应用概率论教程

（上册）

赵希人　赵正毅　编著

HEUP 哈爾濱工程大學出版社

应用概率论教程

（上册）

赵希人　赵正毅　编著

HEUP 哈爾濱工程大學出版社

内容简介

本书分为概率和统计两部分，主要内容包括：事件与概率，一元随机变量及其分布，n 维随机向量及其分布，随机变量的数字特征，特征函数，极限定理，估计理论，假设检验方法与理论，线性统计推断。书中推理过程详细，并有大量例题供读者学习参考。

本书可作为理工科院校研究生、本科生教材，也可作为科技工作者的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

应用概率论教程. 上册/赵希人，赵正毅编著. —
哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2015.8
ISBN 978-7-5661-1107-4

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①赵… ②赵… Ⅲ. ①概率论-教材
Ⅳ. ①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 179322 号

选题策划 沈红宇
责任编辑 张晓彤 宗盼盼
封面设计 恒润设计

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 44.25
字　　数 1130 千字
版　　次 2015 年 9 月第 1 版
印　　次 2015 年 9 月第 1 次印刷
定　　价 100.00 元
http://www.hrbeupress.com
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前　言

编者编写本书的主要目的是为理工科研究生学习概率论提供一本较全面、较透彻的基础理论及其经典应用的学习参考书。此书特别适用于信息与控制科学及工程学科（以下简称信控学科）所属专业的研究生使用；对于高等院校从事概率论教学的年轻教师，本书也是很好的教学参考资料；对于从事信控科学和技术的广大科技工作者来说，如何应用概率论解决实际工程的技术问题，本书在概念和方法上都具有普遍的参考意义。

自从伯努利（J. Bernoulli，1654—1705）第一次发表大数定理以来，概率论的发展足足有三百多年的历史，在这三个世纪里，随着概率论不断的发展和完善，多门学科在基础理论上得到了不断的发展和完善。特别是对于信控学科来说，概率论的发展和信控学科的发展几乎是密不可分的，在信控学科内的各个领域，概率论提供了坚实的理论基础，带动并促进了信控学科向更高水平发展。概率论发展到今天，可以说已经是一门极富应用性和极具吸引力的理论数学和应用数学。因此，在国内外几乎所有的大学，概率论这门课程普遍得到高度重视，在研究生的培养计划里，很多学校都把概率论设为必修课，甚至设为学位课（学位课比必修课的重要性更高）。于是新教材不断涌现，原来的优秀教材也不断更新，不断地补充新内容和新方法，例如，享受盛誉的美国的帕普里斯（A. Papoulis）的教材《概率、随机变量与随机过程》已经更新四版，从第一版的 51 万字（1983）到第四版已达到 110 万字（2004），再比如美国鲁斯（S. M. Ross）的概率论教材《概率论基础教程》已经更新了七版，这些情况举不胜举。在中国，近四十年来，概率论教材的建设出现了空前的发展，不仅有很多统编教材，而且各高等院校为了学科的建设和专业的需求，也编写出很多有特色的概率论教材。由此可见，概率论教材的不断建设和不断更新是培养高质量研究生的一个非常重要的环节。

编者编写本教材是基于以下几点考虑的。首先，理工科研究生的培养计划里概率论这门课的教学课时是有限的，编者希望学生能在较少的教学课时内学到更多的内容，为此，编者编写的教材比较详细，很多内容研究生自学也能读懂，这样一来，教师按教学课时从中选取一些章节在课堂上讲授即可。其次，考虑到理工科研究生的数学基础一般是比较扎实的，具备实变函数和矩阵的基础理论，因此，本书的内容注重推导和论证，具有较强的理论性，这样才能满足理工科研究生的培养目标。再次，考虑到概率论在世界范围内的最新发展，有些新概念及处理方法在国内的概率论教材中很少见到，这些内容，编者给予了重视并编写到教材中。最后，研究生还应学习概率论重要的经典性的应用，例如，维纳（N. Wiener）滤波理论、卡尔曼（R. E. Kalman）滤波理论、奥斯特姆（K. J. Astrom）计算方法，这些应用性理论和方法，对理工科研究生进一步深入研究概率论的应用具有重要的指导意义。

