泛函分析的问题与反例

黎永锦　编著

科学出版社

泛函分析的问题与反例

黎永锦 编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书汇集了泛函分析教学过程中学生提出的大量问题，收集了很多主要概念和定理的反例，主要是关于度量空间、赋范空间、Hilbert 空间和算子等问题和反例.

本书可供高等院校数学系高年级本科生和研究生学习泛函分析参考，也可以作为相关专业教师上课的参考资料.

图书在版编目（CIP）数据

泛函分析的问题与反例/黎永锦编著. —北京：科学出版社，2016.3
ISBN 978-7-03-047873-3

Ⅰ. ①泛…　Ⅱ. ①黎…　Ⅲ. ①泛函分析–高等学校–教学参考资料　Ⅳ. ①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 058534 号

责任编辑：李　欣　张茂发／责任校对：彭　涛
责任印制：张　伟／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2016 年 3 月第　一　版　开本：720 × 1000 1/16
2016 年 3 月第一次印刷　印张：13 1/4
字数:265 000

定价：79.00 元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

泛函分析是一门比较抽象的课程, 它与数学分析、抽象代数和点集拓扑学有着密切的关系, 很多在数学分析中都成立的定理, 在泛函分析中就不一定成立. 由于很多概念比较抽象, 有时很难理解, 需要很多的反例来帮助学生对泛函分析的基本概念和主要定理进行理解.

提出问题的能力比解决问题本身还重要, 书中的问题很多是在作者多年教学过程中学生提出的, 有些也许比较简单, 但却会引起一些误解, 因此, 书中的问题有些是很容易的.

反例还有一个好处, 读到一个反例, 不仅可以加深你对理论的理解, 还可以自己构造出完全不同并且更简明和更漂亮的例子. 因此, 反例比一般的习题具有更好的启发作用.

在二十多年来的泛函分析教学中, 学生在课堂上常常能提出我无法回答的问题, 这些问题引起了我的思考, 通过学习和查阅, 了解了很多学生经常感到困惑的问题. 我一直认为将它们整理出来, 不仅对学生学习会有帮助, 对于讲授泛函分析的老师也会有一定的启发, 可以节省很多查阅资料和备课的时间.

由于泛函分析比较抽象, 有些比较直观的问题答案往往出乎意料. 有些问题看起来比较简单, 答案是我随意写的, 虽然很多人都帮忙仔细校对过, 但还是有可能有某些问题的答案是不够严密的, 还请大家谅解.

我要向我的学生表示衷心的感谢, 陈炯阳、黄溪、罗恒睿、贺雪超、朱江、陈颂光、苏彦宏、黄景灏等对本书的改进和校对做了很多工作. 姚力丁和何炳等在校对时提出了很多很好的意见. 在多年来的教学过程中, 很多问题都是学生在课堂和课后提出的. 有些问题的解答还是我提出问题后, 学生给出的例子, 我从他们身上学到了很多东西, 本书正是在他们的提议和帮助下不断完善的结果.

黎永锦

2015 年 11 月于中山大学

符 号 表

A_x	x 的支撑泛函全体
B_X	空间 X 中, 以 0 为球心、1 为半径的闭单位球
$B(x_0,r)$	以 x_0 为球心、r 为半径的闭球
C	复数全体
$C[a,b]$	$[a,b]$ 上的所有连续函数构成的空间
$C^n[a,b]$	$[a,b]$ 上的所有 n 阶连续可导函数构成的空间
$C(M)$	M 上的所有连续函数构成的空间
c	所有收敛数列构成的空间
c_0	所有收敛到 0 的数列构成的空间
$\dim X$	空间 X 的维数
$d(x,E)$	点 x 到集合 E 的距离
$d(x,y)$	点 x 到点 y 的距离
E^0	集合 E 的内点全体
E^C	E 的补集, 余集
$E^{\perp}$	E 的正交补
$E\perp F$	E 与 F 正交
$E+F$	E 与 F 的和
e_i	第 i 个单位向量
$\|f\|$	线性泛函 f 的范数
$G(T)$	算子 T 的图像
K	数域, 实数域或复数域
$L(X,Y)$	从 X 到 Y 的所有线性连续算子构成的空间
$L^p[a,b]$	$[a,b]$ 上所有 p 次可积函数构成的 Lebesgue 空间
l_p	p 次可和数列构成的序列空间
l_∞	所有有界数列构成的序列空间
$\overline{M}$	子集 M 的闭包

