HIT

数学・统计学系列

Using Trigonometry, Analytic Geometry, Complex Number, Vector Calculate Geometric Problems in Mathematics Competition

用三角、解析几何、复数、向量计算解数学竞赛几何题

谢彦麟 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数学·统计学系列

用三角、解析几何、复数、向量计算解数学竞赛几何题

Using Trigonometry, Analytic Geometry, Complex Number, Vector Calculate Geometric Problems in Mathematics Competition

谢彦麟 著

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书共4章,包括:解平面几何证明题,解平面几何中除证明题外的其他问题,解立体几何,解解析几何题.最后又提供了8个附录,以丰富本书的内容.

本书适合学生备考和数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

用三角、解析几何、复数、向量计算解数学竞赛几何题/谢彦麟著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2015.3

ISBN 978-7-5603-5228-2

Ⅰ.①用…　Ⅱ.①谢…　Ⅲ.①几何课-高中-题解
Ⅳ.①G634.635

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第023292号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　王勇钢
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张30.25　字数548千字
版　　次　2015年3月第1版　2015年3月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-5228-2
定　　价　48.00元

◎ 序言

作者拙作《计算方法与几何证题》初稿写成于 1993 年. 当时经长期深入研究(搜集了华南师范大学及附中图书馆、数学系资料室所有几何参考书的题目),发现绝大多数用纯几何分析推理较难解的几何题都可借助本人提出的"基本量"(互相独立即无函数关系,且可用以表示题目图中一切数量)化为三角、解析几何、复数、向量的计算题求解. 如把要证的等式各量都用基本量表示,则所证等式成为基本量的一个待证恒等式,验证此恒等式成立即可. 作者用此方法解出所搜集到的(用纯几何较难解的)绝大多数题目整理成书,以期供学生在参加考试、竞赛时未能用纯几何方法解题可改用计算方法解题. 此书稿跨越两个世纪,去年才由哈工大出版社出版. 虽然加进了近年的少数竞赛题,但总的来说题目过于陈旧,竞赛题很少,且未能适合现时中学生实际情况(使用新课程标准教材,再次精简许多基础知识). 现经与刘培杰数学工作室商议,再从历年《中等数学》(从 1982 年创刊号至 2013 年第 6 期由中国数学会数学普及工作委员会等单位主办,收集竞赛题最多)及哈工大出版社出版的有关数学竞赛书籍中搜集所有几何竞赛题(含培训题、选择题及个别近年高考题),用上述方法解其中用纯几何方法较难解的大多数题目,整理成本拙作出版(上述题目的阐述有所改变,选择、填空题一般改为解答题). 本书实际为上拙作之续集,为未读上拙作的读者读懂本书,重复(改写)了上拙作各章的补充公式及解题概述,且在附录中补充论述二阶及三阶行列式、空间向量及现时课本(必修)省去的平面几何、初等代数、三角、立体几何、解析几何的一些基础知识,上拙作的一些补充公式亦再加简略证明,以便现时高中学生能读懂本书. 但因作者对现时中学数学教学实际情况不够了解,难免有缺点疏漏,唯望中学教师、学生、广大读者提供宝贵意见.

本书有平面几何、立体几何、解析几何题共 700 余道(未注明出处者为国内省市级竞赛题及《中等数学》刊登的培训题),其中较易解者列入练习题(详细提示解题步骤). 建议读者阅读各章若干题之解答有所体会后独立解其余(例题、练习题)题目,以便参加考试时能应用本书所述方法解题.

谢彦麟

于广州华南师范大学数学科学学院

2012 年 8 月

◎目录

第1章 解平面几何证明题

§1.1 概述及补充知识

平面几何证明题在数学竞赛中所占分量最大. 当我们用纯几何分析、推理方法证题感到困难无法解决时可试用(在绝大多数情况下)三角或解析几何的计算解题,但有时用复数、向量计算解题更方便(如同序言所说,选定基本量(线段长、角、坐标等),用基本量表示所证结论等式各量的待证恒等式再验证之). 用三角计算证题得十分熟悉三角函数的恒等变换,可避免用解析几何解题时求交点坐标得解方程组出现较繁的分式、根式运算. 但用三角计算只能求线段、角,难求交点位置,故当题目中多次出现取(联系不大的线的)交点时则必须用解析几何解题(如证点在直线或圆上,诸点共直线、圆,诸直线、圆共点时可把结论用坐标式表示,一般用解析几何解题).

