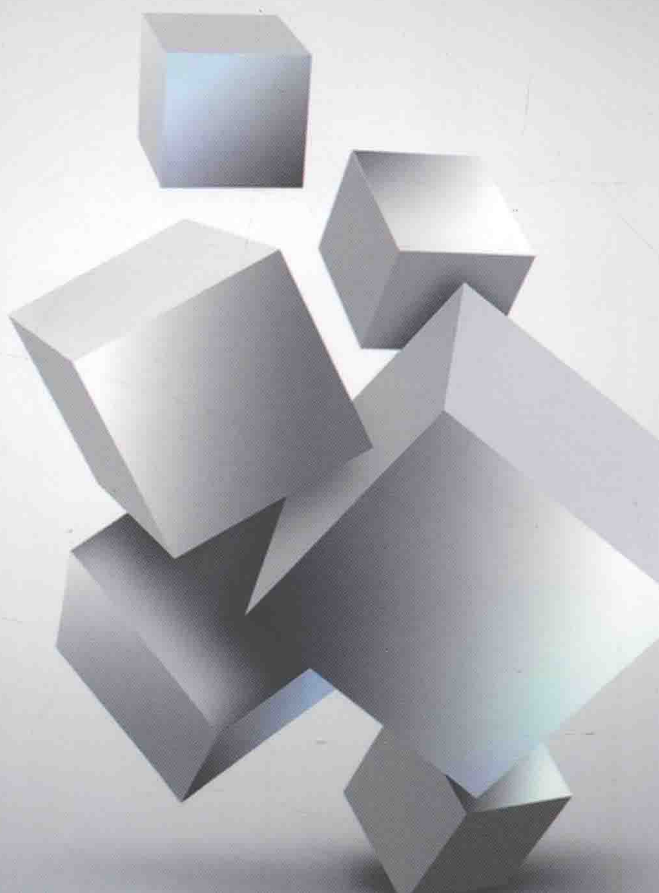
GAODENGSHUXUEXITIKEJIAOCHENG

高等数学

习题课教程（下册）

王顺凤　吴亚娟　孟祥瑞　杨阳　孙艾明・编



东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

高等数学习题课教程(下册)

王顺凤　吴亚娟　孟祥瑞
杨　阳　孙艾明　编

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS
·南京·

内容提要

本书根据编者多年的教学实践与教改经验，结合教育部高教司颁布的本科非数学专业理工类、经济管理类《高等数学课程教学基本要求》编写而成.

全书分上、下两册出版，包括与一元函数的极限与连续、一元微积分及其应用、向量代数与解析几何、多元微积分、常微分方程、无穷级数等内容相配套的内容提要与归纳、典型例题分析、基础练习、强化训练、同步测试五个部分.

本书是下册部分，内容包括与向量代数与解析几何、多元微分学、重积分、曲线与曲面积分、常微分方程、无穷级数等内容相配套的内容提要与归纳、典型例题分析、基础练习、强化训练、同步测试五个部分.

为有利于学生自主学习，也考虑到便于教师的因材施教，书后还附有基础练习、强化训练、同步测试的参考答案等.

本书突出基本概念、基本公式与理论知识的应用，对于典型例题本书都按类给出重要题型的分析与小结，帮助学生自主学习时能把握解题方向，从而掌握解题的方法与技巧. 全书结构严谨、逻辑清晰、说理浅显、通俗易懂. 例题较多且有一定的代表性与梯度，基础练习、同步测试便于学生对基础知识与基本技能的自我练习与测试；强化训练则便于自我要求较高的学生进一步提高其解题能力，以满足优秀学生的学习需求.

本书可供高等院校理工、经管类专业高等数学课程的习题课的教材选择使用，也可作为学生考研复习及工程技术人员学习的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题课教程. 下册/王顺凤等编. —南京：东南大学出版社，2016.2

ISBN 978-7-5641-6361-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 029651 号

高等数学习题课教程(下册)

出版发行	东南大学出版社
出 版 人	江建中
社　　址	南京市四牌楼 2 号
邮　　编	210096
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	兴化印刷有限责任公司
开　　本	700 mm×1000 mm 1/16
印　　张	10
字　　数	196 千字
版　　次	2016 年 2 月第 1 版
印　　次	2016 年 2 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5641-6361-7
定　　价	24.00 元