N	自然数全体
Q	有理数全体
R	实数全体
Re	复数的实部
S_X	空间 X 中, 以 0 为球心,1 为半径的单位球面
span M	M 生成的子空间
$\overline{\text{span}}\, M$	M 生成的闭子空间
T^*	T 的共轭算子
U_X	空间 X 中, 以 0 为球心,1 为半径的开单位球
$\xrightarrow{w}$	弱收敛
$\xrightarrow{w^*}$	弱 $*$ 收敛
X^*	X 的共轭空间
X^{**}	X 的二次共轭空间
$X \times Y$	X 与 Y 的笛卡儿乘积
X/M	X 关于子空间 M 的商空间
$x \perp M$	x 与子集 M 正交
$x \perp y$	x 与 y 正交
(x, y)	x 与 y 的内积
$X \backslash M$	$x \in X$ 并且 x 不属于 M
(x_i)	如 c_0 等序列空间的点, x_i 为点 $x = (x_i)$ 的第 i 个坐标
$\{x_n\}$	度量空间、赋范空间或内积空间中的序列

目　　录

第1章 度量空间

1.1 度量空间

1.1.1 度量的定义

问题 1.1.1 *什么是度量?*

若 X 是一个非空集合, $d: X \times X \to R$ 是满足下面条件的实值函数, 对于任意 $x, y, z \in X$, 有

(1) $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(2) $d(x,y)=d(y,x)$;

(3) $d(x,y) \leqslant d(x,z)+d(y,z)$,

则称 d 为 X 上的度量 (metric), 称 (X,d) 为度量空间 (metric space).

问题 1.1.2 *在度量空间 (X,d) 中, 对于任意 $x,y \in X$, 度量 $d(x,y)$ 一定是非负的吗?*

是的. 由 (3) 可知 $d(x,y)+d(y,x) \geqslant d(x,x)$, 故由 (2) 可知 $d(x,y) \geqslant 0$, 因此 d 是一个非负函数.

1.1.2 度量定义中 (1), (2) 和 (3) 的相关性

问题 1.1.3 *存在函数满足度量定义的 (1) 和 (3), 但不满足 (2) 吗?*

不存在. 这是因为由 (3) 可知 $d(x,y) \leqslant d(x,x)+d(y,x)=d(y,x)$ 和 $d(y,x) \leqslant d(y,y)+d(x,y)=d(x,y)$ 可得 $d(x,y)=d(y,x)$, 所以, (1) 和 (3) 可以保证 (2) 成立.

但如果将 (3) 修改成 $(3'): d(x,y) \leqslant d(x,z)+d(z,y)$, 则存在 d 满足 (1) 和 $(3')$, 但 (2) 不成立. 例如, R 是实数集, 定义 $d(x,y)=x-y$, 则容易看出函数 d 满足度量定义的 (1) 和 $(3')$, 但不满足 (2).

问题 1.1.4 *存在函数满足度量定义的 (2) 和 (3), 但不满足 (1) 吗?*

存在. 若 R 是实数集, 定义 $d(x,y)=|x-y|+1$, 则容易看出函数 d 满足度量定义的 (2) 和 (3), 但不满足 (1).

问题 1.1.5 *存在函数满足度量定义的 (1) 和 (2), 但不满足 (3) 吗?*

存在. 若 R 是实数集, 定义 $d(x,y)=(x-y)^2$, 则容易看出函数 d 满足度量定义的 (1) 和 (2), 但不满足 (3).

1.1.3　有关度量的不等式

问题 1.1.6　对于度量空间 (X, d) 中的任意四个点 x_1, x_2, x_3, x_4, 下面不等式一定成立吗?

(1) $|d(x_1, x_3) - d(x_2, x_3)| \leqslant d(x_1, x_2)$;

(2) $|d(x_1, x_3) - d(x_2, x_4)| \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_3, x_4)$.