1° 用三角计算证题

这时最好选一条线段(题目中尽可能多的相等线段,如圆的半径、正多边形边长……)及几个角为基本量,可用正弦定理(公式最简)及锐角三角函数定义(对直角三角形的计算)逐步求出题目中其他线段,最后求结论中的量(线段或角)验证结论成立. 且所待证的恒等式必是以上述线段的同次幂为其各项的公因式,约去此公因式后变成单纯三角函数的恒等式(待证). 实际不妨设上述线段长为1(自设长度单位),直接求出待证的三角函数恒等式. 但有时为简化计算,要对待证的等式进行分

析（如两边乘、除以（非零）同一数，两边为正数时两边平方等可逆运算），逐步变成简单明显的等式（见§1.2，46题），或灵活结合几何分析、推理、列方程求未知量等各种方法简化计算（如拙作[1]例2.8）.

如§1.2第4题. 设半圆半径为r，即确定A,B,C点，线段CA,CB. 再设$\angle DPF=\angle BPF=\alpha$. 则由$PD$与半圆相切即可用$2\alpha,r$求（表示）$OP,PA,PB,PD$，射线$PEF$，确定点$E,F$，故$r$与$\alpha$为基本量. 要证以$EF$为直径的圆过点$O$，即证$\angle EOF=90°$，亦即证$\angle AOE+\angle BOF=90°$. $\triangle PAE$中已知二角一边（$\angle PEA=45°-\alpha$）可求AE，$\triangle PBF$亦然（$\angle PFB=180°-(\alpha+45°)$）可求$BF$，于是$\triangle OAE$中已知二边及夹角（45°），可用下文公式（1.1）求$\angle AOE$. 类似求$\angle BOF$. 再验证二者之和为90°即可.

但有时用基本量不易求得其他量（得解方程，开平方，选正、负号……）. 我们可多取一些量组成“条件基本量”（个数比基本量多，非独立，要适合一定条件，用它们很易表示其他量）. 我们先把这些条件基本量所要适合的条件用由它们构成的等式表示. 亦将所要证的结论用这些条件基本量构成的等式表示由前述表示条件的等式验证所要证的等式成立.

如§1.2第12题，设正方形边长为a，再设$\triangle CEF$一边$CF=m$，由$\triangle CEF$周长为$2a$知CE亦定，即a与m为基本量，但得按勾股定理列方程（含根号）解之才能求CE，求得的表示式颇繁，再继续求$\angle BNF$，$\angle DEM$（的三角函数）更繁. 故我们多取$CE=n$，由a,m,n组成条件基本量，用等式表示它们适合的条件（$\triangle CEF$周长为$2a$），把所得等式化简. 用a,m,n很易表示$\tan\angle BAF$，$\tan\angle BNF=\tan(\angle BAF+45°)=\cdots$及$\tan\angle DEM$，从而验证$\tan\angle BNF=\tan\angle DEM$（要注意利用上述$a,m,n$所适合（用等式表示）的条件），即可知$\angle BNF=\angle DEM$.

此题也可设a，$\angle BAN=\alpha$及$\angle DAM=\beta$为条件基本量（同样可知a与α是基本量），由它们容易求出CE,CF. 亦据$\triangle CEF$周长为$2a$，可用等式表示此条件，又用α,β易表示结论中的角，从而可用上述等式验证所要证这些角的结论，现改证如下：

设a,α,β如上述，则

$$CF=a-a\tan\alpha,CE=a-\tan\beta$$

$$\begin{aligned}EF&=\sqrt{(a-a\tan\alpha)^2+(a-a\tan\beta)^2}\\&=a\sqrt{2-2\tan\alpha-2\tan\beta+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}\end{aligned}$$

由$CF+CE+EF=2a$，得

$$(a-a\tan\alpha)+(a-a\tan\beta)+a\sqrt{2-2\tan\alpha-2\tan\beta+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}=2a$$

两边约去a，左边只保留平方根，其余项移右边化简后两边平方，再化简得

$$\tan\alpha\tan\beta+\tan\alpha+\tan\beta=1 \quad ①$$

要证$\angle BNF=\angle DEM$，即证$\alpha+45°=90°-\beta$，即证$\alpha+\beta=45°$，即证(可反推)$\tan(\alpha+\beta)=1$，即证

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$$

即证

$$\tan\alpha+\tan\beta=1-\tan\alpha\tan\beta$$

此即式①. 故得证$\angle BNF=\angle DEM$.

