HAIDIAN JIAOXUEKAO

海淀教学考

数学

初中三年级

北京海淀区高级教师编写组 编写

初中同步素质教育丛书

初中同步素质教育丛书

海 淀 教 学 考

数学三年级

主　编　张光珞　冯世腾
副主编　刘玉文
编　写　冯士腾　贺鹏远
　　　　皇甫守先　张秀清

内蒙古科学技术出版社

初中同步素质教育丛书
海淀教学考
数　学
（三年级）
*
内蒙古科学技术出版社出版发行
（赤峰市哈达街南一段四号）
各地新华书店经销
长春市新世纪彩印厂印刷
开本：787×1092　1/16　印张：11　字数：240千字
1998年8月第1版　1998年8月第1次印刷
印数：1—6 000册
ISBN 7—5380—0575—7
G·125　定价：9.80元

前 言

展望21世纪，应试教育向素质教育的转变，将成为中国基础教育的发展主流。在这世纪之交，我社隆重推出《初中同步素质教育丛书》，献给广大的中学生——21世纪的主人。

本丛书从全新的角度出发，更着眼于培养中学生的学习兴趣，提高中学生的学习能力，夯实中学生的知识基础，把中学生从死记硬背，题海战术中解脱出来。本丛书按初中教学分语文、数学、英语、物理、化学五大主科共12册。是同类丛书中质量高，内容新的典范之作，具有权威、典型、实用的显著特点。

本套丛书由北京海淀区高级教师编写组编写，作者队伍质量高，具有权威性。

本套丛书依据国家教委颁布的最新教学大纲内容编写，与最新全国统编教材同步，与中学生的学习步骤同步，便于对照学习。对知识点，用分析、讲解典型例题的形式进行强调，对一些容易模糊、混淆的问题，做出重点提示，具有很强的预见性。

本丛书在对初中教材的详细研究及对初中教学进行调查的基础上，设计了一套程序。这套程序包括课前自学、听课思路、复习巩固、独立作业、课外学习、单元测试等环节，建立起一个完整的学习周期模式。每册书均附有期末综合测试题，具有实用性。

编 者

目　录

代　数

几　何

代　数

第十二章　一元二次方程

12.1　一元二次方程

课　前　自　学

〔基本要求〕

本节课文从列方程解答应用题引入一元二次方程的概念,说明学习一元二次方程在经济生活和生产实践中有着广泛的应用,它是中学数学知识的一个重要内容.

学习本节知识,要求:1.理解、掌握两个概念——整式方程和一元二次方程,以及一元二次方程的一般形式.2.能熟练地把一个一元二次方程化成一般形式并能认知它的各项的系数,这是以后进一步深入学习一元二次方程其它知识的基础,因而也是本节学习的重点.3.能把含有字母系数的一元二次方程化成一般形式并准确地认知它的各项的系数.由于其中的字母系数比较抽象,因而这种练习是学习本节的难点.4.结合本节知识的学习,应培养提高理解概念、判断概念的抽象思维能力以及对方程进行同解变形的能力.

听　课　思　路

1.教学纲要:

(1)整式方程:如果一个方程两边都是关于未知数的整式,就把这样的方程叫做整式方程.

(2)一元二次方程:(i)定义:只含有一个未知数并且未知数的最高次数是2的整式方程叫做一元二次方程.(ii)一元二次方程的一般形式:任何一个关于 x 的一元二次方程经过整理,都可化成　$ax^2+bx+c=0$ 的形式,这种形式叫做一元二次方程的一般形式.其中:ax^2 叫做二次项,二次项的系数是 a,bx 叫做一次项,一次项系数是 b,c 叫常数项.b 和 c 都可以是任何实数,而 $a\neq0$.如果 $a=0$,那么方程不是二次方程.