是的. 由度量定义中的三角不等式有

$$d(x_1, x_3) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3),$$

$$d(x_2, x_3) \leqslant d(x_2, x_1) + d(x_1, x_3),$$

故

$$|d(x_1, x_3) - d(x_2, x_3)| \leqslant d(x_1, x_2).$$

另外, 由于

$$d(x_1, x_3) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, x_4) + d(x_4, x_3),$$

因此

$$d(x_1, x_3) - d(x_2, x_4) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_3, x_4).$$

类似地, 有

$$d(x_2, x_4) \leqslant d(x_2, x_1) + d(x_1, x_4) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_1, x_3) + d(x_3, x_4),$$

故

$$-d(x_1, x_3) + d(x_2, x_4) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_3, x_4),$$

所以

$$|d(x_1, x_3) - d(x_2, x_4)| \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_3, x_4).$$

1.1.4　平凡度量的定义

问题 1.1.7　对于任意非空集合 X, 一定可以定义度量, 使之成为度量空间吗?

是的. 对于任意一个非空集合 X, 只需定义

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y, \end{cases}$$

则 (X, d) 是一个度量空间, 称 d 为 X 上的平凡度量 (trivial metric) 或离散度量 (discrete metric).

问题 1.1.8　任意一个包含三个点以上的度量空间 (X, d), 对于 X 中的任意两点 x, y, 一定存在 $z \in X$, 使得 $d(x, z) = d(y, z) = \dfrac{1}{2} d(x, y)$ 吗?

不一定. 在三个点以上的集合 X 上, 定义平凡度量 d, 则对于 X 中的任意不同的两个点 x, y, 都不存在 $z \in X$, 使得 $d(x,z) = d(y,z) = \frac{1}{2}d(x,y)$.

问题 1.1.9 设 R 是实数, 度量 $d(x,y) = |x-y|$, 对于任意 $x, y, z \in R, x \neq y$, 则 $d(x,z) = d(y,z)$ 的充要条件为 $z = \frac{x+y}{2}$ 吗?设 (X,d) 是包含三个点以上的度量空间, 对于 X 中的任意两点 $x \neq y$, 满足 $d(x,z) = d(y,z)$ 的 z 一定是唯一的吗?

容易知道, 在 R 中, 若 $z = \frac{x+y}{2}$, 则 $d(x,z) = d(y,z)$ 显然成立. 反过来, 若 $d(x,z) = d(y,z)$, 则一定有 $|x-z|^2 = |y-z|^2$, 故 $x^2 - 2xz + z^2 = y^2 - 2yz + z^2$, 因而, $(x-y)(x+y) = 2(x-y)z$, 由 $x - y \neq 0$ 可知 $z = \frac{x+y}{2}$.

在一般的度量空间中, X 中的任意两点 $x \neq y$, 满足 $d(x,z) = d(y,z)$ 的 z 不一定存在. 即使 z 存在, z 也不一定是唯一的. 如在 R^3 上, 定义度量为

$$d(x,y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant 3}\{|x_i - y_i|\},$$

则对于 $x = (1,0,1), y = (0,1,0) \in R^3$, 存在两个不同的点 $z_1 = (0,1,1), z_2 = (1,1,0) \in R^3$, 满足 $d(x,z_1) = d(y,z_1) = 1$ 和 $d(x,z_2) = d(y,z_2) = 1$.

问题 1.1.10 设 R 是实数, 度量 $d(x,y) = |x-y|$, 对于任意 $x, y, z, z' \in R, x \neq y$, 若 $d(x,z) = d(y,z), d(x,z') = d(y,z')$, 则一定有 $z = z'$, 即 z 是由距离 $d(x,z)$ 和 $d(y,z)$ 唯一确定吗? 对于度量空间 (X,d), 结论也一定成立吗?

在实数集 R 上, 若 $d(x,z) = d(y,z)$, 则 $z = \frac{x+y}{2}$. 另外, 由 $d(x,z') = d(y,z')$, 可得 $z' = \frac{x+y}{2}$, 因此, $z = z'$. 所以, z 是由距离 $d(x,z)$ 和 $d(y,z)$ 唯一确定.

在一般的度量空间中, 上面的结论不一定成立, 如在 R^3 上, 定义度量为

$$d(x,y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant 3}\{|x_i - y_i|\},$$

则对于 $x = (1,0,1), y = (0,1,0) \in R^3$, 存在两个不同的点 $z = (0,1,1), z' = (1,1,0) \in R^3$, 使得 $d(x,z) = d(y,z)$ 和 $d(x,z') = d(y,z')$.