要证E,F,N,M共圆，即证$\angle MEF=\angle BNF$(据附录Ⅱ定理10推论)，由上已证结论知即证

$$2\angle DEM=180°-\angle CEF$$

即证

$$\tan[2(90°-\beta)]=\tan(180°-\angle CEF)$$

即证

$$\tan 2\beta=\tan\angle CEF$$

$$左边=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}$$

$$右边=\frac{CF}{CE}=\frac{1-\tan\alpha}{1-\tan\beta}$$

故即证

$$\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\frac{1-\tan\alpha}{1-\tan\beta}$$

即证

$$\frac{2\tan\beta}{1+\tan\beta}=1-\tan\alpha$$

即证

$$2\tan\beta=1+\tan\beta-\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta$$

易见此式亦与①等价，于是得证E,F,N,M共圆.

有时为使运算过程的式子简洁、对称，对一些有简单关系的量(如三角形的三个角)、全部取作条件基本量(的一部分)，如§1.2,21,23,73,96,149题.

为使计算简单，补充在下述两情况的解三角形公式(按课本所述得分两部分计算(用正弦定理及余弦定理)，最后所得式子甚繁).

已知三角形二边(a,b)及其夹角($\angle C$)，求另一角($\angle A$)

$$\tan A=\frac{a\sin C}{b-a\cos C} \tag{1.1}$$

(在图1.1中都作$BD\perp CA$于D易证).

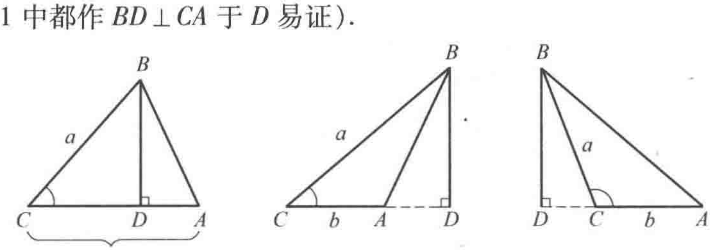

图1.1

已知三角形二边(a,b)及其中一边对角($\angle A$),求第三边(c)

$$c = b\cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2\sin^2 A} \tag{1.2}$$

(当 $b\cos A < \sqrt{a^2 - b^2\sin^2 A}$,即 $b < a$ 或 $\angle A \geqslant 90°$ 时只取正平方根,在图 1.2 中都作 $CD \perp AB$ 于 D 易证).

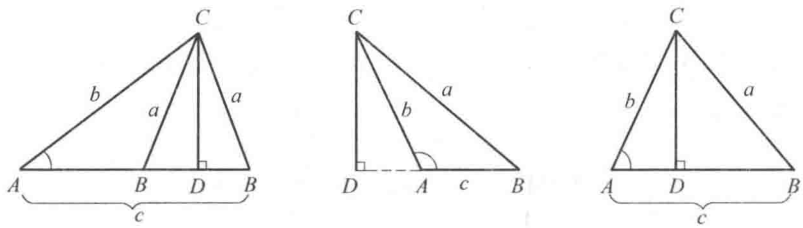

图 1.2

2° **用解析几何计算证题**

现行中学课本精简了许多公式,故先进行补充,并把一些公式改成对称形式、行列式形式以便进行论证;又说明点到直线的有向距离,多边形的有向面积的意义;补充点到直线的射影公式,已知点关于已知直线(点)的对称点坐标公式.本书对坐标系中任一点 P,记其坐标为(x_P, y_P).

2.1° 定比分点坐标公式,三角形重心坐标公式

设有数轴 Δ,其上单位向量 $\boldsymbol{e}$(取 Δ 的正向)对 Δ 上有向线段 AB,设$\overrightarrow{AB} = \lambda\boldsymbol{e}$,则称 λ 为有向线段 AB 在轴 Δ 的代数值,记为$\overline{AB} = \lambda$. 实际上

$$\overline{AB} = \begin{cases} |AB| & \text{当}\overrightarrow{AB}\text{与 }\boldsymbol{e}\text{ 同向} \\ 0 & \text{当}\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{0}\text{(即 }A,B\text{ 重合)} \\ -|AB| & \text{当}\overrightarrow{AB}\text{与 }\boldsymbol{e}\text{ 反向} \end{cases}$$

特别是,当 O 为数轴 Δ 原点,则 $\overline{OA}$ 为点 A 在 Δ 上所代表的数,或称 A 的坐标. 在直角坐标系中,当 A 在 x 轴(y 轴)上,则 $\overline{OA} = x_A$($\overline{OA} = y_A$).