2.典型例题解析:

例1:观察辨认下列方程:(1)$\frac{3}{x}=\frac{x}{4}$　　(2)$(x-1)^2=2(x+1)(x-1)$

(3)$\frac{(2x+1)^2}{2}-\frac{x(x+3)}{3}=\frac{x}{6}$　　(4)$x(x-2)=(x-2)(x^2+2x+4)$

(5)$\frac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-x}{x}$

回答出哪几个方程是整式方程?哪几个是一元二次方程?

答：方程(2)、(3)、(4)是整式方程，方程(2)、(3)是一元二次方程．

说明：辨认整式方程或一元二次方程，就要联想和应用这两个定义去进行识别．要注意一元二次方程是整式方程的一种特例，整式方程包含一元二次方程，我们也可以根据它们之间的这种从属关系检验以上两个答案．

例2：判断下列关于一元二次方程的四个命题的真假，在命题后面的括号内划“√”或“×”号．

(1)方程 $ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程．（　　）

(2)方程 $2x^2-\frac{3}{x}-5=0$ 不是一元二次方程．（　　）

(3)如果一个方程不是整式方程，那么它就不是一元二次方程．（　　）

(4)一元二次方程二次项的系数可以是任何非负的或非正的实数．（　　）

答：(1)(×)　(2)(√)　(3)(√)　(4)(×)

说明：判断以上命题的真假，一要根据整式方程和一元二次方程的含义，二要注意一元二次方程的一般形式，其中二次项系数不能为零．

例3：把下列两个关于 x 的一元二次方程：(1) $\frac{(x-3)^2}{2}=2(x-3)(x+3)$

(2) $2kx(x-5)=3(3-2kx)$　$(k\neq0)$．都化成一般形式　$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，

再计算或表示：c 除以 a 的商、$\frac{b}{a}$ 的相反数以及 b 的平方与 $4ac$ 的差．

解：(1) $x^2-6x+9=4x^2-36$，$x^2-6x+9-4x^2+36=0$，

$-3x^2-6x+45=0$，$x^2+2x-15=0$

$a=1$，$b=2$，$c=-15$，$\therefore \frac{c}{a}=-15$，$-\frac{b}{a}=-2$，$b^2-4ac=2^2-4\times1\times(-15)=4+60=64$

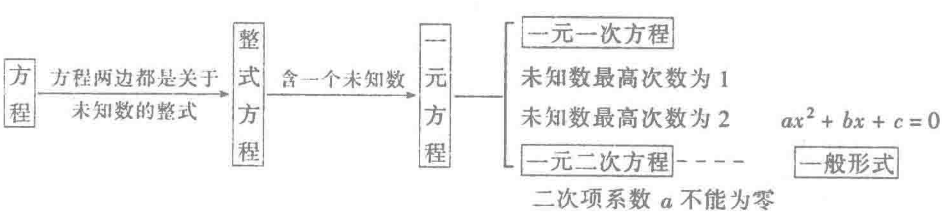
(2) $2kx^2-10kx=9-6kx$，$2kx^2-10kx-9+6kx=0$，$2kx^2-4kx-9=0$，

$a=2k$，$b=-4k$，$(k\neq0)$，$c=-9$，$\therefore \frac{c}{a}=-\frac{9}{2k}$，$-\frac{b}{a}=-\frac{-4k}{2k}=2$，

$b^2-4ac=(-4k)^2-4(2k)(-9)=16k^2+72k$．

说明：把一元二次方程化成一般形式，要根据所给方程的具体形式，对方程进行变形，整理，然后化成一般形式，如果有字母系数的同类项，就要用提公因式法进行并项，用二次项系数 a 作除数时，要指出 $a\neq0$．

复　习　巩　固



独 立 作 业

1. 填空：

(1)__________叫做一元二次方程. 一元二次方程的一般形式是________.

(2)已知一个关于 x 的方程，$(k+3)x^2-(k-3)x+k+1=0$. 当 k________时，这个方程是一元二次方程；当 k________时，这方程是一元一次方程. 当 k________时，这方程不含一次项；当 k________时，这方程没有常数项.

(3)当 m________时，$(m-\sqrt{2})x^{m^2}+(m+\sqrt{2})x+m=0$ 是 x 的一元二次方程. 当 m________时，这方程是 x 的一元一次方程.

