博雅系列精品教材

全国高等医学院校规划教材

医用高等数学

Medical Advanced Mathematics

孙庆文　刘　沛　王中亮　编著

供基础、临床等医学类专业用

第二军医大学出版社

Second Military Medical University Press

全国高等医学院校博雅系列精品教材

医用高等数学

孙庆文　刘　沛　王中亮　编著

第二军医大学出版社
Second Military Medical University Press

内 容 简 介

本书是作者在多年为临床医学、卫生事业管理等专业的本科生和研究生讲授微积分、线性代数和概率论的教学经验基础上编写的。考虑到医科类院校学生对这3门课程的实际需要，本书更多地强调了对数学思想和数学概念的理解以及相关知识的应用，内容的选择也更多地考虑了与医学统计和多元统计分析等相关课程的衔接。全书内容主要分为3篇：微积分、矩阵代数、概率论。

本书可供高等院校医药类专业本科生作为教材使用。矩阵代数和概率论部分也可供相关专业的硕士研究生使用。

图书在版编目(CIP)数据

医用高等数学/孙庆文，刘沛，王中亮编著．—上海：第二军医大学出版社，2015.8

ISBN 978-7-5481-1112-2

Ⅰ．①医… Ⅱ．①孙… ②刘… ③王… Ⅲ．①医用数学—医学院校—教材 Ⅳ．①R311

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第129437号

出 版 人 陆小新

责任编辑 许 悦 崔雪娟

医用高等数学

孙庆文 刘 沛 王中亮 **编著**

第二军医大学出版社出版发行

http://www.smmup.cn

上海市翔殷路800号 邮政编码：200433

发行科电话/传真：021-65493093

全国各地新华书店经销

江苏天源印刷厂印刷

开本：787×1092 1/16 印张：23.75 字数：63万字

2015年8月第1版 2015年8月第1次印刷

ISBN 978-7-5481-1112-2/R·1848

定价：48.00元

前　　言

笔者多年前为教材《高等数学与数学模型》撰写了微分学和数学模型的内容，后来又为教育部“十一五”国家级规划教材《高等数学与数学模型》(第2版)撰写了微分学、矩阵代数、概率论和数学模型的内容。对于这些内容编写的指导思想及个人的一些认识和体会，已经在上述两本书的前言中做过相关的表述，这里老调重弹，略述如下：

本书微积分部分主要是以函数的局部近似为主线。局部近似或局部分析如同盲人摸象，这并非西方科学的缺点而是一种优势，是人们认识事物的开始。分析，就是分开来解析，然后有某种综合，微积分是体现这种认识的范例。早熟的中医有微观、有整体、有简洁统一的模型，但大环境和传承一直存在问题。西方医学正在朝此方向努力，正如人类基因组计划发起人之一 Leroy Hood 所言：“以前我们总是习惯于分析具体的东西，比如 DNA 和蛋白质，但现在我们必须把所有在分子水平上的东西，包括 DNA 和 RNA 上的生物信息、蛋白质相互作用的信息、途径、网络等都整合在一起，用以建立表述生物系统的宏观模型。”系统观和整体思维，天人合一，当然是好东西，但没有分析的综合，容易变得“玄之又玄”。

矩阵代数部分以矩阵在各种关系下的分类和简化(秩标准形、相似对角化、正交对角化等)为主线，串讲了从矩阵运算直到正定矩阵及同时对角化。这部分内容更多地强调了矩阵的分块运算。例题和习题大多是多元统计分析中将会用到的矩阵技巧和方法。本书第 9 章和第 10 章有关正态随机向量的内容用到了其中的一些结果。

概率论给出描述随机现象的数学模型，统计学则研究如何有效地收集和分析带有随机性的数据，做出推断或预测，并为决策或行动提供依据和建议。概率论是统计学的基础。粗略地看，统计学的逻辑是基于似然推理的。例如，参数估计中的极大似然估计和假设检验中的小概率反证法，这两者最后都归结为对随机变量的分布、分布的数字特征以及概率计算的研究。对随机变量的分布(包括近似分布)、

数字特征及相应的概率计算的讨论，正是概率论的中心内容。教材对一些概念的理解花费了较多笔墨。作为应用，在行文中也顺带引出了一些统计思想和方法（极大似然估计、置信区间、中位数检验、检验的功效、Monte-Carlo方法、Bootstrap、潜在结果分析框架及处理效应估计等），对某些概念（期望、条件期望、方差和协方差等）做了比较详细的统计解释。一些例题来自 Bernard Rosner 和 Sheldon M. Ross。