对数轴上任意排列[①]的三点 A,B,C 有(如同向量加法)

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

当点 A,B 都在平面坐标系的 x 轴(y 轴上),则

$$\overline{AB} = x_B - x_A \qquad (\overline{AB} = y_B - y_A)$$

---

① 即 B 不一定在 A,C 之间,A,B,C 不一定按数轴正向排列.

设直线 l 上二点 A,B,又 l 上一点 P,$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\dfrac{\lambda}{\mu}$①$(\lambda,\mu\in\mathbf{R},\lambda,\mu\neq 0)$,则称 P 为线段 AB 按定比 $\lambda:\mu$ 的分点.

易见当 P 在线段 AB 内时 $\dfrac{\lambda}{\mu}>0$;当 P 在 AB 的延长线上时 $\dfrac{\lambda}{\mu}<-1$;当 P 在 BA 的延长线上时 $0>\dfrac{\lambda}{\mu}>-1$.

线段 AB 的中点 P_0 为线段 AB 按 $1:1$ 的分点.

在平面坐标系中已知 A,B 二点坐标,则分线段 AB 为 $\lambda:\mu$ 的分点 P 的坐标为

$$x_P=\frac{\mu x_A+\lambda x_B}{\lambda+\mu},y_P=\frac{\mu y_A+\lambda y_B}{\lambda+\mu}\tag{1.3}$$

特别当 $\lambda+\mu=1$ 时

$$x_P=\mu x_A+\lambda x_B,y_P=\mu y_A+\lambda y_B$$

AB 中点 M 的坐标

$$x_M=\frac{1}{2}(x_A+x_B),y_M=\frac{1}{2}(y_A+y_B)\tag{1.4}$$

证:由 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\dfrac{\lambda}{\mu}$,按(附录Ⅱ定理 13 的)合比定理得

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PB}}=\frac{\lambda+\mu}{\mu}$$

即

$$\frac{x_B-x_A}{x_B-x_P}=\frac{\lambda+\mu}{\mu}$$

解得

$$x_P=\frac{\mu x_A+\lambda x_B}{\lambda+\mu}$$

类似得

$$y_P=\frac{\mu y_A+\lambda y_B}{\lambda+\mu}$$

已知 $\triangle ABC$ 三顶点的坐标,则其重心 G 的坐标为

$$x_G=\frac{1}{3}(x_A+x_B+x_C),\ y_G=\frac{1}{3}(y_A+y_B+y_C)\tag{1.5}$$

证:对 AB 中点 M

$$x_M=\frac{1}{2}(x_A+x_B),\ y_M=\frac{1}{2}(y_A+y_B)$$

---

① 易见对 l 任取两相反方向之一为正向,$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$不变.

由附录Ⅱ定理 5 知$\frac{\overline{CG}}{\overline{GM}}=\frac{2}{1}$(图 1.3),故

$$x_G=\frac{2x_M+x_C}{2+1}=\frac{1}{3}(x_A+x_B+x_C)$$

类似得

$$y_G=\frac{1}{3}(y_A+y_B+y_C)$$

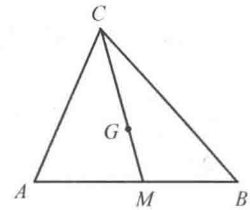

图 1.3

2.2° 当点 A,B 不重合,点 C,D 不重合时

直线 $AB /\!/ CD$ 或重合$\Leftrightarrow (x_B-x_A)/(x_D-x_C)=(y_B-y_A)/(y_D-y_C)$ (1.6)

(即$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$的坐标成比例,其中每个比等于$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$)

$$\text{直线 } AB\perp CD \Leftrightarrow (x_B-x_A)(x_D-x_C)+(y_B-y_A)(y_D-y_C)=0 \quad (1.7)$$

(等号左边为$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$)上二等式中改 B 为 $P(x,y)$,得过点 A 且与 CD 平行或重合的直线 l 的方程[①]

$$\frac{x-x_A}{x_D-x_C}=\frac{y-y_A}{y_D-y_C} \quad (1.8)$$

过点 A 且与 CD 垂直的直线方程[②]

$$(x_D-x_C)(x-x_A)+(y_D-y_C)(y-y_A)=0 \quad (1.9)$$

2.3° 直线的标准式方程,点到直线的有向距离

对如图 1.4 所示角 α 及(原点 O 到直线 l 距离)$|OK|=p$,则直线 l 的方程(标准式)