2. 单项选择题：

(1)下列四个方程中，不是 x 的一元二次方程的有：（　）

①$\dfrac{x^2}{\sqrt{5}}=\dfrac{x}{\sqrt{2}+1}$

②$\dfrac{2}{x}=\dfrac{x+1}{3}$

③$(x-2)(2x+1)=2x^2$

④$x(x+1)=(x+1)(x^2-x+1)$

A. ①②③　　B. ①②④

C. ①③④　　D. ②③④

(2)若 $m^2+(n-1)^2=0$，则下列方程中为一元二次方程的是：（　）

A. $mx^2+nx+m=1$

C. $nx^2+(m-1)x+n=x^2$

B. $(n-1)x^2+mx+m=x$

D. $(m-1)x^2+nx+m=0$

3. 把下列方程先化成一元二次方程的一般形式 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$，指出相应的 a、b、c 值，再计算：b 除以 a 的商的相反数以及 b 的平方减 a、c 乘积的四倍所得的差.

(1)$(3x-1)(4x+2)=2x(x+1)$

(2)$x^2(x+2)=(x-2)(x^2+2x+4)$

(3)$(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=(x+\sqrt{3})^2+(x-\sqrt{3})^2$

(4)$\dfrac{x(x+1)}{2}+\dfrac{4(x-1)}{3}=1$

4. k 为何值时，关于 x 的方程 $-kx^2+2kx=x^2+k+3$ 是一元二次方程？设它二次项系数、一次项系数和常数项分别为 a、b、c，试用含 k 的代数式表示二次根式 $\sqrt{b^2-4ac}$.

5. 若 k 为实数，试判断关于 x 的方程 $(k^2+1)x^2+(2k+1)x+1=0$ 是否一定是 x 的一元二次方程？说明理由，又设它的二次项系数、一次项系数和常数项分别为 a、b、c，当 k 为怎样的实数时，二次根式 $\sqrt{b^2-4ac}$ 才有意义？

12.2　一元二次方程的解法

课　前　自　学

〔基本要求〕

本节课文在求一个数的平方根的基础上,连续引入直接开平方法、配方法、求根公式法三种一元二次方程的解法,接着在多项式因式分解的基础上,又介绍了解一元二次方程的因式分解法.其中求根公式是一元二次方程解法中一个应用广泛的重要公式.对求根公式,不仅要熟练掌握,而且要能独立推导.课文是在配方法的基础上推导出求根公式的,配方法在今后学习中还有很多用处,我们应把它作为一个重要的数学方法来学习,要在深刻理解的基础上,熟练掌握.学习、掌握一元二次方程各种解法,要注意它们各自的特点及其适用的条件,要能根据方程的具体形式、结构,灵活选择适合的简便解法,培养、提高自己思维的灵活性以及对方程变形、求解的准确性.

听　课　思　路

1.教学纲要:

(1)直接开平方法:对于具有 $x^2=p(p\geqslant 0)$或$(mx+n)^2=p(p\geqslant 0)$形式的一元二次方程,应用求一个数平方根的方法,就可用直接开平方法求解.具有 $ax^2+c=0(\frac{c}{a}\leqslant 0)$形式的方程,变形之后也可用直接开平方法求解.

(2)配方法:把一元二次方程两边配成$(x+n)^2=p(p\geqslant 0)$的形式,然后用开平方法求解,这种解法叫做配方法.其一般步骤为:①整理方程,把方程的二次项系数化为 1;②移项,使方程左边为二次项和一次项,右边为常数项;③方程两边各加上一次项系数一半的平方;④把方程配成$(x+n)^2=p$ 的形式;⑤当 $p\geqslant 0$ 时,用开平方法求解,$x=-n\pm\sqrt{p}$.

(3)求根公式法:对于一般形式的方程　$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$,方程的求根公式为:

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}(b^2-4ac\geqslant 0)$　利用求根公式解一元二次方程的解法叫公式法.