(本社图书若有印装质量问题，请直接与营销部联系。电话：025-83791830)

前　　言

本教材是按照教育部提出的高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划的精神，参照教育部制定的全国硕士研究生入学考试理、工、经管类数学考试大纲和南京信息工程大学理工、经管类高等数学教学大纲，以及 2004 年教育部高教司颁布的本科非数学专业理工类、经济管理类《高等数学课程教学基本要求》，并汲取近年来南京信息工程大学高等数学课程教学改革实践的经验，借鉴国内外同类院校数学教学改革的成功经验编写而成. 本书力求具有以下特点：

(1) 与现行使用的《高等数学》教材内容、要求相一致. 既强调内容的完整性、实践性与应用性，又使学生对微积分及其应用有更深入的理解.

(2) 对高等数学的有关内容重新做适当的整合与提炼.

(3) 归纳常见的题型与解题技巧，提高学生的解题能力.

(4) 注重增强学生应用数学知识解决实际问题的能力.

(5) 适当增加考研技能的训练. 增强基础内容与综合运用之间的衔接性.

(6) 可以作为高等数学习题课教材选择使用.

(7) 对例题作了精心选择，教材中例题丰富，既具有较好的代表性又有一定的梯度. 适合各类读者的要求.

(8) 可根据各类专业的需要选用，本书兼顾了理工、经管类各专业的教学要求，在使用本书时，参照各专业对数学教学的基本要求进行取舍.

本书由南京信息工程大学王顺凤、吴亚娟、孟祥瑞、杨阳、孙艾明等老师编写，由王顺凤老师统稿，由南京信息工程大学杨阳等老师校对，全书的所有编写人员集体认真地讨论了各章的书稿，刘红爱、咸亚丽、顾文亚、左相等许多老师都提出了宝贵的修改意见，全书的框架、定稿由王顺凤承担.

南京信息工程大学硕士生导师徐晶老师仔细审阅了全部书稿，提出了宝贵的修改意见，全体编写人员向徐晶老师表示衷心的感谢.

由于我们编写人员的水平所限，因此书中必有不少缺点和错误，敬请各位专家、同行和广大读者批评指正.

编者

2015 年 11 月

目　　录

7　向量代数与空间解析几何

7.1　内容提要与归纳

7.1.1　向量代数

1）向量的有关概念

（1）向量的定义

既有大小又有方向的量称为向量或矢量，记作 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，其中 A 是起点，B 是终点.

（2）向量的模与方向角

向量的大小称为向量的模，记作 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$.

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 分别与三条坐标轴正向的夹角 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

（3）几个特殊的向量

① 单位向量：模为 1 的向量称为单位向量，和 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量用 $\boldsymbol{a}^0$ 表示，则 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

② 负向量：与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相等、方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$.

③ 零向量：模为零的向量称为零向量（方向任意确定），记作$\boldsymbol{0}$.

2）向量在轴上的投影

（1）向量在轴上的投影的定义

设向量$\overrightarrow{AB}$的起点 A 与终点 B 在轴$\vec{l}$ 上的投影分别为 A' 及 B'，则称轴 $\vec{l}$ 上有向线段$\overrightarrow{A'B'}$的值 $A'B'$ 为向量$\overrightarrow{AB}$在轴 $\vec{l}$ 上的投影，记作 $\mathrm{Prj}_l\overrightarrow{AB}$ 或 $(\overrightarrow{AB})_l$.

（2）向量投影的基本公式及性质

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}$$

$$\mathrm{Prj}(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mathrm{Prj}\boldsymbol{a}+\mu\mathrm{Prj}\boldsymbol{b}$$

3）向量的线性运算

（1）向量的加减法

向量加法遵守平行四边形法则(如图 7－1 所示)和三角形法则(如图 7－2 所示).