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p \quad (1.10)$$

因射线 OK 上单位向量$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$,故对 l 上任一点 $P(x,y)$,有

$$\begin{aligned}&x\cos\alpha+y\sin\alpha\\&=(x,y)\cdot(\cos\alpha,\sin\alpha)=\overrightarrow{OP}\cdot\boldsymbol{n}\\&=|\overrightarrow{OP}|\cdot|\boldsymbol{n}|\cos\theta \quad (\theta\text{ 为}\overrightarrow{OP}\text{与 }\boldsymbol{n}\text{ 的夹角})\\&=|\overrightarrow{OP}|\cos\theta=\overline{OK}=p\end{aligned}$$

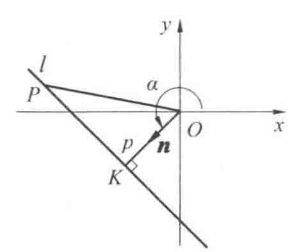

图 1.4

(因有向线段 OK 与 $\boldsymbol{n}$ 同向,故代数值 $\overline{OK}>0$,从而 $\overline{OK}=p$).

若 l 过原点 O,则(O,K)重合,α 可取二值(相差 π),$\cos\alpha,\sin\alpha$ 可取相反

---

① 其中 x_D-x_C,y_D-y_C 可分别改为 $l_x,l_y,(l_x,l_y)$为 l 的任一方向向量(与 l 平行的向量).

② 其中 x_D-x_C,y_D-y_C 可分别改为 $n_x,n_y,(n_x,n_y)$为 l 的任一法线向量(与 l 垂直的向量).

的二组值，此时 OP 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直，$p=\overrightarrow{OP}\cdot\boldsymbol{n}=0$.

此标准式方程各项系数适合：①x,y 的系数平方和 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$；②右边常数项大于或等于 0.

把直线 l 的一般式方程

$$Ax+By=-C \tag{1.11}$$

化为标准式方程：

因 l 的两方程(1.10)，(1.11)各项系数必相差一个常数因式 λ，方程(1.10)的两边乘 λ（待定）可得方程(1.11)，即

$$\lambda A\cdot x+\lambda B\cdot y=-\lambda C$$

由标准式方程的系数所适合的上述条件应有

$$(\lambda A)^2+(\lambda B)^2=1,\ -\lambda C\geqslant 0$$

故 $\lambda=\dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ 且应取根号前的符号使 $\dfrac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\geqslant 0$.

当 $C\neq 0$ 时，由此确定了方根的符号，从而确定 λ 所求标准式方程为

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \tag{1.12}$$

（选取方根的符号，使右边为正数）.

当 $C=0$ 时，则标准式方程(1.10)中 $p=0$，$\cos\alpha$，$\sin\alpha$ 可取相反的两组值，即 λ 可取相反的两值，方程(1.12)中的方根可任取正、负号.

对平面任一点 P，过 P 作 $PP_0\perp l$ 于 P_0，以图 1.5 中 α 的终边为正向称 $\overline{P_0P}$ 为 P 到 l 的有向距离.

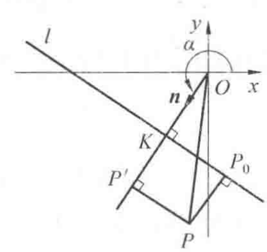

图 1.5

作 $PP'\perp OK$ 于 P'①

$$\begin{aligned}\overline{P_0P}=\overline{KP'}=\overline{OP'}-\overline{OK}&=\overrightarrow{OP}\cdot\boldsymbol{n}-p\\&=(x_P,y_P)\cdot(\cos\alpha,\sin\alpha)-p\end{aligned}$$

故此有向距离

$$d=x_P\cos\alpha+y_P\sin\alpha-P \tag{1.13}$$

易见当 $\overrightarrow{P_0P}$，$\boldsymbol{n}$ 同向（反向）时此有向距离为正（负）数. 当 l 不过点 O，若 P 与 O 在 l 同侧（异侧），则此有向距离为负（正）数.

点 P 到 l：$Ax+By+C=0$ 的（无向）距离

$$d=\frac{|Ax_P+By_P+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{1.14}$$

① 与证式(1.10)时证 $\overline{OK}=\overrightarrow{OP}\cdot\boldsymbol{n}$. 同理，在这里 $\overline{OP'}=\overrightarrow{OP}\cdot\boldsymbol{n}$.

