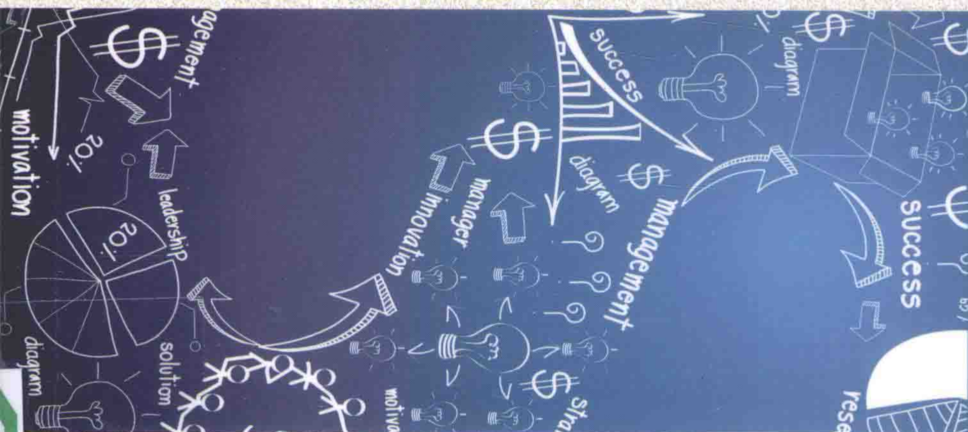
高等院校工科类、经济管理类数学系列辅导丛书

线性代数
同步练习与模拟试题



刘 强
孙 阳 ◎编 著
孙激流

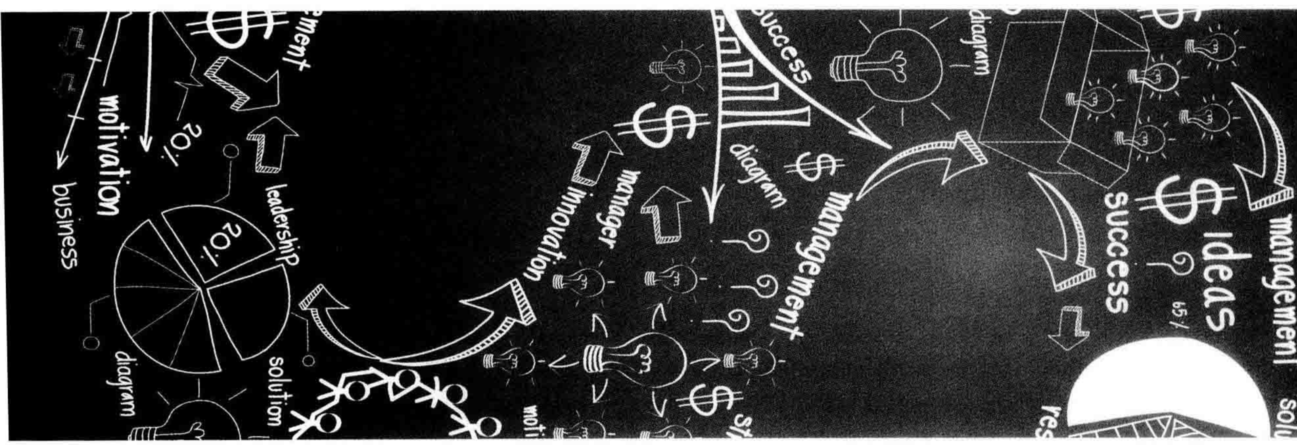
4

清华大学出版社

高等院校工科类、经济管理类数学系列辅导丛书

线性代数同步练习与模拟试题

刘 强 孙 阳 孙激流◎编 著



清华大学出版社
北 京

内容简介

本书是高等院校工科类、经管类本科生学习线性代数的辅导用书.全书分为两大部分,第一部分为“同步练习”,该部分主要包括五个模块,即章节知识结构图、内容提要,典型例题分析,习题精选和习题详解,旨在帮助读者尽快地掌握线性代数课程中的基本内容、基本方法和解题技巧,提高学习效率.第二部分为“模拟试题及详解”,该部分给出了10套模拟试题,并给出了详细解答过程,旨在检验读者的学习效果,快速提升读者的综合能力.