(4)因式分解法:一般步骤:(1)把一元二次方程化成右边为零的形式;(2)把方程左边因式分解成两个一次因式的乘积;(3)使这两个因式分别等于零,得到两个一元一次方程;(4)解这两个一元一次方程,就得到一元二次方程的两根.

2.典型例题解析:

例 1:用直接开平方法解方程:(1)$25x^2+256=0$　　(2)$\frac{1}{5}(2y-3)^2=48$

解:(1)$25x^2=-256$,$x^2=-\frac{256}{25}$,$\because$任一实数平方为非负数,$\therefore$原方程无实数根.

(2)$2y-3=\pm\sqrt{48\times 5}$,$2y-3=\pm 4\sqrt{15}$,$2y-3=4\sqrt{15}$或 $2y-3=-4\sqrt{15}$,

$\therefore y_1=\frac{3+4\sqrt{15}}{2}, y_2=\frac{3-4\sqrt{5}}{2}$

说明:1. 方程(1)是有 $ax^2+c=0$ 形式的方程,移项后得 $x^2=-\frac{c}{a}$,当 $-\frac{c}{a}\geqslant 0$ 时,有解;当 $-\frac{c}{a}<0$ 时,无解. 2. 方程(2)是把代数式看成一个整体,当成一个未知数,得出 $2y-3=4\sqrt{15}$ 或 $2y-3=-4\sqrt{15}$ 再求解的,这种解隐含了“换元”和“转化”的思想方法.

例 2:用配方法解方程:(1) $-2x^2+30=\sqrt{2}x$ (2) $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$

解:(1) $-2x^2-\sqrt{2}x+30=0$, $x^2+\frac{\sqrt{2}}{2}x-15=0$,

$x^2+\frac{\sqrt{2}}{2}x=15$, $x^2+\frac{\sqrt{2}}{2}x+(\frac{\sqrt{2}}{4})^2=15+(\frac{\sqrt{2}}{4})^2$, $(x+\frac{\sqrt{2}}{4})^2=\frac{242}{16}$,

$x+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{11\sqrt{2}}{4}$ 或 $x+\frac{\sqrt{2}}{4}=-\frac{11\sqrt{2}}{4}$, $x_1=\frac{10}{4}\sqrt{2}$ $\therefore x_1=\frac{5}{2}\sqrt{2}$

$x_2=-\frac{12}{4}\sqrt{2}$ $\therefore x_2=-3\sqrt{2}$

(2) $(a\neq 0)$, $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$, $x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2=-\frac{c}{a}+(\frac{b}{2a})^2$,

$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}$

当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时, $x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ 不论 $a>0$ 或 $a<0$,都可写为:

$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\therefore x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,

$\therefore x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

说明:1. 方程(1)的二次项系数是负数,把二次项系数化 1 时,两边除以负数,注意各项变号. 2. 方程(2)的二次项系数是字母系数 a,把二次项系数化 1 时,要写明“$a\neq 0$”,才能使方程两边除以 a,配方得出 $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 后,要写明“当 $b^2-4ac\geqslant 0$”才能用开方法得到 $x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$,这是方程有解的条件,不可忽略,随后,还应考虑 $a\neq 0$ 时有“$a>0$ 或 $a<0$”两种情形,合起来都可用分式前面的正、负两个符号“±”来表示.

例 3:用公式法解方程.(1) $x(x-2\sqrt{3})=x+\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$

(2) $mnx^2-(m^2-n^2)x-mn=0(mn\neq 0)$

解:(1) $x^2-2\sqrt{3}x-x-3+\sqrt{3}=0$, $x^2-(2\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}-3=0$,

$a=1$, $b=-(2\sqrt{3}+1)$, $c=\sqrt{3}-3$

$b^2-4ac=[-(2\sqrt{3}+1)]^2-4\times 1\times(\sqrt{3}-3)=25$,

$x=\frac{2\sqrt{3}+1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{2\sqrt{3}+1\pm 5}{2}$, $x_1=3+\sqrt{3}$, $x_2=-2+\sqrt{3}$