2.4° 直线与圆的参数方程

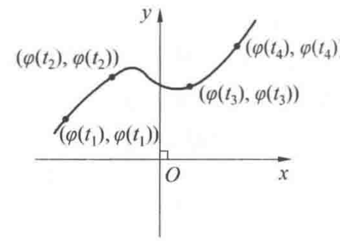

图 1.6

设已知定义于某区间(有限或无限,开、闭或半开闭)M 上两函数 $\varphi(t)$,$\psi(t)$(图 1.6),则平面点集

$$\{(\varphi(t),\psi(t))\mid t\in M\}$$

一般组成一曲线 Γ. 这时称

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t)\quad (t\in M)$$

为曲线 Γ 的参数方程,t 称此方程中的参数(一般 t 有一定几何意义).

过点 A 且与 CD 平行的直线方程(1.8)可改成参数方程

$$x=x_A+(x_D-x_C)t,\ y=y_A+(y_D-y_C)t \tag{1.15}$$

其中参数 $t=\overline{AP}/\overline{CD}$($P$ 为直线上任一点)或

$$x=x_A+t\cos\alpha,\ y=y_A+t\sin\alpha \tag{1.16}$$

其中 α 为从正半 x 轴到直线的单位方向向量 $\boldsymbol{n}$ 的有向角,$t=\overline{AP}$(以 $\boldsymbol{n}$ 方向为正向).

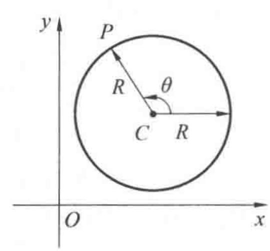

图 1.7

以 C 为圆心,R 为半径的圆的参数(θ)方程

$$x=x_C+R\cos\theta,\ y=y_C+R\sin\theta \tag{1.17}$$

其中 θ 为圆上任一点 P 对 C 之辐角(从正半 x 轴到$\overrightarrow{CP}$的有向角,如图 1.7).

因原点移到 C,x,y 轴正向不变时,$P(x,y)$ 的新坐标为$\overrightarrow{CP}$的坐标(x_P-x_C,y_P-y_C),P 到 C 的距离为 R,故

$$\cos\theta=\frac{x_P-x_C}{R},\ \sin\theta=\frac{y_P-y_C}{R}$$

2.5° 点到直线的射影,点关于直线(点)的对称点

点 M 到直线(1.10)的射影 M'

$$M'(p\cos\alpha+(x_M\sin\alpha-y_M\cos\alpha)\sin\alpha,\ p\sin\alpha+(y_M\cos\alpha-x_M\sin\alpha)\cos\alpha) \tag{1.18}$$

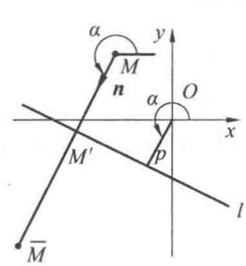

图 1.8

证:如图 1.8,过 M 且与 l 垂直的直线的参数方程为

$$x=x_M+t\cos\alpha,\ y=y_M+t\sin\alpha$$

代入方程(1.10)(求与交点 M'相应的参数值)得

$$(x_M+t\cos\alpha)\cos\alpha+(y_M+t\sin\alpha)\sin\alpha=p$$

$$t=p-x_M\cos\alpha-y_M\sin\alpha$$

代入上述参数方程得交点 M'的坐标如同式(1.18).

点 M 关于点 C 的对称点 $\overline{M}$

$$\overline{M}(2x_C - x_M, 2y_C - 2y_M) \tag{1.19}$$

（由 C 为 $\overline{MM}$ 的中点，据式（1.4）知 $x_C = \frac{1}{2}(x_M + x_{\overline{M}})$，$y_C = \frac{1}{2}(y_M + y_{\overline{M}})$ 可证）.

点 M 关于直线（1.10）的对称点 $\overline{M}$

$$\overline{M}(2p\cos\alpha - x_M\cos 2\alpha - y_M\sin 2\alpha, 2p\sin\alpha - x_M\sin 2\alpha + y_M\cos 2\alpha) \tag{1.20}$$

（设 M 在直线（1.10）上的射影为 M'，因 M 与 $\overline{M}$ 关于点 M' 对称，$\overline{M}(2x_{M'} - x_M, 2y_{M'} - y_M)$，以式（1.18）代入即得式（1.20））.