《应用概率论教程》分为上、下两册。本书为上册，包括两编共 9 章内容（详见本书目

录),第1编为概率部分,第2编为统计部分。具体说,上册包含大量的定理、性质及推论,均给出详细证明,列举了多个具有一定难度的例题并给出详细解答,每章均配有相应的习题供读者练习,并给出答案。下册分为两编,主要包括过程部分和应用部分。

本书内容曾为哈尔滨工程大学研究生讲授多年,经不断完善,编写成此书。新加坡国立大学对此书的编写给予了很大的帮助和支持,哈尔滨工程大学研究生院和自动化学院一直关心与支持本书的编写。特别是,在教学立项和教材建设方面,杨曜根教授和夏桂华校长给予了鼎力支持和重要指导。在本书编写的过程中,王显峰博士,孙宏放博士,沈艳教授,彭秀艳教授给予了很大的帮助;本书的习题由谢美萍博士和周淑秋博士完成编写并一一作了演算后给出答案;哈尔滨工程大学出版社为此书的出版给予了巨大的关注和支持,在此一并表示感谢。

最后,对于编者曾参考的所有文献的作者(排名不分先后)均表示崇高的敬意和诚挚的感谢。

由于编者的水平和能力有限,书中难免有不当甚至错误之处,恳请读者批评指正。

赵希人　于哈尔滨工程大学
赵正毅　于新加坡国立大学
2015年4月

符号及说明

ω——基本事件或称样本点.

Ω——基本事件空间或称样本空间,它是全体基本事件的集合,即 $\Omega=\{\omega\}$.

$A,B,C,D,\cdots$——事件,它们是 Ω 中某些基本事件的集合.

ϕ——空集.

$\mathcal{F}$——Ω 中全体事件的集合,它是 Ω 中全体 Borel 集所构成的 σ-代数,其中 ϕ 称为不可能事件,Ω 称为必然事件.

$P(A)$——事件 A 的概率,它是 $\mathcal{F}$ 上的概率测度.

$(\Omega,\mathcal{F})$——可测空间.

$(\Omega,\mathcal{F},P)$——概率空间.

$\mathbf{R}^n$——n 维实数空间($\mathbf{R}^1$ 为 1 维实数空间).

$\mathbf{C}^n$——n 维复数空间($\mathbf{C}^1$ 为 1 维复数空间).

$\mathcal{B}_1$——1 维 Borel 体,它是 $\mathbf{R}^1$ 上全体 Borel 集所构成的集类.

$\mathcal{B}_n$——n 维 Borel 体,它是 $\mathbf{R}^n$ 上全体 Borel 集所构成的集类.

$\equiv$——恒等于,例如 $A\equiv B$,表示 A 恒等于 B.

$\triangleq$——定义为,例如 $A\triangleq f(x)$ 表示 A 定义为 $f(x)$.

$\forall$——对任意,例如 $\forall x\in\mathbf{R}^1$ 表示对任意 $x\in\mathbf{R}^1$.

$\exists$——存在,例如 $\exists N$ 表示存在 N.

$\Leftrightarrow$——等价,例如 $A\Leftrightarrow B$ 表示由 A 可推出 B 且由 B 可推出 A.

$\in$——属于,例如 $a\in A$ 表示 a 属于 A.

$\subset$——包含于,例如 $A\subset B$ 表示 A 包含于 B,即 B 包含 A.

$\cap$——交,例如 $A\cap B$ 表示 A 与 B 的交集.

$\cup$——并,例如 $A\cup B$ 表示 A 与 B 的并集.