本书由孙庆文（第1、2、3、7、8、9、10、11、12章）、刘沛（第4、5章）和王中亮（第6章）编写。根据我们的教学实践，除标有“*”（超出课程标准的内容）的章节外，微积分、矩阵代数、概率论约分别需要55学时、30时、40学时教授。

本书内容较多，信息量较大，但内容选择和习题配置未尽合理。习题量偏少的问题，留待配套出版的学习指导书中解决。此外，矩阵代数和概率论部分的有些内容和习题的难度可能超出了一般对理工科大学生的要求，但可以作为相关专业硕士研究生的教材。

限于作者的水平，书中的不当和错误在所难免，敬请同行老师和同学们批评指正。

孙庆文

2015年5月

目　　录

第1篇　微　积　分

第1章　函数的极限与连续函数 ………………………… (3)

1.1　实数与数轴 ………………………… (3)
1.2　函数的概念 ………………………… (4)
1.3　函数的极限 ………………………… (9)
1.4　求极限的方法 ………………………… (16)
1.4.1　直接代入法 ………………………… (16)
1.4.2　两个重要极限 ………………………… (17)
1.4.3　无穷小量、无穷大量、局部有界量之间的运算规则 ………………………… (19)
1.4.4　四则运算法则 ………………………… (22)
1.4.5　变量替换法 ………………………… (24)
1.4.6　等价量、高阶无穷小量、低阶无穷大量 ………………………… (28)
1.5　闭区间上连续函数的性质 ………………………… (32)
习题1 ………………………… (34)

第2章　一元函数微分学 ………………………… (38)

2.1　微分与导数的概念 ………………………… (38)
2.2　微分法 ………………………… (43)
2.3　高阶导数与高阶微分 ………………………… (48)
2.4　微分中值定理 ………………………… (50)
2.5　洛必达法则 ………………………… (52)
2.6　函数的泰勒展开 ………………………… (53)
2.7　利用导数研究函数 ………………………… (59)
2.7.1　函数的单调性 ………………………… (59)
2.7.2　函数的凸性 ………………………… (62)
2.7.3　函数的极值与最值 ………………………… (65)
2.7.4　Newton 迭代法 ………………………… (69)
2.7.5　渐近线 ………………………… (70)
2.7.6　函数作图 ………………………… (70)
习题2 ………………………… (71)

第3章　多元函数微分学 ………………………… (75)

3.1　多元函数的极限与连续 ………………………… (75)
3.2　偏导数与全微分 ………………………… (76)
3.3　微分法 ………………………… (79)

3.4 隐函数微分法 …… (82)
3.5 高阶偏导数与高阶全微分 …… (85)
3.6 多元函数的泰勒展开 …… (86)
3.7 多元函数的极值 …… (87)
习题 3 …… (95)

第 4 章 不定积分 …… (97)

4.1 不定积分的概念和性质 …… (97)
4.1.1 引言 …… (97)
4.1.2 原函数与不定积分的概念 …… (98)
4.1.3 不定积分的性质及基本积分公式 …… (99)
4.2 基本积分法 …… (102)
4.2.1 换元积分法 …… (102)
4.2.2 第二类换元法 …… (106)
4.2.3 分部积分法 …… (109)
4.3* 有理函数积分简介 …… (113)
习题 4 …… (116)

第 5 章 定积分 …… (119)

5.1 定积分的概念与性质 …… (119)
5.1.1 定积分的定义 …… (119)
5.1.2 定积分的性质 …… (122)
5.2 微积分学基本定理 …… (124)
5.2.1 积分上限函数及其导数 …… (124)
5.2.2 微积分学基本定理 …… (126)
5.2.3 定积分的换元积分法 …… (127)
5.2.4 定积分的分部积分法 …… (129)
5.3 定积分的应用 …… (131)
5.3.1 微元法 …… (131)
5.3.2 定积分在几何学中的应用 …… (132)
5.3.3 连续函数的平均值 …… (136)
5.3.4 定积分在物理上的应用 …… (137)
5.3.5 定积分在医学上的应用 …… (140)
5.3.6 定积分在经济上的应用 …… (141)
5.4 广义积分 …… (141)
5.4.1 无穷区间上的广义积分 …… (141)
5.4.2 有限区间上无界函数的广义积分(瑕积分) …… (143)
5.5 二重积分 …… (145)
5.5.1 二重积分的概念 …… (145)
5.5.2 二重积分的性质 …… (147)
5.5.3 二重积分的计算 …… (148)
习题 5 …… (154)

第6章 简单微分方程 ………………………………………… (158)