2.6° 多边形的有向面积

当环路 $A_1—A_2—A_3—A_{n-1}—A_n—A_1$ 为逆（顺）时针方向时（图 1.9），定义多边形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的有向面积 $\overline{S}$ 为正（负）数

$$\overline{S} = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_{A_1} & y_{A_1} \\ x_{A_2} & y_{A_2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{A_2} & y_{A_2} \\ x_{A_3} & y_{A_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{A_3} & y_{A_3} \\ x_{A_4} & y_{A_4} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_{A_{n-1}} & y_{A_{n-1}} \\ x_{A_n} & y_{A_n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{A_n} & y_{A_n} \\ x_{A_1} & y_{A_1} \end{vmatrix}\right) \tag{1.21}$$

证：易见

$$\overline{S} = \overline{S}_{\triangle OA_1A_2} + \overline{S}_{\triangle OA_2A_3} + \overline{S}_{\triangle OA_3A_4} + \cdots + \overline{S}_{\triangle OA_{n-1}A_n} + \overline{S}_{\triangle OA_nA_1}$$

设有向角 $\angle A_1OA_2 = \theta$，A_1 的极坐标为 (ρ_1, θ_1)，A_2 的极坐标为 (ρ_2, θ_2)，易见 $\theta = \theta_2 - \theta_1$（图 1.10）. 无论 θ 为正、负角，易见①

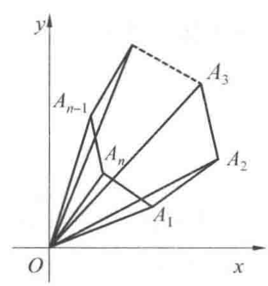

图 1.9

$$\begin{aligned}
\overline{S}_{\triangle OA_1A_2} &= \frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin\theta = \frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin(\theta_2 - \theta_1) \\
&= \frac{1}{2}\rho_1\rho_2(\sin\theta_2\cos\theta_1 - \sin\theta_1\cos\theta_2) \\
&= \frac{1}{2}(\rho_1\cos\theta_1 \cdot \rho_2\sin\theta_2 - \rho_1\sin\theta_1 \cdot \rho_2\cos\theta_2) \\
&= \frac{1}{2}(x_{A_1}y_{A_2} - y_{A_1}x_{A_2})^{②} \\
&= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_{A_1} & y_{A_1} \\ x_{A_2} & y_{A_2} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

---

① 当 $\theta_1 < \theta_2$ 时，$\theta > 0$，$\frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin\theta > 0$，$O—A_1—A_2—O$ 为逆时针方向，$\overline{S}_{\triangle OA_1A_2} > 0$；当 $\theta_1 > \theta_2$ 时，$\theta < 0$，$\frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin\theta < 0$，$O—A_1—A_2—O$ 为顺时针方向，$\overline{S}_{\triangle OA_1A_2} < 0$.

② 见附录Ⅳ公式（1）.

同理可求得 $\overline{S}_{\triangle OA_2A_3}+\overline{S}_{\triangle OA_3A_4}+\cdots+\overline{S}_{\triangle OA_{n-1}A_n}+\overline{S}_{\triangle OA_nA_1}$ 的类似表示式,得证式(1.21).

特例

$$\overline{S}_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \tag{1.22}$$

(按第3列展开,见附录Ⅵ定理5).

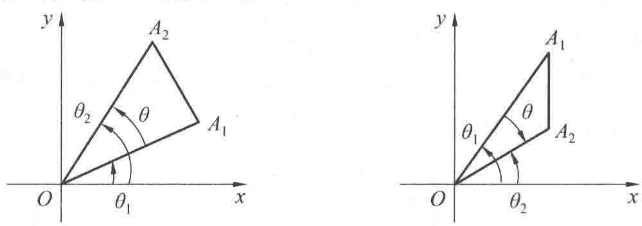

图 1.10

2.7° 三点共直线条件,直线的两点式方程(行列式形式)

三点 A,B,C

$$三点共线\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}=0 \tag{1.23}$$

(三点 A,B,C 共直线,即 $\overline{S}_{\triangle ABC}=0$).

过 A,B 二点的直线 l 的方程

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix}=0 \tag{1.24}$$

(因 l 上任一点 $P(x,y)$ 与 A,B 共线).