(2) $a=mn\neq 0, b=-(m^2-n^2), c=-mn, b^2-4ac=[-(m^2-n^2)]^2-4mn(-mn)=m^4+n^4+2m^2n^2=(m^2+n^2)^2$

$$x=\frac{m^2-n^2\pm\sqrt{(m^2+n^2)^2}}{2mn}=\frac{m^2-n^2\pm(m^2+n^2)}{2mn}, x_1=\frac{2m^2}{2mn}=\frac{m}{n}, x_2=\frac{-2n^2}{2mn}=-\frac{n}{m}.$$

说明:1. 方程(1)不是一般形式的一元二次方程,要先化成一般形式,才能用求根公式求解.2. 方程(2)是字母系数的一元二次方程,要写明“$a=mn\neq 0$”,注意把 $b^2-4ac=m^4+n^4+2m^2n^2$ 分解因式,化成 $b^2-4ac=(m^2+n^2)^2$,才能在代入公式后,把 $\sqrt{b^2-4ac}$ 化简,得到两个有简明形式的根.

例 4:用因式分解法解方程:(1) $2(x+3)^2=3(x^2+3x)$

(2) $2(y^2-y)^2-3(y^2-y)-2=0$

解:(1) $2(x+3)^2=3x(x+3), 2(x+3)^2-3x(x+3)=0, (x+3)[2(x+3)-3x]=0$,

$(x+3)(6-x)=0$

$x+3=0$ 或 $6-x=0, x_1=-3, x_2=6$

(2) $[2(y^2-y)+1][(y^2-y)-2]=0, (2y^2-2y+1)(y^2-y-2)=0$,

$2y^2-2y+1=0$ 或 $y^2-y-2=0$

由 $2y^2-2y+1=0, \triangle=(-2)^2-4\times 2\times 1<0$,无解

由 $y^2-y-2=0$,得 $(y+1)(y-2)=0, y_1=-1, y_2=2$

说明:1. 方程(1)得出 $2(x+3)^2=3x(x+3)$ 后,不能两边约去 $(x+3)$,以免减根.必须移项,化成一个多项式等于零的形式,继续分解因式.2. 方程(2)要把 (y^2-y) 看成一个整体,当成一个未知数,对它的二次三项式用十字相乘法分解因式.3. 方程(1)、(2)得到因式乘积等于0的方程之后,要转化为两个一次方程再求解.

复　习　巩　固

一元二次方程四种解法的比较:

解法名称	化归、适用的形式	化归的中间目标	方程有实数根的条件
直接开平方法	$ax^2=p$ 或 $a(mx+n)^2=p$	$x^2=\frac{p}{a}$ 或 $(mx+m)^2=\frac{p}{a}$	$\frac{p}{a}\geqslant 0$
配方法	$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$	$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$	$b^2-4ac\geqslant 0$
求根公式法	$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$b^2-4ac\geqslant 0$
因式分解法	含 x 的多项式 $=0$	含 x 的两个因式乘积 $=0$	多项式能分解因式

独　立　作　业

1. $m=$ ________时,关于 x 的方程 $(m^2+m)x^{m^2-m}=2-m$ 是一元二次方程,能用直接开平方法求解.

2. $x=$ ________时,代数式 $\frac{x^2-5x-4}{x^2+3x-4}$ 的值为零,$x=$ ________时,代数式 $\sqrt{x^2-2x-2}$ 的值为 1.

3. 关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2+x+k^2+2k-3=0$ 的一根为零,则 $k=$________.

4. 若 x_1、x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的两根,且 $x_1<x_2$,则 $x_2-x_1=$________.

