与 V-A 理论	275
10.2.3 中间矢量玻色子理论	277
10.3 电弱统一理论	278
10.3.1 $SU(2) \times U(1)$ 模型的构造	278
10.3.2 标准模型的现象学	292
10.3.3 中微子振荡	297
10.4 附录: 么正性	299

第 11 章 强相互作用理论	304
11.1 夸克模型	304
11.1.1 同位旋对称性	304
11.1.2 $SU(3)$ 对称性	307
11.1.3 夸克模型	308
11.2 深度非弹性散射	314
11.2.1 质子结构	314
11.2.2 ep 单举散射	317
11.2.3 Bjorken 标度	320
11.2.4 部分子模型	324
11.2.5 部分子模型的求和规则和应用	327
11.3 光锥奇异性和 Bjorken 标度	329
11.3.1 自由场的光锥奇异性	329
11.3.2 自由场奇异性 and 标度	333
11.4 量子色动力学	337
11.4.1 渐近自由	337
11.4.2 QCD 拉氏量	340
11.4.3 重整化群和 QCD	343
11.4.4 附录: 色散关系	353
参考文献	356
参考书目	358
附录: 群论	363
索引	392
《现代物理基础丛书》已出版书目	400

第1章 绪 论

1.1 绪 论

尽管非相对论性量子力学可以对其适用的领域的问题进行合理的解释,但对粒子能量极高并伴随着粒子产生和湮没的相对论系统却无能为力. 本节先从量子力学基本原理的角度说明它的不足,然后对狭义相对论进行一个回顾,因为对于能量极高且速度接近光速的粒子来说,狭义相对论是一个必要的理论框架.

当我们学习经典或非相对论系统时,拉氏量形式都是一个合适的框架. 另外,它在对系统对称性的讨论中尤其方便,因此本章还将回顾从质点力学到场论的最小作用量原理以及拉氏量形式. 作为后面章节的铺垫,还将讨论 Lagrange 场论中的对称性与守恒律.

1.1.1 量子场论的必要性

我们已经学过非相对论性量子力学,它可以很好地解决原子甚至亚原子尺度的涉及微观粒子的一些物理问题. 那么为什么我们需要一个相对论性的场论呢?一方面,我们所研究的高能物理领域,很多粒子速度极高,相对论的引入就很有必要了;另一方面,该领域的物理现象通常伴随着粒子的产生和湮没,非相对论量子力学是无能为力的,而量子场论的引入则可以描述粒子数变化的过程,这将在后面的章节中讨论. 下面我们先来讨论非相对论量子力学在这一点上的局限性.

在非相对论量子力学中, Schrödinger 方程包含了粒子数守恒,这从下面的推导中可以看出. Schrödinger 方程给出

$$H\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \Rightarrow \int d^3x (\psi^\dagger H\psi) = i\hbar \int d^3x \left(\psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \quad (1-1)$$

利用哈密顿量的厄米性 (Hermitian), 取复共轭得到

$$\psi^\dagger H = -i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \Rightarrow \int d^3x (\psi^\dagger H\psi) = -i\hbar \int d^3x \left(\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \psi \right) \quad (1-2)$$

两式相减得

$$\frac{d}{dt} \int d^3x \psi^\dagger \psi = 0 \quad (1-3)$$

因此 $\int d^3x(\psi^\dagger\psi)$ 是不随时间变化的. 换句话说, 粒子数守恒, 没有粒子产生或湮没. 但同时, 利用正则对易关系

$$[x, p] = i\hbar \quad (1-4)$$

可以得到 Heisenberg 不确定关系

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1-5)$$

相对论将动量和能量用质能关系联系起来, 即

$$p^2 c^2 + m^2 c^4 = E^2 \quad (1-6)$$

因此能量的不确定度为

$$\Delta E = \frac{p\Delta p}{E} c^2 \geq \frac{p\hbar c^2}{E\Delta x} \implies \Delta x \geq \frac{pc}{E} \left(\frac{\hbar c}{\Delta E} \right) \quad (1-7)$$

为了避免新粒子的产生, 我们要求 $\Delta E \leq mc^2$. 于是得到了坐标不确定度 Δx 的下限

$$\Delta x \geq \frac{pc}{E} \frac{\hbar}{mc} = \frac{v}{c} \frac{\hbar}{mc} \quad (1-8)$$

下面分两种情况讨论.