6.1 微分方程的基本概念 ………………………………………… (158)
6.1.1 引例 ………………………………………… (158)
6.1.2 基本概念 ………………………………………… (159)
6.1.3 微分方程解的几何意义 ………………………………………… (160)
6.2 一阶微分方程 ………………………………………… (161)
6.2.1 变量分离方程 ………………………………………… (161)
6.2.2 一阶线性微分方程 ………………………………………… (165)
6.2.3 应用举例 ………………………………………… (169)
6.3 可降阶的二阶微分方程 ………………………………………… (178)
6.4 二阶线性微分方程 ………………………………………… (182)
6.4.1 二阶线性微分方程解的性质 ………………………………………… (182)
6.4.2 二阶常系数线性齐次微分方程 ………………………………………… (184)
6.4.3 二阶常系数线性非齐次微分方程 ………………………………………… (187)
习题6 ………………………………………… (190)

第2篇 矩 阵 代 数

第7章 矩阵代数 ………………………………………… (195)

7.1 矩阵的概念及运算 ………………………………………… (195)
7.2 矩阵的分块运算 ………………………………………… (197)
7.3 初等变换与初等阵 ………………………………………… (199)
7.4 矩阵求逆、秩标准形的唯一性 ………………………………………… (202)
7.5 向量组的线性相关、线性无关与矩阵的秩 ………………………………………… (206)
7.6 线性方程组的解 ………………………………………… (211)
7.7 行列式 ………………………………………… (214)
7.8 特征值与特征向量 ………………………………………… (220)
7.9 实对称阵的正交对角化 ………………………………………… (224)
7.10* 正定阵 ………………………………………… (228)
习题7 ………………………………………… (229)

第3篇 概 率 论

第8章 随机事件与概率 ………………………………………… (241)

8.1 随机现象 ………………………………………… (241)
8.2 随机事件及其运算 ………………………………………… (242)
8.3 随机事件的概率 ………………………………………… (243)
8.4 为事件赋予概率的方法 ………………………………………… (245)
8.4.1 主观方法 ………………………………………… (245)
8.4.2 用频率估计概率 ………………………………………… (246)
8.4.3 利用等可能性假设(1)：古典概率模型 ………………………………………… (246)
8.4.4 利用等可能性假设(2)：几何概率 ………………………………………… (252)

8.5　条件概率 …… (253)
8.6　事件的独立性 …… (256)
8.7　贝叶斯公式 …… (257)
8.8* "条件概率是概率" …… (259)
习题 8 …… (266)

第 9 章　随机变量 …… (269)

9.1　随机变量的概念 …… (269)
9.2　随机变量的概率密度函数与分布函数 …… (269)
9.3　正态分布及其应用 …… (273)
9.4　二项分布及其应用 …… (276)
9.5　与泊松过程有关的分布 …… (279)
9.6　随机向量的概念 …… (284)
9.7　联合密度函数与联合分布函数 …… (285)
9.8　边际密度 …… (290)
9.9　条件密度 …… (292)
9.10　乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式 …… (294)
9.11　独立性与条件独立性 …… (300)
习题 9 …… (301)

第 10 章　随机变量的变换 …… (305)

10.1　离散情形 …… (305)
10.2　连续情形 …… (308)
10.3*　多维正态变量及其线性变换 …… (316)
10.4　次序统计量 …… (320)
习题 10 …… (323)

第 11 章　数字特征 …… (325)

11.1　随机变量的数学期望与方差 …… (325)
11.2　协方差与相关系数 …… (338)
11.3*　均值向量与方差协方差阵 …… (344)
11.4　条件期望与条件方差 …… (346)
习题 11 …… (355)

第 12 章　极限定理 …… (357)

12.1　随机变量序列收敛的类型 …… (357)
12.2　大数定律 …… (358)
12.3　中心极限定理 …… (363)
习题 12 …… (367)

标准正态分布函数值表 …… (368)

参考文献 …… (369)

第 1 篇

微　积　分

第 1 章　函数的极限与连续函数

微积分的研究对象主要是函数，这些研究包括微分学和积分学两个方面. 历史上，微分学和积分学来源于表面上看起来极不相同的问题，并各自独立发展，直到牛顿揭示出两者之间其实是一种互逆运算的关系. 微分学关心函数的局部性质以及复杂函数关系的局部近似，积分学则是一种化整为零，然后通过局部近似，再积零为整的求和法. 如何做近似，需要系统的研究，这是极限理论的重要内容之一，极限理论最基本的方法就是逼近法. 微分学和积分学都是建立在极限理论基础之上的.

本章主要介绍函数极限的概念以及求极限的各种运算法则和方法. 中学数学课程已经比较详细地讨论了函数的概念及其性质，因此，有关函数的概念及其性质，我们仅做一些必要的补充和说明.

1.1　实数与数轴

在建立和求解数学模型的过程中，我们需要分析和处理各类数据，揭示它们之间的关系，并在此基础上做出决策. 这些数据往往都是实数，实数是最常见且最有用的数学结构之一.