$\backslash$——差,例如 $A\backslash B=A\bar{B}=A-AB$ 表示 A 与 B 的差集.

$\Rightarrow$——必有,例如 $A\Rightarrow B$ 表示由 A 必有 B(必要性).

$\sup X$——集合 X 的上确界,称 $M=\sup X$,如果 $\forall x\in X$ 有 $x\leqslant M$; $\forall M'<M,\exists x_{M'}\in X: x_{M'}>M'$.

$\inf X$——集合 X 的下确界,称 $m=\inf X$,如果对任意 $m'>m$,m' 不再是集合 X 的下界.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sup A_n$——上极限事件,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup A_n=\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=m}^{\infty}A_n$,表示无穷多个 A_n 发生的事件,记作 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\triangleq\lim\limits_{n\to\infty}\sup A_n$,或记作 $\{A_n,i.\ o.\}\triangleq\lim\limits_{n\to\infty}\sup A_n$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\inf A_n$——下极限事件,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf A_n=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=m}^{\infty}A_n$,表示几乎一切 A_n 发生的事件,记作 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\triangleq\lim\limits_{n\to\infty}\inf A_n$.

$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$——极限事件,即 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n\triangleq\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sup a_n$——数列 $\{a_n,n\geqslant1\}$ 的上极限,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup a_n=\inf\limits_{m\geqslant1}\sup\limits_{n\geqslant m}a_n$,记作 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n\triangleq\lim\limits_{n\to\infty}\sup a_n$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\inf a_n$——数列$\{a_n,n\geqslant 1\}$的下极限,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf a_n=\sup\limits_{m\geqslant 1}\inf\limits_{n\geqslant m}a_n$,记作 $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n \triangleq \lim\limits_{n\to\infty}\inf a_n$.

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$——数列$\{a_n,n\geqslant 1\}$的极限,记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n \triangleq \overline{\lim}_{n\to\infty}a_n=\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n$.

$P(A\mid B)$——在事件 B 成立条件下事件 A 的条件概率.

$E(A\mid B)$——在事件 B 成立条件下事件 A 的条件期望.

ln——以 e 为底的对数,或称自然对数.

lg——以 10 为底的对数,或称常用对数.

log——以任意数为底的对数.

e^x 或 $\exp\{x\}$——以 e 为底的指数函数.

$\binom{n}{m}=C_n^m=\dfrac{n!}{m!\ (n-m)!}$.

≐——约等于.

目　　录

第1编　概率部分

第1编　概率部分

第1章

事件与概率

1.1 样本空间与事件

1.1.1 样本空间

定义1.1.1 随机试验 设E为某一试验,如果事先不能准确地预言它的结果,而且在相同条件下可以重复进行,就称为随机试验.

定义1.1.2 样本空间 设E为随机试验,以ω表示它的一个可能结果,则称ω为基本事件或样本点,称所有基本事件的集合$\Omega = \{\omega\}$为基本事件空间或样本空间.

例1.1.1 E:掷硬币试验,ω_1代表正面,ω_2代表反面,则$\Omega = \{\omega_1,\omega_2\}$,显然基本事件有2个且是离散的.

例1.1.2 E:掷骰子,$\omega_1 = 1,\omega_2 = 2,\cdots,\omega_6 = 6$,则$\Omega = \{\omega_i, i = 1,2,\cdots,6\}$,显然基本事件有6个且是离散的.

例1.1.3 E:观察某路口在上午7点至8点内汽车通过的辆数,ω_i代表通过i辆汽车,则$\Omega = \{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots\}$,若简记$\omega_i$为$i$,则$\Omega = \{0,1,2,\cdots\}$,显然这个样本空间包含可数无穷多个基本事件但还是离散的.