2.8° 直线与圆的极坐标方程

在图 1.4 中直线 l 的极坐标(ρ,θ)方程

$$\rho\cos(\alpha-\theta)=p \tag{1.25}$$

在图 1.11 中以 $C(p,\alpha)$ 为圆心,R 为半径的圆的极坐标(ρ,θ)方程

$$\rho^2+p^2=2p\rho\cos(\theta-\alpha)=R^2 \tag{1.26}$$

特别当此圆过原点 O,即 $R=p$ 时(图 1.12),此圆的极坐标方程

$$\rho=2R\cos(\theta-\alpha) \tag{1.27}$$

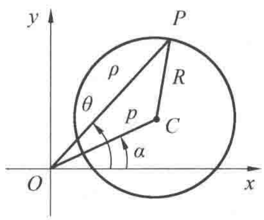

图 1.11

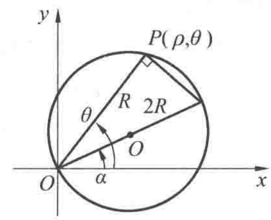

图 1.12

2.9° 圆的切线方程，点对圆的极线方程

圆 $A(x^2+y^2)+2Dx+2Ey+F=0$ 过其上点 P 的切线方程

$$A(x_Px+y_Py)+D(x+x_P)+E(y+y_P)+F=0 \tag{1.28}$$

（在第4章对圆锥曲线一般情况进行证明）.

若 P 在此圆外，过 P 作圆二切线，切点为 T_1,T_2，称直线 T_1T_2 为 P 对此圆的极线，极线方程亦为(1.28).

证：此圆过 $T_i(i=1,2)$ 的切线为

$$A(x_{T_i}x+y_{T_i}y)+D(x+x_{T_i})+E(y+y_{T_i})+F=0$$

两切线过 P，故

$$A(x_Px_{T_i}+y_Py_{T_i})+D(x_P+x_{T_i})+E(y_P+y_{T_i})+F=0$$

即两点 T_1,T_2 适合方程(1.28)，故直线 T_1T_2 的方程为(1.28).

2.10° 三直线共点之充要条件

已知三直线（其中任两条不平行、重叠）

$$A_ix+B_iy+C_i=0 \quad (i=1,2,3)$$

则

$$\text{此三直线共点} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0 \tag{1.29}$$

证：由于与 $i=1,2$ 相应二直线不平行、重叠，即有唯一交点 (x_0,y_0)，即方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y=-C_1 \\ A_2x+B_2y=-C_2 \end{cases}$$

有唯一解 $x=x_0,y=y_0$，由附录Ⅵ的克莱姆公式（定理7）得

$$x_0=\frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}},\ y_0=\frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

(分母不为0)于是有:

此三直线共点⇔点(x_0,y_0)在直线$A_3x+B_3y+C_3=0$上

$$\Leftrightarrow A_3x_0+B_3y_0+C_3=0$$

$$\Leftrightarrow A_3\frac{\begin{vmatrix}-C_1 & B_1\\ -C_2 & B_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}+B_3\frac{\begin{vmatrix}A_1 & -C_1\\ A_2 & -C_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}+C_3=0$$

$$\Leftrightarrow A_3\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}-B_3\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}+C_3\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}=0$$

2.11° 点对圆的幂,二圆的根轴

已知圆O(半径为R),平面上任一点P,无论P在圆O外、内或圆上,过P任作直线与圆O交于A,B(图1.13),据附录Ⅱ定理22,易见$\overline{PA}\cdot\overline{PB}$均为定值.当$P$在圆$O$外(内)时此定值为正(负)数.$P$在圆$O$上时$P,A$重合此定值为0.称此定值为$P$对圆$O$的幂.$P$在圆$O$外时,此幂等于$P$到圆$O$的切线长的平方——$PC^2$.$P$在圆$O$内时,此幂等于$-PC_1^2$(弦$C_1C_2\perp OP$).在任何情况下此幂等于$PO^2-R^2$.

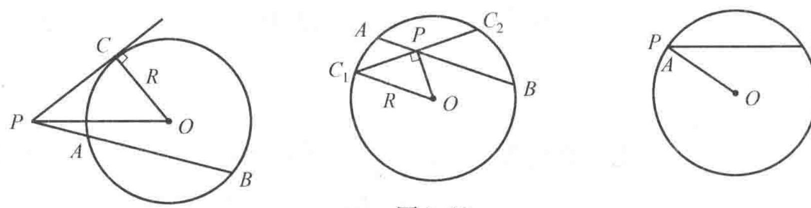

图1.13

设圆O方程为$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$,易见点P对圆O的幂PO^2-R^2为

$$(x_P-x_0)^2+(y_P-y_0)^2-R^2 \tag{1.30}$$

设有二圆$(x-x_i)^2+(y-y_i)^2={R_i}^2(i=1,2)$,对此二圆的幂相等的点的轨迹①,称之为此二圆之根轴,显然根轴之方程为

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+{R_1}^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+{R_2}^2 \tag{1.31}$$

① "轨迹"之意义,见第2章§2.1.