对物品进行计数是人类文明史上最原始的数据处理工作. 数是用来反映量的，量无非多寡、长短、大小，是比较出来的. 先有自然数，继而有整数，分数. 分数又称为有理数，因为分数化为十进制小数以后，或者是有限位小数，或者是无限循环小数，两者貌虽不同，但都只包含有限的信息. 每个有理数都可以在数轴(number axis)(规定了原点和单位长的有向直线)上找到一个点来表示它，这些有理数点密密麻麻地散布于整个数轴，任意两个有理数之间必定有另外一个有理数. 因此，有理数具有稠密性.

毕达哥拉斯(Pythagoras)学派相信“自然数与它们的比支配着宇宙”，古希腊人把两个自然数之比叫作“logos”(音译为“逻各斯”，意指世界的内在理性结构或本质. 赫拉克里特认为只有通过心灵的思考才能认识 logos，从而内化于人的心灵并外化为普遍主义的非人格化的法律). 后来学派内部有人发现勾股均为 1 的直角三角形的斜边之长为$\sqrt{2}$，这个$\sqrt{2}$不能表示为自然数之比(传说希帕索斯由于泄露了这个“逻辑上的丑闻”而被扔进大海，葬身鱼腹)，这种被认为没有道理的数就称为无理数，若用十进制小数表示，无理数是一个无限不循环小数. 例如，圆的周长与其直径之比为 $\pi=3.141\,592\,653\,589\,793\,238\,46\cdots$，它是最著名的无理数之一，称为圆周率. 有人用电脑计算出其小数点后 200 多万个数字，然后将其化为二进制数列，进行统计分析，发现它像随机数那样具有最大的不确定性，包含着无限的信息. 正如沈致远先生所说：“天长地久有时尽，此率绵绵无绝期.”

因此，有理数并未充满整个数轴，其中的空隙就由无理数来填补，这些空隙比有理数多得多，有理数只有可数的无穷多个，而无理数有不可数的无穷多个. 有理数与无理数合起来称为实数(real number). 实数与数轴上的点是一一对应的，数与形在此得到了统一.

直观上，直线是连绵不断的，而实数填满了整个数轴，故实数也应具有某种连续性. 这种连续

性可以简单地说成是：任意两个有理数之间总有无限多个无理数，任意两个无理数之间总有无限多个有理数. 实数的连续性是整个数学分析的基础.

对于通常定义的加、减、乘、除运算，实数满足：①任意两个实数加、减、乘、除（分母不为零）的结果仍是实数，即实数对四则运算是封闭的；②乘法和加法满足交换律、结合律、分配律；③任意两个不同的实数之间可以比较大小.

下面引入一些与实数集合有关的记号：

记实数集为 $\mathbf{R}$. 设 $a,b\in\mathbf{R}$，$a<b$，记 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$，称为闭区间（closed interval）；类似地，可以定义开区间（open interval）$(a,b)=\{x\mid a<x<b,x\in\mathbf{R}\}$；左开右闭区间 $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$；左闭右开区间 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b,x\in\mathbf{R}\}$ 等.

记 $[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a,x\in\mathbf{R}\}$，$(a,+\infty)=\{x\mid x>a,x\in\mathbf{R}\}$，$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$，$(-\infty,b)=\{x\mid x<b,x\in\mathbf{R}\}$，这些统称为无限区间. 其中，$+\infty$（正无穷大）比一切实数都大且与任意实数的距离都是无穷大，$-\infty$（负无穷大）比一切实数都小且与任意实数的距离都是无穷大，并用 ∞（无穷大）笼统地表示 $+\infty$ 或 $-\infty$. 根据需要，可以将 ∞，$+\infty$，$-\infty$ 视为广义实数，允许其有条件地参与某些运算（见 1.4.3 节），并记 $\overline{\mathbf{R}}=\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$.

设 $\delta>0$，称 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的一个 δ 邻域（neighborhood）并记为 $N(x_0,\delta)$，称 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的一个去心邻域并记为 $N^\circ(x_0,\delta)$. 在微分学中，我们主要关注函数的局部性质，因此，虽然 $\delta>0$ 可以很大，但通常总是设想它比较小. 此外，在很多问题中，我们只是想说明，存在这样一个区间，或大或小，对于其中的 x 来说，某一结论成立，至于这个区间的长度，则是无关紧要的，因此，$N(x_0,\delta)$ 和 $N^\circ(x_0,\delta)$ 往往就分别简记为 $N(x_0)$ 和 $N^\circ(x_0)$，并经常用“点 x_0 附近”或“$x\approx x_0$”代指 $N(x_0)$，用“点 x_0 附近（x_0 除外）”或“$x\approx x_0(x\neq x_0)$”代指 $N^\circ(x_0)$.