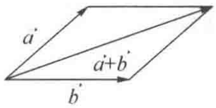


图 7－1

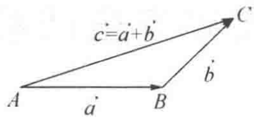


图 7－2

(2) 向量的加法满足的运算规律

① 交换律:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

② 结合律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

(3) 数乘向量

设 λ 为一实数,则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为一向量,其大小 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$,其方向满足:当 $\lambda>0$ 时,与 $\boldsymbol{a}$ 同向;当 $\lambda<0$ 时,与 $\boldsymbol{a}$ 反向;当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

(4) 数乘向量满足的运算规律

① 结合律:$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

② 分配律:$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$,$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

4) 向量的坐标表示

(1) 向量的坐标表达式

设 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为与 x,y,z 轴正向方向一致的基本单位向量,$A(x_1,y_1,z_1)$ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点,$B(x_2,y_2,z_2)$ 是 $\boldsymbol{a}$ 的终点,则向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表达式为

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)=(a_x,a_y,a_z)=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

其模为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

其方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}$$

且有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

(2) 向量的线性运算的坐标公式

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$,则有

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=[(a_1\pm b_1),(a_2\pm b_2),(a_3\pm b_3)]$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$$

5) 数量积运算及其应用

(1) 数量积的定义

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$$

(2) 数量积的坐标公式

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

(3) 数量积满足的运算规律

① 交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

② 分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

③ 结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，$\lambda$ 为实数.

(4) 数量积的应用

① $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.

② $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$.

③ 两向量的夹角公式：

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

6) 向量积运算及其应用

(1) 向量积的定义

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积是一个向量，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，它的模和方向分别规定如下：

① $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模：$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

② $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向：既垂直于 $\boldsymbol{a}$ 又垂直于 $\boldsymbol{b}$，即垂直于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所在的平面，其指向服从按顺序 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的右手定则.

(2) 向量积(叉积) 的坐标计算公式

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$$

(3) 向量积满足的运算规律

① 反交换律：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

② 分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

③ 结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$，$\lambda$ 为实数.

(4) 向量积的应用

① 一个同时垂直于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所在平面的向量：$\lambda\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\lambda\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$.

② $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \exists \lambda$,使得 $\boldsymbol{a}=\lambda \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$.

③ 以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为相邻两边的平行四边形的面积:

$$S_{\square}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \text{的模}$$

④ 不共线的空间三点 A,B,C 构成的三角形面积为 $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$.

7) 混合积运算及其应用

(1) 混合积的定义

混合积是一个数量,其值为:$[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$.

(2) 混合积的坐标计算公式

设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}, \boldsymbol{c}=c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k}$,则

$$[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(3) 混合积的应用

① 三个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$.

② 以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为相邻棱的平行六面体的体积为 $V=|(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}|=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ 的绝对值.

7.1.2 空间解析几何

1) 空间曲面及其方程

(1) 曲面方程

若曲面 Σ 上每一点的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$,且满足方程 $F(x,y,z)=0$ 的解对应的点都在曲面 Σ 上,则称方程 $F(x,y,z)=0$ 为曲面 Σ 的方程,称曲面 Σ 为方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形.

(2) 球面方程

以点 (a,b,c) 为球心,半径为 R 的球面的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

(3) 旋转曲面方程

平面曲线 C 绕与其在同一平面上的直线 L 旋转一周所形成的曲面称为旋转曲面，曲线 C 称为旋转曲面的准线，直线 L 称为旋转曲面的轴，曲线 C 在旋转过程中的每一条动曲线都称为旋转曲面的母线.

如 xOy 面上的曲线 $f(x,y)=0$ 分别绕 x 轴、y 轴旋转一周所形成的旋转曲面的方程分别为 $f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$ 与 $f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$. 同理可得其他坐标面上的曲线绕其坐标面上的坐标轴旋转一周所形成的旋转曲面的方程.

(4) 柱面方程

直线 L 沿定曲线 C 按某一固定方向平行移动所形成的曲面称为柱面，定曲线 C 称为柱面的准线，动直线 L 称为柱面的母线.

① 以 xOy 上的曲线 $f(x,y)=0$ 为准线，其母线平行于 z 轴的柱面方程为

$$f(x,y)=0$$

② 以 zOx 上的曲线 $f(x,z)=0$ 为准线，其母线平行于 y 轴的柱面方程为

$$f(x,z)=0$$

③ 以 yOz 上的曲线 $f(y,z)=0$ 为准线，其母线平行于 x 轴的柱面方程为

$$f(y,z)=0$$

(5) 二次曲面方程

在空间直角坐标系中，称二次方程对应的图形为二次曲面.

常见的二次曲面方程有：

① 球面方程 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$.

② 椭球面方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

③ 锥面方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$.

④ 旋转曲面方程 $F(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$ 或 $F(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$ 或 $F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.