例1.1.4 E:测试某个电子仪器输出噪声,令ω_V代表噪声电压为V,则$\Omega = \{\omega_V, -12\text{ V} \leqslant V \leqslant +12\text{ V}\}$,其中$\pm 12$ V为电源电压,有时可记为$\Omega = \{\omega_V, -\infty < V < +\infty\}$,显然基本事件是连续的且为不可数无穷多的.

1.1.2 事件

定义1.1.3 事件 称样本空间中某些基本事件的集合为事件,通常用大写英文字母$A,B,C,D,\cdots$表示.

例1.1.5 E:掷骰子,$\Omega = \{1,2,\cdots,6\}$,若用$A$表示不大于3的事件,则$A = \{1,2,3\}$,显见它是由3个基本事件所组成的.

事件A发生$\Leftrightarrow A$中某个基本事件发生,称Ω为必然事件,称空集ϕ为不可能事件.

1.1.3 事件的运算

1. 若 $\omega \in A$,则必有 $\omega \in B$,则称事件 B 包含事件 A,记 $A \subset B$,显然 $A \subset \Omega$.

2. 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称 A 与 B 相等,记为 $A = B$.

3. 如图 1.1.1(a) 所示,由所有不包含在 A 中的基本事件所组成的事件称为 A 的逆事件,记为 $\bar{A}$,显然 $\bar{A} = \Omega - A$.

4. 如图 1.1.1(b) 所示,用 $A \cap B$ 或 AB 表示同时属于 A 及 B 的基本事件的集合,称之为 A 与 B 的交事件.

5. 如图 1.1.1(c) 所示,用 $A \cup B$ 表示至少属于 A 或 B 中一个的基本事件的集合,称之为 A 与 B 的并事件.

6. 若 $AB = \phi$,则称 A 与 B 互不相容. 若 A 与 B 互不相容,则称并事件为和事件,即 $A \cup B = A + B$,显然 $A\bar{A} = \phi, A + \bar{A} = \Omega$.

7. 如图1.1.1(d) 所示,用 $A - B$ 表示属于 A 但不属于 B 的基本事件的集合,显然 $A - B = A\bar{B} = A - AB$.

8. 如图 1.1.1(e) 所示,对于 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,用 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示至少发生 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中一个的事件. 如图 1.1.1(f) 所示,用 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生的事件.

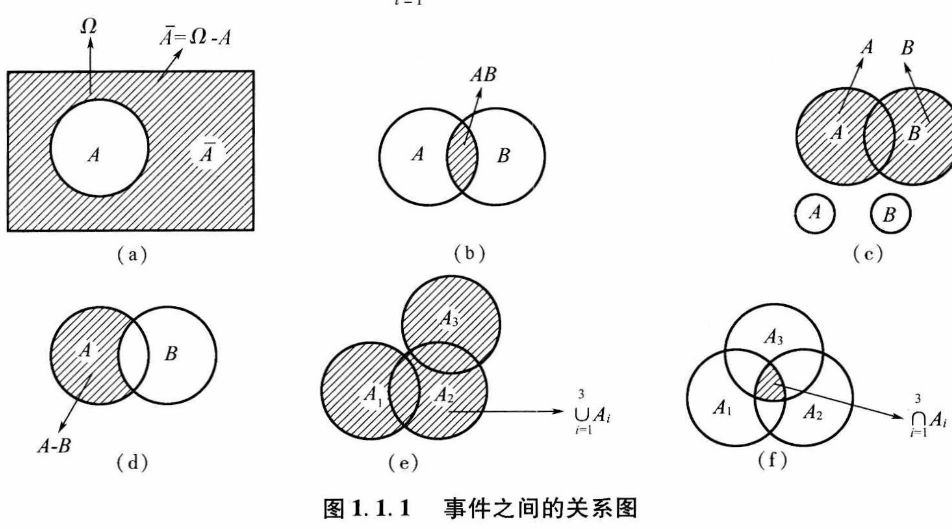

图 1.1.1 事件之间的关系图

9. 如果两事件 A, B 满足 $A \cup B = \Omega$ 且 $A \cap B = \phi$,则称 A 与 B 互逆,或称 A 与 B 为对立事件.