5. 单项选择题:

(1)一元二次方程 $\frac{1}{2}(x-1)^2=c$ 能用直接开平方法求解的条件为:　(　　)

A. c 为正数　B. c 为负数

C. c 为非负数　D. $c=0$

(2)用配方法解方程 $3x^2+4x+1=0$,配方后所得新方程应为:　(　　)

A. $(x+\frac{4}{3})^2=\frac{7}{9}$　B. $(x+\frac{2}{3})^2=\frac{1}{9}$

C. $(x^2+\frac{2}{3})^2=\frac{1}{9}$　D. $(3x+\frac{3}{2})^2=\frac{5}{4}$

6. 用配方法解方程:

(1) $-3t^2+2t+5=0$

(2) $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

7. 用公式法解关于 x 的方程:

(1) $x^2-6x+9k=0\ (k<1)$

(2) $x^2-(2t-1)x+t^2-t=0$

8. 用因式分解法解关于 x 的方程:

(1) $x^2-2bx-a^2+b^2=0$

(2) $x^2+(2-\sqrt{2})ax-2\sqrt{2}a^2=0$

9. 用适当方法解方程:

(1) $3(x^2-x)^2-(x^2-x)-10=0$

(2) $x^2-(2k-1)x+k-\frac{3}{4}=0$($k$ 为字母系数,$k>1$)

10. 已知关于 x 的两个方程 $3ax^2-bx-1=0$ 与 $ax^2+2bx=5$ 有一个公共的根为 -1,求:a 与 b 的值.

12.3　一元二次方程的根的判别式

课　前　自　学

〔基本要求〕

本节课文在复习一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 配方法、求根公式的基础上，引出一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的判别式的概念、符号以及判别根的定理和逆定理，提供了不解方程而直接讨论、判断一元二次方程根的情况的理论依据. 通过学习课文，要明确和熟悉根的判别式及判别根的定理和逆定理. 要能应用这个定理和逆定理判别一元二次方程根的情况或由根的情况求方程中待定系数值或取值范围，通过这个定理和逆定理的应用，培养提高自己观察、分析情况的能力和分类讨论、逻辑论证的能力以及思维的深刻性、缜密性品质.

听　课　思　路

1. 教学纲要：

(1)一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 根的判别式，我们把方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 根的公式中的 b^2-4ac 叫做这个方程的根的判别式，用符号"△"表示：即 $\triangle=b^2-4ac$.

(2)一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的判别定理：方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$.

$\left.\begin{array}{l}(i)\triangle>0\text{ 时，方程有两个不相等的实数根}\\(ii)\triangle=0\text{ 时，方程有两个相等的实数根}\end{array}\right\}$ 当 $\triangle\geqslant0$ 时，方程有两个实数根.

$(iii)\triangle<0$ 时，方程没有实数根.

分别把 (i)、(ii)、(iii) 中的条件、结论交换，就得到这个定理的逆定理.

2. 典型例题解析：

例 1：不解方程，判断以下方程根的情况：

(1)$5x(5x+2\sqrt{3})+6=3$　　(2)$\sqrt{2}y(1-\sqrt{2}y)=\sqrt{3}-\sqrt{2}(y+\frac{\sqrt{2}}{8})$

解：(1)$25x^2+10\sqrt{3}x+6-3=0$，$\triangle=(10\sqrt{3})^2-4\times25\times3=0$，

∴方程有两个相等的实数根.

(2)$\sqrt{2}y-2y^2=\sqrt{3}-\sqrt{2}y-\frac{1}{4}$，$-2y^2+2\sqrt{2}y+\frac{1}{4}-\sqrt{3}=0$，

$\triangle=(2\sqrt{2})^2-4(-2)(\frac{1}{4}-\sqrt{3})=10-8\sqrt{3}<0$，∴方程没有实数根.

说明：此题解法，是先把方程化成一般形式 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，再计算，判断 $\triangle=b^2-4ac$ 的值，根据△与 0 的大小关系，应用判别根的定理，进行判断.

例 2：已知两个方程：(1)$(a^2+1)x^2-2ax+a^2+4=0$　　(2)$x^2+2kx-k=4$　都是关于 x 的方程.

求证：(1)对于任意实数 a，方程(1)没有实数根　(2)对于任意实数 k，方程(2)都有两个

不等的实根.