⑤ 椭圆抛物面方程 $kz+m=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$.

⑥ 单叶双曲面方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

⑦ 双叶双曲面方程 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1$.

2) 空间曲线及其方程

(1) 空间曲线的一般式方程

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

(2) 空间曲线的参数式方程

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \quad (t\text{ 为参数}) \\ z=z(t) \end{cases}$$

(3) 空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线 C 的方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$.

① 将空间曲线 C 的方程组中消去 z 得到的曲面方程 $H(x,y)=0$ 即为母线平行于 z 轴的柱面,该柱面 $H(x,y)=0$ 为曲线 C 关于 xOy 坐标面的投影柱面.

方程组 $\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ 表示的曲线就是曲线 C 在 xOy 坐标面上的投影曲线.

② 将空间曲线 C 的方程组中消去 x 得到的曲面方程 $G(y,z)=0$ 即为曲线 C 关于 yOz 坐标面的投影柱面.

方程组 $\begin{cases} G(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 表示的曲线就是曲线 C 在 yOz 坐标面上的投影曲线.

③ 将空间曲线 C 的方程组中消去 y 得到的曲面方程 $R(x,z)=0$ 即为曲线 C 关于 xOz 坐标面的投影柱面.

方程组 $\begin{cases} R(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$ 表示的曲线就是曲线 C 在 xOz 坐标面上的投影曲线.

3) 平面方程

(1) 平面的点法式方程

设 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为平面的法向量,$P(x_0,y_0,z_0)$ 是平面上的一定点,则平面的点法式方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

(2) 平面的一般式方程

设平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$,则平面的一般式方程为

$$Ax+By+Cz+D=0$$

(3) 平面的截距式方程

设 a,b,c 分别为平面在 x 轴,y 轴,z 轴上的截距,当 $abc\neq 0$ 时则平面的截距式方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

4）直线方程

（1）空间直线的一般式方程

设过直线的两个平面为 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 与 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，则该直线的一般式方程为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

（2）空间直线的对称式（点向式或标准式）方程

设直线上的一定点为 $P(x_0,y_0,z_0)$，方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，则空间直线的对称式（点向式或标准式）方程为

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

（3）空间直线的参数式方程

$$\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}\quad(t\text{ 为参数})$$

5）平面与直线的位置关系

（1）两个平面之间的位置关系

设两个平面 Π_1 与 Π_2 的方程分别为

$$\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$
$$\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

则其法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$，且有如下结论：

① $\Pi_1 \parallel \Pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 \parallel \boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$.

② Π_1 与 Π_2 重合 $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$.

③ Π_1 与 Π_2 相交：设平面 Π_1 与 Π_2 的夹角为 θ，则

$$\cos\theta=|\cos(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})|=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\quad\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

（2）两条直线之间的位置关系

设直线 L_1 与 L_2 的方程分别为

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

$$L_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

则其方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$,$\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$,且有如下结论:

① $L_1 /\!/ L_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1 /\!/ \boldsymbol{s}_2 \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.

② $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1 \perp \boldsymbol{s}_2 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

③ L_1 与 L_2 交叉:设直线 L_1 与 L_2 的夹角为 θ,则

$$\cos\theta=|\cos(\widehat{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2})|=\frac{|\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

(3) 直线与平面的位置关系

设直线 L 与平面 Π 的方程分别为

$$L:\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

$$\Pi:Ax+By+Cz+D=0$$

则 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$,平面 Π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$,且有如下结论:

① $L /\!/ \Pi \Leftrightarrow \boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n} \Leftrightarrow mA+nB+pC=0$.

② $L\perp\Pi \Leftrightarrow \boldsymbol{s} /\!/ \boldsymbol{n} \Leftrightarrow \dfrac{m}{A}=\dfrac{n}{B}=\dfrac{p}{C}$.