(a) 非相对论粒子. 速度远小于光速 c , 即

$$\frac{v}{c} \ll 1 \quad (1-9)$$

所以 Δx 并无太大限制. 波函数的概率诠释说明 $|\psi(x)|^2$ 是在点 x 附近 d^3x 的体积内观察到粒子的概率密度. 换句话说, 粒子可以局限在任意小的一个空间范围内.

(b) 相对论粒子. 在这种情况下, 有

$$\frac{v}{c} \approx 1 \quad (1-10)$$

因此

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{mc} \quad (1-11)$$

也就是说, 粒子不能居于一个比 Compton 波长 $\frac{\hbar}{mc}$ 小的空间尺度内. 反过来说, 在比 Compton 波长小的空间尺度内, 将不可避免地产生新的粒子.

标量场和旋量场的非相对论性波动方程是 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程. 下面两章将会详细讨论 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程作为单粒子波动方程所产生的困难, 包括负几率和负能量问题, 及对应场量子化是如何解决这些困难的. 此处以 Klein 佯谬为例说明这个问题.

Klein 佯谬

Klein-Gordon 方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \psi(x, t) = 0 \quad (1-12)$$

其中, m 为质量. 它是最简单的相对论性波动方程. 考虑一个阶跃势垒 $V_0 > 0$ (图 1-1), 波函数的解为

$$\begin{aligned} \psi_L(x, t) &= e^{-iEt - ip_1x} + R e^{-iEt + ip_1x} \\ \psi_R(x, t) &= T e^{-iEt - ip_2x} \end{aligned} \quad (1-13)$$

其中

$$p_1 = \sqrt{E^2 - m^2}, \quad p_2 = \sqrt{(E - V_0)^2 - m^2} \quad (1-14)$$

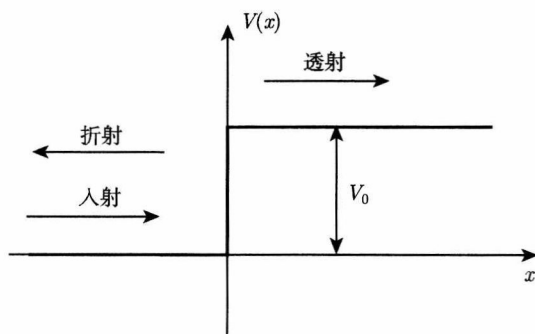


图 1-1 阶跃势垒

波函数在边界 $x = 0$ 处的连续性条件

$$\psi_L(t, 0) = \psi_R(t, 0) \quad \text{和} \quad \partial_x \psi_L(t, 0) = \partial_x \psi_R(t, 0) \quad (1-15)$$

给出

$$1 + R = T, \quad (1 - R)p_1 = Tp_2 \quad (1-16)$$

由上式可求得 R 和 T 分别为

$$T = \frac{2p_1}{p_1 + p_2}, \quad R = \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} \quad (1-17)$$

在非相对论情形中, 如果 $E > V_0 + m$, 则 p_1 与 p_2 均为实数, 既有透射也有反射; 如果 $E < V_0 + m$, 则 p_2 为虚数, 只有反射波存在, 透射波在 Compton 波长内指数衰减. 然而在相对论情形中, 当势垒增加至 $V_0 > 2m$ 且能量在 $m < V_0 - E$ 范围

内时, p_1 和 p_2 均为实数, 部分透射, 部分反射. 这是一个奇怪的结果, 因为当 V_0 很大时, 它应该不让粒子透射过去, 而结果却是在 $x > 0$ 的地方发现有粒子传播. 这个结果称为 Klein 佯谬. 这只能由在阶跃势垒处产生了新粒子来解释.

1.1.2 自然单位制

高能物理中为方便起见通常取自然单位制, 即

$$\hbar = c = 1 \quad (1-18)$$

在国际单位制中

$$\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s} \quad (1-19)$$

因此, 在自然单位制中 $\hbar = 1$ 就意味着能量的量纲为 [时间] $^{-1}$. 同样地, 光速

$$c = 2.99 \times 10^8 \text{m/s} \quad (1-20)$$

所以 $c = 1$ 意味着时间和长度有着相同的量纲. 在计算的最终结果中, 通常需采用国际单位制, 所以需要将 \hbar 和 c 的数值代回. 需要注意, 在不同的场合下同一物理量可能有不同的意义. 比如, 质量就可能有如下几种情况:

(a) [长度] $^{-1}$

$$m_e = \frac{1}{\frac{\hbar}{m_e c}} = \frac{1}{3.86 \times 10^{-11} \text{cm}} \quad (1-21)$$