证明:(1)$\triangle=(-2a)^2-4(a^2+1)(a^2+4)$

$=4a^2-4a^4-20a^2-16=-4(a^4+4a^2+4)=-4(a^2+2)^2$

$\because a$ 为任何实数,$\therefore a^2\geqslant 0,(a^2+2)^2>0,-4(a^2+2)^2<0$　$\therefore$ 方程(1)没有实数根.

(2)$x^2+2kx-(k+4)=0$,

$\triangle=(2k)^2+4(k+4)=4k^2+4k+4=4(k^2+k+1)=4(k^2+k+\frac{1}{4}+1-\frac{1}{4})$,

$\triangle=4(k+\frac{1}{2})^2+3$,$\because$ 对于任意实数 k,都有$(k+\frac{1}{2})^2\geqslant 0,\triangle=4(k+\frac{1}{2})^2+3>0$,

$\therefore$ 方程(2)总有两个不相等的实数根.

说明:以上证明步骤为:(1)把方程整理成一般形式　(2)写出△关于字母系数的表达式　(3)对△的表达式进行因式分解或配方　(4)根据任意实数平方为非负数,判定△的符号　(5)肯定求证的结论.

例 3:t 取什么实数时,关于 x 的方程 $tx^2+x+t(1+2x)=0$ 有两个实数根.

解:$tx^2+x+2tx+t=0,tx^2+(2t+1)x+t=0,\triangle=(2t+1)^2-4t^2=4t+1$,

由题意,令△$\geqslant 0$ 得 $4t+1\geqslant 0,t\geqslant -\frac{1}{4}$,$\therefore$ 当 $t\geqslant -\frac{1}{4}$ 且 $t\neq 0$ 时,方程有两个实数根.

说明:由方程根的情况,确定字母系数的取值范围,要根据根的判别定理的逆定理,列出关于△与 0 的大小关系的不等式,然后解不等式,求出待定系数的取值范围,注意二次项系数不能为零.

例 4:已知关于 y 的方程　$y^2-y(ky-1)=6$ 有两个不等的实根,求 k 可取的最大整数值.

分析:把方程化一般形式后,由方程根的情况,列出△与 0 的关系不等式,先得出 k 的取值范围,再在取值范围内求 k 可取的最大整数值.

解:$y^2-ky^2+y-6=0,(-k+1)y^2+y-6=0,\triangle=1^2+24-24k=-24k+25$,

由题意,令△>0,得 $-24k+25>0,k<\frac{25}{24}$,

在此范围内,取 $k=1$,但使二次项系数 $k-1=0$,舍去,$\therefore$ 取 $k=0$

复　习　巩　固

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的判别式$\triangle=b^2-4ac$ 与二次根式$\sqrt{b^2-4ac}$概念的联系:

方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$的根的公式 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ —

- $\sqrt{b^2-4ac}$为二次根式—
  - 当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时,二次根式$\sqrt{b^2-4ac}$有意义
  - 当 $b^2-4ac<0$ 时,二次根式无意义(在实数范围内无意义)
- b^2-4ac 是根的判别式△—
  - 当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时,方程有两个实数根
  - 当 $b^2-4ac<0$ 时,方程没有实数根

独　立　作　业

1. 单项选择题:

(1)不解方程 $x(3x-\sqrt{6})=\sqrt{2}(\sqrt{3}x-\sqrt{2})$,判别根的情况为:(　　)

A.有两个不等的实根

B.有两个相等的实根

C.没有实数根

D.非以上答案

(2)设有三个命题:①一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$,若 $c=0$,则这方程必有两个不相等的实数根.②如果方程 $ax^2+bx+c=0$ 中,$a\neq 0$,a、c 异号,那么这方程必有两个不相等的实数根.③若 a、b 是两个实数,关于 x 的方程 $x^2-(a+b)x+ab=0$ 必有两个实数根,以上三个命题中,正确的是:(　　)

A.①②　　B.②③

C.①③　　D.②

(3)若关于 x 的方程 $kx^2-2(k+2)x+k+5=0$ 没有实数根,则方程 $(k-5)x^2-2(k+2)x+k=0$ 的根的情况为:(　　)

A.无实根

B.有两个不等实根

C.有两相等实根

D.有两个不等实根或只有一个实根

2. 当 $m=$________时,方程 $mx^2-(2m-1)x+m=0$ 有两个不相等的实数根.