③ 直线 L 与平面 Π 相交,则直线 L 与它在平面上的投影线间的夹角 $\varphi\left(0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$称为直线与平面的夹角.有

$$\sin\varphi=|\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}})|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{s}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

6) 距离公式

(1) 点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 到直线 $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ 的距离

$$d=\frac{|\boldsymbol{s}\times\overrightarrow{P_1P_0}|}{|\boldsymbol{s}|}=\frac{\left|\begin{matrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ l & m & n\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\end{matrix}\right|\text{的模}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

(2) 点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(3) 两直线间的距离

设两直线 L_1,L_2 为异面直线,其方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1$、$\boldsymbol{s}_2$,A,B 分别为 L_1,L_2 上两点,则 L_1 与 L_2 之间的距离为

$$d = \frac{|(\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2) \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2|}$$

7) 平面束方程

过平面 $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ 与平面 $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ 的交线的平面束方程为

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

其中不包含第一张平面的平面束方程为

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

其中不包含第二张平面的平面束方程为

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

7.2　典型例题分析

例 1　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为单位向量，且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

解　由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，得

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{c}|^2 + 2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$

则由题设可知

$$0 = 3 + 2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$

解得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = -\frac{3}{2}$$

小结：已知向量的和求向量的点积或模的问题时常利用点积的性质：$\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$.

例 2　设 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 垂直，$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 垂直，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角.

解　由于 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$，所以 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0$，即

$$7|\boldsymbol{a}|^2 - 15|\boldsymbol{b}|^2 + 16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0 \tag{1}$$

又由于 $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，所以 $(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$，即

$$7|\boldsymbol{a}|^2 + 8|\boldsymbol{b}|^2 - 30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0 \tag{2}$$

由(1)、(2) 式解得：$|\boldsymbol{a}|^2 = |\boldsymbol{b}|^2 = 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，所以 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \dfrac{1}{2}$，即 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \dfrac{\pi}{3}$.

小结:已知向量之间垂直关系求向量的点积或模或夹角等问题时常利用点积的公式或性质:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) \text{ 或 } \cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$$

例 3 已知三点 $A(1,0,-1)$,$B(1,-2,0)$,$C(-1,2,-1)$,求:(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$;(2) 以 A,B,C 为顶点的三角形的面积.

解 (1) $\overrightarrow{AB}=(0,-2,1)$,$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$,则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-4$.

(2) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & -2 & 1\\ -2 & 2 & 0\end{vmatrix}=\{-2,-2,-4\}$

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{4+4+16}=\frac{1}{2}\sqrt{24}=\sqrt{6}$

小结:求三角形的面积时常利用向量的叉积的模的几何意义.

例 4 求过点$(0,2,4)$且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程.

解 由题设可知,两已知平面的法向量分别为:$\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$,则所求直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -3\end{vmatrix}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

由点向式得所求直线方程为

$$-\frac{x}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}$$

小结:求直线方程的方法如下:

① 当已知直线上的一个点及其方向向量时常利用直线方程的点向式求;

② 当已知经过直线的两张平面时常利用直线方程的一般式求;

③ 当已知直线的三个截距时常利用直线方程的截距式求.

例 5 求通过直线$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+3}{4}$且平行于直线$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$的平面方程.

解 解法一:由于所求平面通过直线

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+3}{4}$$

且平行于直线$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$,则所求平面的法向量$\boldsymbol{n}$应同时垂直于两条直线的方向向量,即

$$\boldsymbol{n}=(2,3,4)\times(1,1,2)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=(2,0,-1)$$

且过点$(1,-2,-3)$,因此,由点法式得所求平面方程为

$$2(x-1)-(z+3)=0$$

即

$$2x-z-5=0$$

解法二:直线$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+3}{4}$的一般式方程为$\begin{cases}3x-2y-7=0\\4y-3z-1=0\end{cases}$,则过直线$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+3}{4}$的平面束方程为

$$3x-2y-7+\lambda(4y-3z-1)=0$$

即

$$3x+(4\lambda-2)y-3\lambda z-7-\lambda=0$$

则其法向量为

$$\boldsymbol{n}=(3,4\lambda-2,-3\lambda)$$

由于所求平面平行于直线$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$,其方向向量为:$\boldsymbol{s}=(1,1,2)$,则所求平面的法线与该直线的方向向量互相垂直,即有

$$3+(4\lambda-2)-6\lambda=0$$

解得$\lambda=\frac{1}{2}$,则所求平面方程为

$$3x-\frac{3}{2}z-7-\frac{1}{2}=0$$

即

$$2x-z-5=0$$

例 6 求平行于平面$6x+y-6z+5=0$,且与三坐标面所成四面体体积为1的平面方程.

解 由题设可设所求平面方程为$6x+y-6z=d$,即$\frac{x}{\frac{d}{6}}+\frac{y}{d}-\frac{z}{\frac{d}{6}}=1$,