问题 1.1.11 设 $L[0,1]$ 是 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 可积函数全体, 若对于任意 $x(t), y(t) \in L[0,1]$, 定义 $d(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|dt$, 则 d 是 $L[0,1]$ 上的度量吗?

不是. 这是由于 $d(x,y) = 0$ 时, 不一定有 $x = y$ 成立. 容易知道 $d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$ 在 $[0,1]$ 上几乎处处成立, 故如果将 $L[0,1]$ 上几乎处处相等的函数看作相等的, 则 $L[0,1]$ 在 d 下是度量空间, 但此时 $L[0,1]$ 的元素是关于几乎处处相等的等价类, 很多书中说 $L[0,1]$ 是 d 下的度量空间就是这个意思.

问题 1.1.12　设 $C[0,1]$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数全体, 若对于任意 $x(t),y(t)\in C[0,1]$, 定义 $d(x,y)=\int_0^1|x(t)-y(t)|dt$, 这里的积分是 Riemann 积分, 则 d 是 $C[0,1]$ 上的度量吗?

是的. 由于 $x(t)$ 和 $y(t)$ 都是连续函数, 因此, $d(x,y)=\int_0^1|x(t)-y(t)|dt=0$ 时, 一定有 $x(t)=y(t)$, 所以, $C[0,1]$ 在 d 下是度量空间.

1.1.5　度量不是唯一的

问题 1.1.13　对于给定的非空集合 X, X 上的度量 d 是唯一的吗?

度量一般不是唯一的, 在一个非空集合上, 可以定义几种完全不同的度量. 例如, 对于 R^3, 可以定义几种不同的度量, 对于 $x=(x_i),y=(y_i)$, 除了平凡度量, 若定义

$$d(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{3}(x_i-y_i)^2\right]^{1/2},$$

$$d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{3}|x_i-y_i|,$$

$$d_2(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant 3}\{|x_i-y_i|\},$$

则容易验证 d,d_1 和 d_2 都是 R^3 的度量, 并且 $d_2(x,y)\leqslant d(x,y)\leqslant d_1(x,y)\leqslant 3d_2(x,y)$ 对所有 $x,y\in X$ 都成立.

问题 1.1.14　对于给定的非空集合 X, X 上的两个不同度量 d 和 ρ 什么时候称为等价的?

对于给定的非空集合 X, X 上的两个不同度量 d 和 ρ, 若对于任意序列 $x_n\in X,x_0\in X,\{x_n\}$ 依度量 d 收敛到 x_0 当且仅当 $\{x_n\}$ 依度量 ρ 收敛到 x_0, 则称 X 上的度量 d 和 ρ 是等价的.

问题 1.1.15　对于给定的非空集合 X, X 上的两个不同度量 d 和 ρ 等价的充要条件是存在 $M>0,N>0$, 使得对于任意 $x,y\in X$, 都有 $M\rho(x,y)\leqslant d(x,y)\leqslant N\rho(x,y)$?

不一定. 明显地, 若存在 $M>0,N>0$, 使得对于任意 $x,y\in X$, 都有

$$M\rho(x,y)\leqslant d(x,y)\leqslant N\rho(x,y),$$

则容易知道 d 和 ρ 是等价的.

反过来就不一定对. 例如, 在实数集 R 上定义, $d(x,y)=|x-y|,\rho(x,y)=\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$, 则度量 d 和 ρ 等价. 容易知道对于任意 $x,y\in R$, 都有 $\rho(x,y)\leqslant d(x,y)$.

对于无论多大的 $M>0$, 取足够大的正整数 n, 使得 $n>M$. 令 $x_n=0, y_n=n$, 则$\rho(x_n,y_n)=\dfrac{|0-n|}{1+|0-n|}=1-\dfrac{1}{1+n}, d(x_n,y_n)=n=(n+1)\left(1-\dfrac{1}{1+n}\right)=(n+1)\rho(x_n,y_n)$, 故 $d(x_n,y_n)>M\rho(x_n,y_n)$. 所以, 虽然度量 d 和 ρ 等价, 但不存在 $M>0$, 使得对于任意 $x,y\in X$, 都有 $d(x,y)\leqslant M\rho(x,y)$ 成立.