类似地，用 $N_\delta(+\infty)$ 表示 $(\delta,+\infty)$，用 $N_\delta(-\infty)$ 表示 $(-\infty,-\delta)$，用 $N_\delta(\infty)$ 表示 $(-\infty,-\delta)\cup(\delta,+\infty)$，并且设想 δ 是一个很大很大的正数.

1.2 函数的概念

所谓认识世界，不外乎就是解释现象、发现规律、推测未知，这就需要我们了解事物或现象之间的关联. 函数的概念就是从量的方面来刻画事物之间相依变化的关系. 凡是涉及一个变量的取值依赖于另一个或另一些变量的取值的时候，就出现了函数的概念. 一元函数反映了两个变量之间的单值依赖关系：给定一个变量的值以后，另一个变量的值也就随之唯一确定了.

定义 1.1 设 X 是非空实数集，若对每个 $x\in X$，有唯一的实数 $y\in\mathbf{R}$ 与之对应，则称此对应关系为函数（function），记为某个字母，如 f，并将对应于 x 的 y 写作 $f(x)$，称为函数 f 在 x 的函数值. 称 X 为函数 f 的定义域（domain of definition），函数值的全体 $f(X)=\{y\mid y=f(x),x\in X\}$ 称为函数 f 的值域（domain of functional value）. 平面中的点集 $(X,Y)=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in X\}$ 称为函数 f 的图像或图形（figure）.

注 1 习惯上，称 x 为自变量（independent variable），y 为因变量（dependent variable）. 这里，因为只有一个自变量，故称为一元函数. 注意，自变量和因变量的说法并不意味着因果关系. 在实际工作中，确定变量之间的因果关系通常是非常困难的问题. 在统计研究中，随机对照试验（randomized controlled experiment）是获得因果关系的金标准（gold standard），而在缺乏实验数据的情况下，仅仅根据观测数据（observational data）或回顾性数据（retrospective data）来确定因果关系，需要精巧的数学方法并结合具体学科的知识，并且这些方法实际上常常还是不足以确定变量之间的因果关系.

注2 正因为函数关系仅表示变量之间有某种数量上的联系，未必契合因果性，所以自变量的选取，有时是为了方便，有时甚至是任意的，当然，还要依据研究的目的. 例如，物理学的气压公式 $p=p_0\mathrm{e}^{-\mathrm{k}h}$，这里的 p_0 是在海平面时的大气压，k 是常数，海拔高度 h 是自变量，根据海拔高度可以确定气压 p. 但如果是飞行员用此公式以气压来反推海拔高度时，就可以写成 $h=\frac{1}{\mathrm{k}}\ln\left(\frac{p_0}{p}\right)$，这时，气压 p 是自变量.

注3 在微积分中，变量是一个无确切定义但用起来非常方便的概念. 例如，时间、长度、重量、温度等，如果根据不同的情况，它们可以取不同的数值，就称之为变量，如果它们的取值保持不变，就称之为常量. 这里的"常"与"变"并非绝对，例如，如果地点、高度和运动状态不变，则一物之重量是常量，否则，必须视其为变量. 另一方面，如果一个量的变化本身是微不足道的或其变化尚不足以影响我们的结论时，也可以将其视为常量. 当然，有一些量是绝对不变的，例如 π、e、某人的生日等. 在事物的相互关系中，如果能发现一个绝对不变的常数，将是一件大事.

注4 严格地说，对应关系 f 是函数，而 $f(x)$ 是函数值. 但经常地，只要我们能确认有"x 唯一决定 y"这种关系，特别是当我们尚不知道这个关系具体是什么，只能抽象地进行讨论时，我们将遵从大数学家 Leonhard Euler 的建议，就称"y 是 x 的函数"，并写作 $y=f(x), x\in X$. 这种写法指明了自变量 x 的变化范围即函数的定义域 X，并给出了定义域中每一个 x 处的函数值 $f(x)$，从而完全规定了函数关系 f. 因此，以下各种说法或写法都是可以接受的：函数 f、函数 $f(x)$、函数 $y=f(x)$、函数值 $f(x)$、函数值 $y=f(x)$ 等. 此外，当涉及多个函数时，为了避免函数符号到底用哪个字母比较合适，我们经常会写成：$y=y(x)$ 或 $y(x)$，$z=z(x)$ 或 $z(x)$，$w=w(t)$ 或 $w(t)$ 等.

注5 函数的定义域应根据实际问题的性质而定. 否则，我们就仅从数学上考虑其自然定义域，如分母不为零、负数不能开偶次方等.