(b) [时间] $^{-1}$

$$m_e = \frac{1}{\frac{\hbar}{m_e c^2}} = \frac{1}{1.29 \times 10^{-21} \text{s}} \quad (1-22)$$

(c) 能量

$$m_e = m_e c^2 = 0.511 \text{MeV} \quad (1-23)$$

(d) 动量

$$m_e = m_e c = 0.511 \text{MeV}/c \quad (1-24)$$

另外, 高能物理中常用 eV 和 cm 作为能量和长度的单位, 因此下面的转换关系非常有用

$$\hbar = 6.58 \times 10^{-22} \text{MeV} \cdot \text{s}, \quad \hbar c = 1.973 \times 10^{-11} \text{MeV} \cdot \text{cm} \quad (1-25)$$

例 1-1 (a) Thomson 散射截面.

$$\sigma = \frac{8\pi\alpha^2}{3m_e^2} = \frac{8\pi\alpha^2(\hbar c)^2}{3m_e^2 c^4} = \left(\frac{1}{137}\right)^2 \times \frac{(1.973 \times 10^{-11} \text{MeV} \cdot \text{cm})^2}{(0.5 \text{MeV})^2} \times \frac{8\pi}{3} \simeq 6.95 \times 10^{-25} \text{cm}^2 \quad (1-26)$$

在这个例子中, 我们知道散射截面的量纲应为 [长度]², 而这个公式中唯一出现的有量纲的物理量为 m_e , 所以此处实际上是上文对质量 m_e 讨论的情况 (a), 即 m_e 为 [长度]⁻¹ 的情况. 因此, 需要利用因子 $\hbar c$ 将量纲转换为我们需要的面积的量纲. 首先在自然单位制中计算

$$\sigma = \frac{8\pi\alpha^2}{3m_e^2} = \frac{8 \times 3.14}{3 \times (0.5\text{MeV})^2} \times \left(\frac{1}{137}\right)^2 = 1.78 \times 10^{-3} (\text{MeV})^{-2} \quad (1-27)$$

然后乘以因子 $(\hbar c = 1.973 \times 10^{-11} \text{MeV} \cdot \text{cm})^2$ 将面积单位转换为 cm^2 , 即

$$\sigma = 1.78 \times 10^{-3} (\text{MeV})^{-2} \times (1.973 \times 10^{-11} \text{MeV} \cdot \text{cm})^2 = 6.95 \times 10^{-25} \text{cm}^2 \quad (1-28)$$

(b) W 玻色子的衰变率.

标准模型中反应 $W^- \rightarrow e\nu$ 的衰变率为

$$\Gamma(W^- \rightarrow e\nu) = \frac{G_F M_W^3}{\sqrt{2} 6\pi} \quad (1-29)$$

其中, $M_W = 80.4 \text{GeV}/c^2$ 是 W 玻色子的质量; $G_F = 1.166 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$ 是弱作用耦合常数. 首先在自然单位制中计算

$$\Gamma(W^- \rightarrow e\nu) = \frac{G_F M_W^3}{\sqrt{2} 6\pi} = \frac{(1.166 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}) \times (80.4 \text{GeV})^3}{\sqrt{2} \times 6\pi} = 0.227 \text{GeV} \quad (1-30)$$

然后除以因子 \hbar 得到正确的单位

$$\Gamma(W^- \rightarrow e\nu) = \frac{0.228 \text{GeV}}{6.58 \times 10^{-22} \text{MeV} \cdot \text{s}} = 3.5 \times 10^{23} \text{s}^{-1} \quad (1-31)$$

(c) 中微子截面.

对一个准弹性中微子散射 $\nu_\mu + e \rightarrow \mu + \nu_e$, 低能的截面为

$$\sigma = 2G_F^2 m_e E \quad (1-32)$$

其中, E 为中微子的能量. 我们来计算 $E = 10 \text{GeV}$ 的情况. 首先在自然单位制中计算

$$\sigma = 2 \times (1.166 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2})^2 \times 0.5 \text{MeV} \times 10 \text{GeV} = 1.34 \times 10^{-12} \text{GeV}^{-2} \quad (1-33)$$

现在利用转换因子 $\hbar c = 1.973 \times 10^{-11} \text{MeV} \cdot \text{cm}$ 得到面积的量纲

$$\sigma = 1.34 \times 10^{-12} \text{GeV}^{-2} \times (1.973 \times 10^{-11} \text{MeV} \cdot \text{cm})^2 = 5.2 \times 10^{-40} \text{cm}^2 \quad (1-34)$$

顺便提一句, 这是一个很小的反应截面, 说明中微子几乎不与有很多电子的物质发生作用, 所以它可以传播很远而不受其他物质的影响; 而且在低能的情况下, 截面随能量增加而增大.