对于可列无穷多事件 $A_1, A_2, \cdots$,称 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \triangleq \lim\limits_{n\to\infty} \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为可列并事件,$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \triangleq \lim\limits_{n\to\infty} \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为可列交事件.

事件的运算应满足:

(1) 交换率 $A \cup B = B \cup A, AB = BA$;

(2) 结合率 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (AB)C = A(BC)$;

(3) 分配率 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), (A \cup B)C = AC \cup BC$.

定理 1.1.1 德摩根定理(De Morgan) 可列并事件的逆事件为逆事件的可列交事

件,可列交事件的逆事件为逆事件的可列并事件,即

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty}\bar{A}_i, \tag{1.1.1}$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty}\bar{A}_i. \tag{1.1.2}$$

证明:

只证(1.1.1)式,设 $\omega \in \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}$,

$\Rightarrow \omega \bar{\in} A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$

$\Rightarrow \omega$ 不属于 A_1 或 A_2 或 $A_3 \cdots$ 中任一个

$\Rightarrow \omega \in \bar{A}_1$ 且 $\omega \in \bar{A}_2$ 且 $\omega \in \bar{A}_3 \cdots$

$\Rightarrow \omega \in \bigcap_{i=1}^{\infty}\bar{A}_i$.

这说明 $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i} \subset \bigcap_{i=1}^{\infty}\bar{A}_i$.

反之,设 $\omega \in \bigcap_{i=1}^{\infty}\bar{A}_i$,

$\Rightarrow \omega \in \bar{A}_1$ 且 $\omega \in \bar{A}_2$ 且 $\omega \in \bar{A}_3 \cdots$

$\Rightarrow \omega$ 不属于 A_1 或 A_2 或 $A_3 \cdots$ 中任一个

$\Rightarrow \omega \bar{\in} \bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$

$\Rightarrow \omega \in \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}$.

这说明 $\bigcap_{i=1}^{\infty}\bar{A}_i \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}$.

因此 $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty}\bar{A}_i$.

至此,(1.1.1)式得证. 同样,用类似的方法可证(1.1.2)式.

例 1.1.6　设 A,B,C 为事件,试证 $(A \cup B)C = AC \cup BC$.

证明:

设 $\omega \in (A \cup B)C$,

$\Rightarrow \omega \in A \cup B$ 且 $\omega \in C$

$\Rightarrow (\omega \in A$ 或 $\omega \in B)$ 且 $\omega \in C$

$\Rightarrow \omega \in A$ 且 $\omega \in C$ 或 $\omega \in B$ 且 $\omega \in C$

$\Rightarrow \omega \in AC$ 或 $\omega \in BC$

$\Rightarrow \omega \in AC \cup BC$.

这说明 $(A \cup B)C \subset AC \cup BC$.

反之,设 $\omega \in AC \cup BC$,

$\Rightarrow \omega \in AC$ 或 $\omega \in BC$

$\Rightarrow \omega \in A$ 且 $\omega \in C$ 或 $\omega \in B$ 且 $\omega \in C$

$\Rightarrow (\omega \in A$ 或 $\omega \in B)$ 且 $\omega \in C$

$\Rightarrow \omega \in (A \cup B)C$.

这说明 $AC \cup BC \subset (A \cup B)C$.

因此$(A\cup B)C=AC\cup BC$,

证毕.

例 1.1.7 设A,B为事件,试证$A-B=A\bar{B}$.

证明:

设$\omega\in A-B$,

$\Rightarrow\omega\in A$且$\omega\bar{\in} B$

$\Rightarrow\omega\in A$且$\omega\in\bar{B}$

$\Rightarrow\omega\in A\bar{B}$.

这说明$A-B\subset A\bar{B}$.