注6 函数又称为算子(operator)，表示对 x 施以"运算 f"便得到 y，即：

$$x\to f(\qquad)\to y=f(x)$$

注7 一元函数 f 的图像 $(X,Y)=\{(x,y)\mid y=f(x), x\in X\}$ 就是动点 $(x,f(x))$ 在直角坐标平面中的轨迹，它通常是平面内的一条曲线，并且，它与任何一条平行于 y 轴的直线至多只有一个交点.

注8 函数 f 的表达方式可以是列表、图形、公式. 列表法简单，图像法直观，公式法更便于分析和运算. 公式法可以显式表示(explicit representation)，也可以隐式表示(implicit representation)，还可以参数表达(parametric representation). 参见例 1.2 和例 1.3.

例 1.1 中学数学主要介绍了如下六类函数：

(1) 常值函数 $y=C$.

(2) 幂函数 $y=x^{\alpha}(x>0)$.

(3) 指数函数 $y=a^x(a>0, a\neq1)$.

(4) 对数函数 $y=\log_a x(a>0, a\neq1)$.

(5) 三角函数：$y=\sin x$；$y=\cos x$；$y=\tan x$；$y=\cot x$.

(6) 反三角函数：$y=\arcsin x(-1\leqslant x\leqslant1)$；$y=\arccos x(-1\leqslant x\leqslant1)$；$y=\arctan x$；$y=\operatorname{arccot} x$.

注 一旦明确了 α 的取值，幂函数 $y=x^{\alpha}$ 的定义域可以不仅是 $x>0$. 例如，对于函数 $y=x^2$，显然允许 $x\in\mathbf{R}$.

这六类函数统称为基本初等函数(basic elementary function). 我们在中学已经详细讨论过这些函数，请读者复习有关的内容，特别注意回忆它们的图像. 之所以称它们为基本初等函数，我们的理解是：因为它们是分析复杂函数关系的基本构件. 比如说，在一定的条件下，可以用常值函数和幂函数组成的多项式来“逼近”$f(x)$：

$$f(x)\approx a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n\ (x\approx x_0)$$

并用它来对函数 f 在点 x_0 附近的局部动态做近似分析. 见第 2 章泰勒展开.

例 1.2 (显函数与隐函数) 圆的方程 $x^2+y^2=R^2$ 反映了变量 x 与 y 之间的特定关系. 由于当 $x\in(-R,R)$ 时，对应的 y 不是唯一确定的，所以不能说 y 是 x 的函数. 但如果限定 $y\geqslant 0$，y 就成为 x 的函数 $y=\sqrt{R^2-x^2}$，$x\in[-R,R]$，显然，它与 $x^2+y^2=R^2$，$y\geqslant 0$ 是同一个函数关系的两种等价的表述，我们将 $y=\sqrt{R^2-x^2}$，$x\in[-R,R]$ 称为显函数(explicit function)，将 $x^2+y^2=R^2$，$y\geqslant 0$ 称为隐函数(implicit function)，即其中隐藏着一层函数关系 $y=y(x)=\sqrt{R^2-x^2}$，$x\in[-R,R]$.

注 并非总是可以从隐函数解出显函数，因而人们发展了一些直接基于隐函数(不解方程)来处理问题和解决问题的方法. 详见第 3 章 3.4 节.

例 1.3 (参数式函数) 由方程 $x^2+y^2=R^2$，$y\geqslant 0$ 确定的 x 和 y 之间的关系也可以通过第三个变量 θ 间接地表示：$\begin{cases}x=R\cos\theta,\\ y=R\sin\theta,\end{cases}$ $\theta\in[0,\pi]$，这种表达方式称为函数的参数表示(parametric representation).

例 1.4 将鲽鱼身体的长度 x(cm) 视为自变量，将其体重 y(g) 视为因变量，则鲽鱼的体重 y(g) 是其身体长度 x(cm) 的函数，如表 1.1.

表 1.1 鲽鱼的身长 x 与体重 y

x(cm)	33.5	34.5	35.5	36.5	37.5	38.5	39.5	40.5	41.5	42.5	43.5
y(g)	332	363	391	419	455	500	538	574	623	674	724

注 表 1.1 中一共有 11 对数据：$(x_1,y_1),\cdots,(x_{11},y_{11})$，这些数据隐含了变量 x 和 y 之间的某种函数关系 $y=f(x)$，但密密麻麻的数据，只见树木不见森林，往往令人不得要领，不利于我们了解这一函数关系的特点，也不方便应用. 例如，身长 44 cm 的鲽鱼重量多少，即 $f(44)$ 是多少，就不太容易回答. 因此，我们希望能够用某一个公式来显式地表达这一函数关系，这就需要进行数据拟合，即找到一个明确的表达式 $y=f(x)$，使 $y_i\approx f(x_i)\ (i=1,\cdots,11)$. 利用普通最小二乘法(参见例 3.15、例 3.16 和例 3.17)，我们可以找到一个公式 $y=39.027\,3x-994.095\,5$ 来近似代表例 1.4 中的函数关系. 这种根据经验数据得到的函数关系，称为经验公式(empirical formula).