(d) 将牛顿万有引力常数

$$G_N = 6.67 \times 10^{-11} \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \quad (1-35)$$

转换到 Planck 能标, 则有

$$G_N = 6.67 \times 10^{-11} \left(\frac{\text{m}^2 \cdot \text{kg}}{\text{s}^2} \right) \frac{\text{m}}{\text{kg}^2} = 6.67 \times 10^{-11} \text{J} \cdot \text{m} \cdot \text{kg}^{-2} \quad (1-36)$$

利用

$$\hbar c = 3.16 \times 10^{-26} \text{J} \cdot \text{m} \quad (1-37)$$

可以得到

$$\frac{\hbar c}{G_N} = 3.16 \times 10^{-26} \text{J} \cdot \text{m} \times \frac{1}{6.67 \times 10^{-11} \text{J} \cdot \text{m}} \text{kg}^2 = 4.73 \times 10^{-16} \text{kg}^2 \quad (1-38)$$

所以

$$\sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}} = 2.176 \times 10^{-8} \text{kg} \quad (1-39)$$

又因为

$$1 \text{kg} \cdot c^2 = 1 \text{kg} \times (3 \times 10^8 \text{m/s})^2 = 9 \times 10^{16} \frac{\text{m}^2 \cdot \text{kg}}{\text{s}^2} = 9 \times 10^{16} \text{J}, \quad \text{即 } 1 \text{kg} = 9 \times 10^{16} \text{J}/c^2 \quad (1-40)$$

所以

$$\sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}} = 1.96 \times 10^9 \text{J}/c^2 \quad (1-41)$$

利用转换因子

$$1 \text{GeV} = 1.6 \times 10^{-10} \text{J} \quad \Rightarrow \quad 1 \text{J} = \frac{1}{1.6} \times 10^{10} \text{GeV} \quad (1-42)$$

最终得到

$$m_P \equiv \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}} = \frac{1.96 \times 10^9}{1.6} \times 10^{10} \text{GeV} = 1.225 \times 10^{19} \text{GeV}/c^2 \quad (1-43)$$

这就是我们通常所说的与引力相关的 Planck 能标, 约为 10^{19}GeV , 这几乎是高能领域里最高的能标. 它的另一种表达方式为

$$G_N = 6.07 \times 10^{-39} (\hbar c) (\text{GeV}/c^2)^{-2} \quad (1-44)$$

1.2 狭义相对论回顾

狭义相对论是描述相对论系统最重要的工具. 它的两条基本原理是:

- (a) 光速的大小在任何惯性系中相同.
- (b) 物理定律在任何惯性系中有相同的形式.

这里, 惯性系指的是: 在这个参考系中, 质点在不受外力时保持静止状态或做匀速直线运动.

1.2.1 Lorentz 变换

联系两个惯性系的坐标变换称为 **Lorentz 变换 (Lorentz transformation)**. 用 Lorentz 变换可以探讨物理量是如何随惯性坐标系而变化的. 在这里我们只回顾 Lorentz 变换最重要的性质.

假设坐标系 O' 沿坐标系 O 的 x 方向以速度 v 匀速运动. Lorentz 变换的形式为

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (1-45)$$

或

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma(t - vx), \quad \text{其中 } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (1-46)$$

它使得

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \quad (1-47)$$

即组合

$$\tau^2 = t^2 - r^2 \quad (1-48)$$

在 Lorentz 变换下保持不变, 我们称 τ 为固有时 (proper time). 这个关系保证了光速在任何惯性系中都是相等的. 这可以由下面的推导看出. 假设 $\mathbf{r}_1(t_1)$ 和 $\mathbf{r}_2(t_2)$ 是一个自由粒子轨迹上的两点, 分别处于时间 t_1, t_2 . 因此粒子速率为

$$|v| = \frac{1}{|t_2 - t_1|} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad (1-49)$$

如果速度为光速, 即 $|v| = 1$, 那么有

$$(t_1 - t_2)^2 = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2 \quad (1-50)$$

由于上式是 Lorentz 不变的, 所以光速在各惯性系中相等. 另外, 对于无穷小间隔, 还可以定义无穷小固有时

$$(d\tau)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \quad (1-51)$$