反之,设$\omega\in A\bar{B}$,

$\Rightarrow\omega\in A$且$\omega\in\bar{B}$

$\Rightarrow\omega\in A$且$\omega\bar{\in} B$

$\Rightarrow\omega\in A-B$.

这说明$A\bar{B}\subset A-B$.

因此$A-B=A\bar{B}$,

证毕.

例 1.1.8 试证:若两事件A,B互逆,则A,B互不相容,反之不真.

证明:

由于A与B互逆,故有$A\cup B=\Omega$且$A\cap B=\phi$,所以A,B互不相容,现举一反例说明反之不真.

由例 1.1.2 掷骰子试验可知$\Omega=\{\omega_i,i=1,2,\cdots,6\}$,令事件$A=\{$出现点数$\leqslant 2\}$,事件$B=\{$出现点数$\geqslant 4\}$,显然$A\cap B=\phi$,这说明$A$与$B$互不相容,但

$$\begin{aligned}A\cup B&=\{\text{出现点数}\leqslant 2\text{ 或 }\geqslant 4\}\\&=\{\text{出现点数为 }1,2,4,5,6\}\neq\Omega,\end{aligned}$$

所以A与B不互逆.

例 1.1.9 试把$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$表示成$n$个两两互不相容事件的和.

解:

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{n}A_i&=A_1+(A_2-A_1)+(A_3-A_1-A_2)+(A_n-A_1-A_2-\cdots-A_{n-1})\\&=A_1+A_2\bar{A}_1+A_3\bar{A}_1\bar{A}_2+\cdots+A_n\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{n-1}.\end{aligned}$$

1.1.4 古典概率

定义 1.1.4 概率(古典概率) 设E为随机试验,A为某一事件,在同样条件下把E独立地重复N次,其中事件A出现了$N(A)$次,如果$\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{N(A)}{N}$存在,则定义

$$P(A)\triangleq\lim_{N\to\infty}\frac{N(A)}{N}\tag{1.1.3}$$

为事件A出现的概率(古典概率).

由定义不难看出,事件A的概率$P(A)$表示了事件A出现的可能性的大小.

定理 1.1.2 对任意随机试验$E,P(A)$有如下性质:

(1) 对任意事件 A,有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

(2) $P(\Omega) = 1, P(\phi) = 0$;

(3) 对互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_iA_j = \phi, i \neq j$,有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \tag{1.1.4}$$

证明:

(1) 由古典概率定义知 $0 \leqslant N(A) \leqslant N$,故有 $0 \leqslant \dfrac{N(A)}{N} \leqslant 1$,即 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

(2) 因为 Ω 为必然事件,$N(\Omega) = N$,故 $P(\Omega) = \dfrac{N(\Omega)}{N} = 1$,$\phi$ 为不可能事件,$N(\phi) = 0$,故 $P(\phi) = 0$.

(3) 因为 $A_1, A_2, \cdots$ 互不相容,则

$$N\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} N(A_i),$$

所以 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \dfrac{N\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)}{N} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\infty} N(A_i)}{N} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$,

证毕.

概率运算有如下基本公式:

1. 一般加法公式

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1A_2\cdots A_n). \tag{1.1.5}$$

特别地,当 $n = 2$ 时,有

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2). \tag{1.1.6}$$

当 $n = 3$ 时,有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3). \tag{1.1.7}$$

2. 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互相独立,则

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= 1 - P\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\right) \\ &= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right) \quad (\text{利用(1.1.1)式}) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\bar{A}_i). \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

(1.1.8) 式在实际计算中有广泛的应用. 例如,有 n 个独立试验,每个试验对应一个事件 $A_i, i = 1, 2, \cdots, n$,且 $P(A_i) = p_i, i = 1, 2, \cdots, n$,于是在 n 个独立试验中,至少有一个事件 A_i 发生的概率 P 为

$$\begin{aligned} P &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \\ &= 1 - P\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\right) \end{aligned}$$