例 1.5 以单价 a 元购进数量为 x 单位的时鲜商品，以单价 $b(b>a)$ 元卖出；若当天卖不完，第二天以单价 $c(c<a)$ 元贱卖. 求利润函数.

解 设当天的需求量为 x_0，则利润 π 是进货量 x 的函数：

$$\pi(x)=\begin{cases}(b-a)x & 0\leqslant x\leqslant x_0\\ (b-a)x_0+(c-a)(x-x_0) & x>x_0\end{cases}$$

注 上述这种在定义域内的不同部分对应规则并不相同的函数称为分段函数(piecewise function). 注意，分段函数是一个函数而不是两个函数.

例 1.6　(指数衰减) 如果一个量 x 是时间 t 的函数 $x(t)=x_0\mathrm{e}^{-kt}(k>0)$,则称该量是指数衰减的. 半衰期(half life)定义为该量减少到初始量 $x(0)=x_0$ 的一半时所需要的时间,即 $t_{\frac{1}{2}}=\dfrac{\ln 2}{k}$,因为 $x(t_{\frac{1}{2}})=\dfrac{x_0}{2}$. 1990 年,一幅 Vermeer(1632—1675 年)的画作中 $C-14$ 的含量是其初始含量的 99.5%,已知 $C-14$ 的半衰期为 5 730 年. 这幅画是否为赝品?

解　由 $t_{\frac{1}{2}}=\dfrac{\ln 2}{k}=5\,730$ 知 $x(t)=x_0\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{5\,730}t}$,令 $x_0\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{5\,730}t}=0.995x_0$,得 $t\approx 41.44$ 年. 也就是说,这幅画是 1990 年之前大约 41.44 年也就是 1948 年或 1949 年才画成的,因此,可以断定,这幅画是赝品.

从已知的函数出发,通过加、减、乘、除四则运算,复合运算或取反函数等手段可以得到新的函数. 这些内容,中学都已经介绍过,这里,我们只对反函数和复合函数补充介绍一些内容.

例 1.7　对某社区的环境研究表明:如果该社区人口数量为 x,则大气中一氧化碳含量为 $c(x)=\dfrac{5x+1}{10^6}$. 又,据统计分析,从现在起的 t 年后,该社区人口为 $x(t)=1+0.01t^2$.

(1) 求 2 年后大气中一氧化碳的含量.

(2) 几年以后大气中一氧化碳的含量将达到 6.8/100 万?

解　(1) 经关系的传递(复合),可以确定 c 与时间 t 之间的函数关系:

$$c=f(t)=c(x(t))=\frac{5(1+0.01t^2)+1}{10^6}=\frac{6+0.05t^2}{10^6},t\geqslant 0$$

所以,当 $t=2$ 时,$f(2)=\dfrac{6+0.05\times 2^2}{10^6}=\dfrac{6.2}{10^6}$,即百万分之 6.2.

(2) 由 c 与 t 之间的函数关系 f,可以反解出 t 对 c 的依赖关系 g:

$$t=g(c)=\sqrt{\frac{10^6c-6}{0.05}},\quad c\geqslant\frac{6}{10^6}.$$

所以,当 $c=6.8\times 10^{-6}$ 时,$t=g(6.8\times 10^{-6})=\sqrt{\dfrac{6.8-6}{0.05}}=4$,即 4 年后大气中一氧化碳的含量将达到 6.8/100 万.

在上述(2)的求解过程中,我们由 c 对 t 的依赖关系 f 反解出了 t 对 c 的依赖关系 g,称 g 为 f 的反函数.

定义 1.2　设 $y=f(x)$,$x\in X$,如果对于任意的 $y\in f(X)$,只存在唯一的 $x\in X$ 按照关系式 $f(x)=y$ 与 y 对应,则按此法则可以得到一个定义在 $f(X)$ 上的函数,称此函数为 f 的反函数(inverse function),记作 $x=f^{-1}(y)$,$y\in f(X)$.

函数及其反函数可以示意如下:$x\rightarrow f(\quad)\rightarrow y$,$y\rightarrow f^{-1}(\quad)\rightarrow x$.