本书可以作为高等院校工科类、经管类本科生学习线性代数的辅导用书,对于准备报考硕士研究生的本科生而言,也是一本不错的基础复习阶段的数学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数同步练习与模拟试题/刘强,孙阳,孙激流编著.--北京:清华大学出版社,2015
(高等院校工科类、经济管理类数学系列辅导丛书)
ISBN 978-7-302-41517-6

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①刘…②孙…③孙…　Ⅲ.①线性代数—高等学校—习题集
Ⅳ.①O151.2-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第213453号

责任编辑:彭　欣
封面设计:王新征
责任校对:王凤芝
责任印制:何　芊

出版发行:清华大学出版社
网　　址:http://www.tup.com.cn,http://www.wqbook.com
地　　址:北京清华大学学研大厦A座　　邮　　编:100084
社 总 机:010-62770175　　邮　　购:010-62786544
投稿与读者服务:010-62776969,c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈:010-62772015,zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者:北京鑫海金澳胶印有限公司
经　　销:全国新华书店
开　　本:185mm×260mm　　印　　张:14.5　　字　　数:335千字
版　　次:2015年10月第1版　　印　　次:2015年10月第1次印刷
印　　数:1～4000
定　　价:29.00元

产品编号:064155-01

FOREWORD

前言

随着经济的发展、科技的进步，数学在经济、管理、金融、生物、信息、医药等众多领域发挥着越来越重要的作用，数学思想、方法的学习与灵活运用已经成为当今高等院校人才培养的基本要求.

然而，很多学生在学习的过程中，对于一些重要的数学思想和方法难以把握，对于一些常见题型存在困惑，常常感觉无从下手，对数学的理解往往只拘泥某些具体的知识点而体会不出蕴含在其中的数学思想.

为了让学生更好、更快地掌握所学知识，同时结合部分学生考研的需要，我们编写了高等院校工科类、经济管理类数学系列辅导丛书，该丛书包括“微积分”“高等数学”“线性代数”和“概率论与数理统计”四门数学课程的辅导用书，首都经济贸易大学的刘强教授担任丛书的主编.

本书为“线性代数”部分，编写的主要目的有两个，一是帮助学生更好地学习“线性代数”课程，熟练掌握教材中的一些基本概念、基本理论和基本方法，提高学生分析问题和解决问题的能力，以达到工科类、经管类专业对学生数学能力培养的基本要求；二是满足学生报考研究生的需要.本书结合编者多年来的教学经验，精选了部分经典考题，使学生对考研题的难度和深度有一个总体的认识.

本书内容分为两大部分，第一部分是同步练习，该部分分为6章，每章包括五个模块，即章节知识结构图、内容提要、典型例题分析、习题精选和习题详解.具体模块内容为：

一、章节知识结构图： 本模块通过知识结构图对每章中所涉及的基本概念、方法进行系统梳理，使读者对每章的内容体系结构有一个全面的认识.

二、内容提要： 本模块对基本概念、基本理论、基本公式等内容进行系统梳理、归纳总结，详细解答了学习过程中可能遇到的各种疑难问题.

三、典型例题分析： 本模块是作者在多年来教学经验的基础上，创新性地构思了大量有代表性的例题，并选编了部分国内外优秀教材、辅导资料的经典题目，按照知识结构、解题思路、解题方法等对典型例题进行了系统归类，通过专题讲解，详细阐述了相关问题的解题方法与技巧.

四、习题精选： 本模块精心选编了部分具有代表性的习题，帮助读者巩固和强化所学知识，提升读者学习效果.

五、习题详解： 本模块对精选习题部分给出详细解答，部分习题给出多种解法，以开拓读者的解题思路，培养读者的分析能力和发散性思维.

第二部分是模拟试题及详解，该部分包括两个模块，即模拟试题与试题详解.

本部分共给出了10套模拟试题，并给出详细解答过程，主要目的是检验读者的学习效果，提高读者的综合能力和应试能力.

为了便于读者阅读本书，书中工科类要求、经管类不要求的内容将用“*”标出，有一定难度的结论、例题和综合练习题等将用“**”标出，初学者可以略过.