问题 1.1.16 在平面 R^2 上, 定义两个不同度量 $d(x,y)=(|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2)^{1/2}$ 和 $\rho(x,y)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$, 则它们是等价的吗?

是的. 实际上, 容易知道对于任意 $x,y\in R^2$, 有 $(|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2)^{1/2}\leqslant |x_1-x_2|+|y_1-y_2|$, 并且 $\dfrac{1}{2}(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|)\leqslant \max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}\leqslant (|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2)^{1/2}$, 因此, $\dfrac{1}{2}\rho(x,y)\leqslant d(x,y)\leqslant \rho(x,y)$, 所以, 度量 d 和 ρ 是等价的.

问题 1.1.17 设 l_1 为所有绝对收敛实数列, 定义两个不同度量 $d(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|$ 和 $\rho(x,y)=\sup\{|x_i-y_i|\}$, 则它们是等价的吗?

不是. 令 $x_n=\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n},\cdots,\dfrac{1}{n},0,\cdots\right)$, 即 x_n 的前 n 个坐标都是 $\dfrac{1}{n}$, 其他的都是 0, 则对于 $x_0=0\in c_0$, 有 $\rho(x_n,x_0)=\dfrac{1}{n}\to 0$, 但 $d(x_n,x_0)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n}=1$. 故 $\{x_n\}$ 依度量 ρ 收敛到 x_0, 但 $\{x_n\}$ 依度量 d 不收敛到 x_0. 所以, 度量 d 和 ρ 不是等价的.

问题 1.1.18 设 l_1 为所有绝对收敛实数列, 定义两个不同度量 $d(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|$ 和 $\rho(x,y)=\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2}$, 则它们是等价的吗?

不是. 令 $x_n=\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n},\cdots,\dfrac{1}{n},0,\cdots\right)$, 即 x_n 的前 n 个坐标都是 $\dfrac{1}{n}$, 其他的都是 0, 则对于 $x_0=0\in c_0$, 有 $d(x_n,x_0)=1$, 但 $\rho(x_n,x_0)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n^2}\right)^{1/2}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. 故 $\{x_n\}$ 依度量 ρ 收敛到 x_0, 但 $\{x_n\}$ 依度量 d 不收敛到 x_0. 所以, 度量 d 和 ρ 不是等价的.

问题 1.1.19 若 d 是非空集合 X 上的一个度量, 则对于任意的 $x,y\in X, d(x,y)$ 可能是无穷大吗?

不可能. 设 d 是非空集合 X 上的一个度量, 则对于任意的 $x,y\in X, d(x,y)$ 是一个固定的有限非负实数, 不可能是无穷大.

问题 1.1.20 对于给定的非空集合 X 和度量 d, 有哪些简单的方法可以构造新的度量?

(1) 若 $f(x)$ 是单调上升的非负函数, $f(x+y) \leqslant f(x)+f(y)$, 并且 $f(x)=0$ 当且仅当 $x=0$, 则不难验证复合函数 $\rho(x)=f(d(x))$ 一定是 X 上的度量. 如 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 等.

(2) 对于给定的非空集合 X 和度量 d, 若定义 ρ 为

当 $d(x,y) \leqslant 1$ 时, $\rho(x,y)=d(x,y)$; 当 $d(x,y)>1$ 时, $\rho(x,y)=1$, 则 ρ 是 X 的度量.

问题 1.1.21 *对于度量空间 (X,d_1) 和 (Y,d_2), 在 X 和 Y 的笛卡儿积 $X \times Y$ 上可以定义哪些度量?*

可以定义很多不同的度量, 如对于 $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2) \in X \times Y$, 可以定义下面的一些度量:

$$d(x,y)=d_1(x_1,y_1)+d_2(x_2,y_2),$$

$$\rho(x,y)=\max\{d_1(x_1,y_1),d_2(x_2,y_2)\}$$

等.

1.1.6 度量空间的收敛

问题 1.1.22 *什么是收敛点列和极限?*

设 (X,d) 是度量空间, $\{x_n\} \subset X$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x_0)=0$, 则称序列 $\{x_n\}$ 按度量 d 收敛于 x_0, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, 或 $x_n \to x_0(n\to\infty)$, 此时称 $\{x_n\}$ 为收敛点列, 称 x_0 为 $\{x_n\}$ 的极限.