注　① 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 实质上是同一个东西,表现在图像上是同一条曲线,差别仅在于看问题的角度,视 x,y 中的哪一个变量为自变量的问题. 例如,前述气压与海拔高度之间的函数关系 $p=p_0\mathrm{e}^{-kh}$ 可用于由高度 h 确定气压 p,但飞行员由气压来反推海拔高度时,则必须用反函数 $h=\dfrac{1}{k}\ln\left(\dfrac{p_0}{p}\right)$. ②中学数学课本里习惯将 $x=f^{-1}(y)$ 中的变量 x,y 互换名称,改写为 $y=f^{-1}(x)$,则两者的图像关于直线 $y=x$ 对称. 不过,在高等数学中,最好不要这样改写,以免变量的含义相互混淆.

从反函数的定义可以看出,$y=f(x)$,$x\in X$ 存在反函数的充分必要条件是:X 与 $f(X)$ 之间

是一一对应关系，即，对任意的 $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. 并且函数及其反函数之间满足：

$$f^{-1}(f(x)) = x, x \in X$$
$$f(f^{-1}(y)) = y, y \in f(X)$$

定义 1.3 设 $y=f(x), x\in X$，若对任意的 $x_1, x_2 \in X$，且 $x_1 < x_2$，总有：

(1) $f(x_1) \leqslant f(x_2)$，则称 f 在 X 上是单调增函数(monotonically increasing function)，或简称 f 在 X 上单调增. 特别地，若 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 f 在 X 上是严格单调增函数，或简称 f 在 X 上严格单调增.

(2) $f(x_1) \geqslant f(x_2)$，则称 f 在 X 上是单调减函数(monotonically decreasing function)，或简称 f 在 X 上单调减. 特别地，若 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 f 在 X 上是严格单调减函数，或简称 f 在 X 上严格单调减.

注 单调增函数表明两个变量之间是相互鼓励的正向相关，单调减函数则表明两者是相互抑制的反向相关.

定理 1.1 严格单调增(或严格单调减)的函数必存在反函数，并且其反函数也严格单调增(或严格单调减).

实际中还经常出现一个变量经由某一中介变量与另一个变量间接相关的情形，反映在数学上，就是复合函数的概念：$x \to g(\quad) \to u \to f(\quad) \to y$. 例如，他莫西芬(Tamoxifen)→女性激素(雌激素和黄体酮)水平→乳腺癌. 例 1.7 中的 $c=c(x(t))$ 就是一个复合函数.

定义 1.4 设 $u=g(x), x\in X, y=f(u), u\in U$，若 $D=\{x \mid x\in X, g(x)\in U\}$ 不是空集，则称函数 $y=f(g(x)), x\in D$ 为函数 f 与 g 的复合函数(composite function)，称 u 为中间变量(intermediate variable).

例 1.8 函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=1-x^2$ 可以复合成函数 $y=\sqrt{1-x^2}, x\in[-1,1]$.

复合的观点有助于我们分清一个复杂关系的层次结构，了解自变量是怎样通过层层递进关系来达到对因变量的控制的，这大大方便了我们对函数功能(function)的研究.

例 1.9 凯恩斯(John Maynard M. Keynes，1883—1946 年)在《就业、利息与货币通论》中的主要观点大致可以归结为一个复合函数关系：

$$y=f(M)=f_3(f_2(f_1(M)))：r=f_1(M), I=f_2(r), y=f_3(I),$$

其中，y 是一国的总产出，M 是货币供给，r 是利率，I 是投资. 凯恩斯认为扩张性的货币政策可以增加总产出并扩大就业量：$M\uparrow \Rightarrow r\downarrow \Rightarrow I\uparrow \Rightarrow y\uparrow$，反之则反. 这里，凯恩斯假定 f_1、f_2 是单调减函数，f_3 是单调增函数. 凯恩斯还认为，函数关系 f_1 和 f_2 由于易受诸如信心、非理性冲动(animal spirits)等不确定因素的影响而变得不那么可靠，相对而言，关系 f_3 则比较稳定，所以凯恩斯更倚重于财政政策，主张在经济萧条时利用税收调节和扩大政府的公共开支直接刺激投资 I 以达到增加产出 y 和增加就业的目的. 凯恩斯学派的著名经济学家罗宾逊夫人曾这样鲜明地表述过这种观点："我们必须说，任何花费总比不花费强. 在地上挖洞，然后再填起来；把德国西南部的黑森林涂成白色也好. 如果不能支付工资让人们做些有意义的事，那就花钱让他们做一些蠢事吧. "但事实上，这些政策可能导致资源的错误配置.

复合运算的逆过程是分解(decompose)，目的是将复合函数分解成若干个层次，每个层次都是比较简单的函数. 这里，所谓比较简单的函数，是指基本初等函数或基本初等函数通过四则运算所构成的函数. 复合函数的分解对后面将要学习的微分运算非常重要.