本书的前身是一本辅导讲义，在首都经济贸易大学已经使用过多年，其间修订过多版.本次应清华大学出版社邀请，我们将该辅导讲义进行了系统的整理、改编，几经易稿，终成本书.

本书共分6章，其中第1、2章由孙阳编写；第3、4章由孙激流编写；第5、6章由刘强编写，最后由刘强负责统一定稿.

本书可以作为高等院校工科类、经管类本科生学习线性代数的辅导资料；对于准备报考硕士研究生的本科生而言，本书也是一本不错的基础复习阶段的数学参考用书.

本书在编写过程中，得到了北京工业大学程维虎教授、首都经济贸易大学纪宏教授、张宝学教授、马立平教授、吴启富教授、昆明理工大学的吴刘仓教授、北京化工大学李志强副教授和同事们的大力支持，清华大学出版社彭欣女士和刘志彬主任也为本丛书的出版付出了很多的努力，在此表示诚挚的感谢.

由于编者水平有限，尽管我们付出了很大努力，但书中仍可能存在疏漏之处，恳请读者和同行不吝指正.我们的电子邮件：cuebliuqiang@163.com.

编　者

CONTENTS

目录

第一部分 同步练习

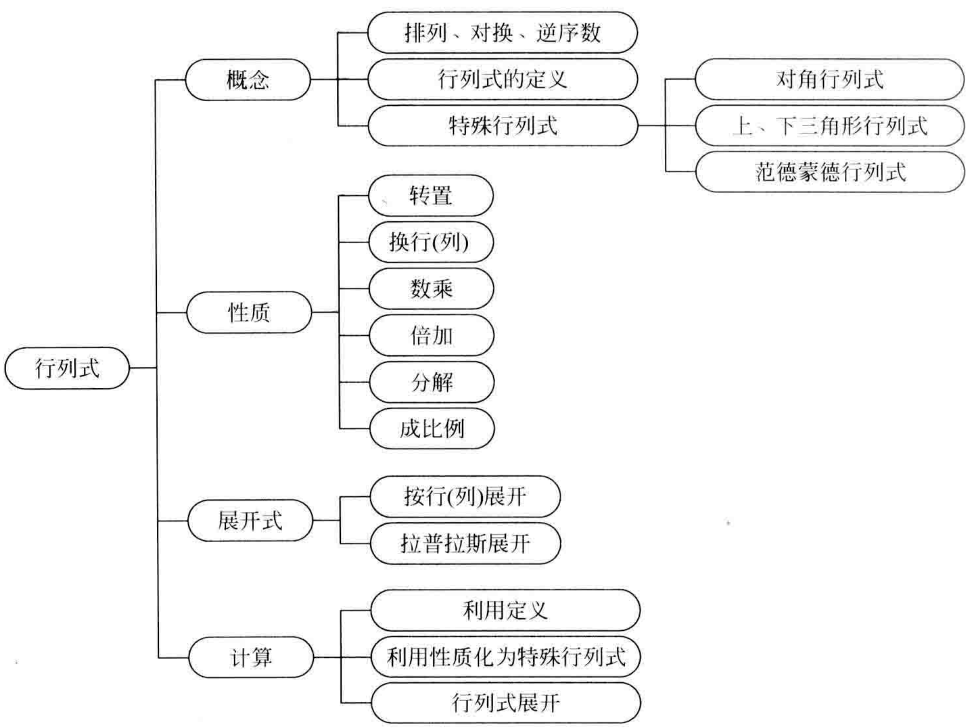
第一部分

同步练习

第1章

行　列　式

1.1　本章知识结构图



1.2 内容提要

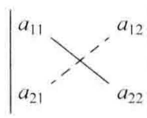
1.2.1 二阶、三阶行列式

用符号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$代表 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

称其为**二阶行列式**，其中 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$称为行列式的**元素**.

二阶行列式的定义可用串线的方式加以记忆. 按如下方式对行列式中的元素进行连线，



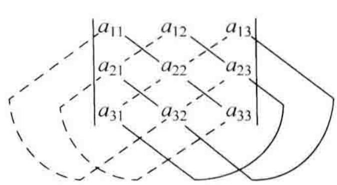
则二阶行列式等于实线连接的元素的乘积减去虚线连接的元素的乘积.