问题 1.1.23 *在度量空间 (X,d) 中, 若 $\{x_n\}$ 是收敛点列, 则 $\{x_n\}$ 的极限一定唯一吗?*

是的. 假如存在 $x,y \in X$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=y$, 但 $x \neq y$, 则由 $d(x,y) \leqslant d(x_n,x)+d(x_n,y)$ 可知 $d(x,y) \leqslant 0$. 又由于 $d(x,y) \geqslant 0$, 故 $d(x,y)=0$, 故 $x=y$, 所以由反证法原理可知 $\{x_n\}$ 的极限唯一.

问题 1.1.24 *为什么要强调在度量空间中, 收敛序列 $\{x_n\}$ 的极限 x_0 一定是唯一的?*

这是因为在一般的拓扑空间 (X,τ), 收敛序列 $\{x_n\}$ 的极限 x_0 不一定是唯一的. 不过度量拓扑空间是 Hausdorff 空间, 在 Hausdorff 空间中, 收敛序列 $\{x_n\}$ 的极限 x_0 一定是唯一的.

问题 1.1.25 *平凡度量空间中, 序列 $\{x_n\}$ 收敛时, 具有什么特点?*

在平凡度量空间中, 若序列 $\{x_n\}$ 收敛到 x_0, 则一定存在足够大的 N, 使得 $n>N$ 时, 有 $x_n=x_0$ 都成立.

问题 1.1.26 *$d(x,y)$ 是 x 和 y 的二元连续函数吗?*

是的. 由于

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) &\leqslant d(x_n, x_0) + d(x_0, y_n) \\ &\leqslant d(x_n, x_0) + d(x_0, y_0) + d(y_0, y_n), \end{aligned}$$

因此

$$d(x_n, y_n) - d(x_0, y_0) \leqslant d(x_n, x_0) + d(y_n, y_0).$$

同样地, 有

$$d(x_0, y_0) - d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, x_0) + d(y_n, y_0).$$

因而

$$|d(x_n, y_n) - d(x_0, y_0)| \leqslant d(x_n, x_0) + d(y_n, y_0).$$

所以, 若 $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$, 则 $d(x_n, y_n) \to d(x_0, y_0)$.

问题 1.1.27 若 X 是线性空间, (X, d) 为度量空间, $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$, 则序列 $\{x_n + y_n\}$ 一定收敛于 $x_0 + y_0$ 吗?

不一定. 例如, 设 $R = (-\infty, +\infty)$, 对于任意 $x, y \in R$, 定义

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ \max\{|x|, |y|\}, & x \neq y, \end{cases}$$

则容易验证 (R, d) 是度量空间.

其实, 只要取 $x_n = 1$, $y_n = -\dfrac{1}{n}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, 则

$$d(x_n, x_0) = d(1, 1) = 0 \to 0, \quad d(y_n, y_0) = d\left(-\frac{1}{n}, 0\right) = \frac{1}{n} \to 0.$$

但 $d(x_n + y_n, x_0 + y_0) = d\left(1 - \dfrac{1}{n}, 1\right) = 1$, 因此 $d(x_n + y_n, x_0 + y_0)$ 不收敛于 0. 所以, 虽然 $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$, 但是 $\{x_n + y_n\}$ 不收敛于 $x_0 + y_0$.

1.1.7 度量空间中的球

问题 1.1.28 度量空间的球是什么?

若 (X, d) 为度量空间, r 为大于 0 的实数, 则称 $U(x_0, r) = \{x \in X |\ d(x_0, x) < r\}$ 是以 x_0 为中心、r 为半径的开球, 记为 $U(x_0, r)$. 称 $B(x_0, r) = \{x \in X |\ d(x_0, x) \leqslant r\}$ 是以 x_0 为中心、r 为半径的闭球. 称 $S(x_0, r) = \{x \in X |\ d(x_0, x) = r\}$ 是以 x_0 为中心、r 为半径的球面.

问题 1.1.29 在度量空间中, 一个半径较小的开球能否真包含一个半径较大的开球?