3. 若关于 x 的方程 $kx^2-2(3k-1)x+9k=1$ 两个实数根,则 k 的取值范围为________.

4. 关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$,a、b、c 都是有理数且 $a\neq 0$,则当根的判别式为________时,方程的根都是有理根.

5. 求证:不论 m 取怎样的实数值,方程 $2x^2+3(m-1)x+m^2-4m=7$ 都有两个不等的实数根.

6. 求证:对于任意实数 k,方程 $x^2-2\sqrt{2}kx+3k^2+6k+19=0$ 都没有实数根.

7. 求 p 为何值时,方程 $(5+11p)x^2-(11p-2)x-3+3p=0$ 有两个相等实根?求出这时方程的两根.

8. 若方程 $(t+1)x^2+2(t+1)x+t=1$ 有两个实数根,求 t 可取的最小整数值及这时方程的根.

9. 当 k 取什么整数时,关于 x 的方程 $(k^2-1)x^2-6(3k-1)x+72=0$ 有两个不等的正整数根?

10. 设 a、b、c 为直角△ABC 的三边,c 为最大边,试判断方程 $bx^2-2ax+c=b-cx^2$ 的根的情况.

12.4　一元二次方程的根与系数的关系

课　前　自　学

〔基本要求〕

本节课文由一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 推导出两根之和、两根之积与系数的关系式：$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$，以及它的两个推论：1. 若方程 $x^2+px+q=0$ 两根为 x_1、x_2，则 $x_1+x_2=-p$，$x_1x_2=q$.　2. 以两数 x_1、x_2 为根的一元二次方程(二次项系数为 1)是 $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$，学习课文要重点掌握一元二次方程两根和、两根积与系数的关系式，能熟练应用它解答有关问题，如已知含一个字母系数的一元二次方程的一根，求另一根及字母系数，又如不解已知方程，求两根倒数和、平方和等代数式的值，通过解答问题，培养提高数的基本运算能力、代数式恒等变形能力以及方程、方程组变形、求解的能力.

听　课　思　路

1. **教学纲要：**

(1)一元二次方程的根与系数关系定理：

若方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两根是 x_1、x_2，则 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

(2)推论(1)：若方程 $x^2+px+q=0$ 的两根是 x_1、x_2，则 $x_1+x_2=-p$，$x_1x_2=q$

推论(2)：以两数 x_1、x_2 为两根的一元二次方程(二次项系数为 1)是：

$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$

2. **典型例题解析：**

例 1：已知方程 $3x^2-19x+m-1=0$ 的一根为 1，求它的另一根及 m 值.

解：设方程的一根 $x_1=1$，另一根为 x_2，由根与系数关系，

$x_1+x_2=-\dfrac{-19}{3}=\dfrac{19}{3}$①　$x_1x_2=\dfrac{m-1}{3}$②　由①，$x_2=\dfrac{19}{3}-x_1=\dfrac{19}{3}-1=\dfrac{16}{3}$，

把 x_1、x_2 值代入②：$1\times\dfrac{16}{3}=\dfrac{m-1}{3}$，$m-1=16$，$m=17$

说明：以上解法利用了根与系数关系及题设的条件，此题还有另一解法，先把已知的根 $x_1=1$ 代入方程，求出字母系数 m，再求另一根的值.

例 2：k 为何值时，方程 $8x^2-(k-1)x+k=7$ 的两根：(1)互为倒数　(2)互为相反数

解：(1)方程化为 $8x^2-(k-1)x+k-7=0$，设此方程两根分别为 x_1、x_2，由根与系数关系，