用符号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$代表 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{33}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

称其为**三阶行列式**.

三阶行列式的定义也可用串线的方式加以记忆. 按如下方式对行列式中的元素进行连线，则三阶行列式等于每条线上三个元素乘积的代数和，其中实线连接的项带正号；虚线连接的项带负号.



1.2.2 排列

把 n 个不同的元素排成一列，叫作这 n 个元素的**全排列**，简称**排列**，n 个不同元素的所有的排列的种数为 $P_n=n!$.

对于 n 个不同的元素，先规定各元素之间有个标准次序(常用的标准是从小到大)，于

是 n 个不同元素的任一排列中，某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有一个**逆序**. 排列中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**；逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

特别的，由 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序的数组称为一个 n **级排列**. n 级排列规定的标准次序为从小到大，也称为**自然序**. n 级排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 的逆序数记为 $N(i_1 i_2\cdots i_n)$；n 级排列的种数共有 $n!$ 个，其中奇排列、偶排列各占一半.

1.2.3 对换

将一个排列中的两个数对调，其余的数不动，就会得到一个新排列，称这样的一种变动为**对换**.

对换的性质：

(1) 经过一次对换，排列的奇偶性发生改变.

(2) 任意一个 n 级排列与排列 $12\cdots n$ 都可以经过有限次对换互变，并且所作对换的次数与这个排列有相同的奇偶性.

1.2.4 n 阶行列式

用符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 表示所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，称其为 ***n* 阶行列式**，其中 $j_1 j_2\cdots j_n$ 是一个 n 级排列，定义中的代数和是指每个乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 前都冠以符号 $(-1)^{N(j_1 j_2\cdots j_n)}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2\cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

这里 $\sum\limits_{j_1 j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列 $j_1 j_2\cdots j_n$ 求和. n 阶行列式也可简记为 $D=|a_{ij}|_n$ 或 $\det(a_{ij})$，其中 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 称为行列式的**元素**.

规定一阶行列式等于行列式中的元素，即 $|a|=a$，注意不要与绝对值的记号混淆.

注 显然二阶、三阶行列式是 n 阶行列式的特例.

n 阶行列式的等价定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2\cdots i_n} (-1)^{N(i_1 i_2\cdots i_n)} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n},$$

$$= \sum_{j_1 j_2\cdots j_n} (-1)^{N(i_1 i_2\cdots i_n)+N(j_1 j_2\cdots j_n)} a_{i_1 j_1}a_{i_2 j_2}\cdots a_{i_n j_n}.$$

1.2.5 行列式的性质

(1) **转置** 记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

D^{T} 称为 D 的**转置行列式**,行列式与其转置行列式相等,即有 $D=D^{\mathrm{T}}$.

(2) **换行(列)** 交换行列式的两行(列),行列式变号.以三阶行列式为例,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

(3) **数乘** 用数 k 乘行列式等于将 k 乘到行列式的某一行(列)中所有元素,反过来一个行列式可以按行(列)提取公因式.以三阶行列式为例,即

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix}.$$

特别的,若行列式中有一行元素为零,则行列式为零.

(4) **倍加** 将行列式某一行(列)的所有元素乘以一个数对应加到另一行(列)的元素上,行列式值不变.以三阶行列式为例,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{11} & a_{32}+ka_{12} & a_{33}+ka_{13} \end{vmatrix}.$$

(5) **分解** 行列式某一行(列)的元素均为两数之和,可按这一行(列)将其分解为两个行列式相加.以三阶行列式为例,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

(6) **成比例** 一个行列式中若有两行(列)的元素对应成比例,则行列式的值为零.特别的,一个行列式中若有两行(列)元素相同,则行列式的值为零.

1.2.6 余子式、代数余子式

将行列式 $D=|a_{ij}|_n$ 的第 i 行,第 j 列元素去掉,剩余元素按原顺序构成的 $n-1$ 阶行列式,称为元素 a_{ij} 的**余子式**,记为 M_{ij};称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

*1.2.7 子式、子式的余子式、子式的代数余子式

在 n 阶行列式 D 中任选 k 行 k 列,交叉位置的元素按原顺序构成的 k 阶行列式 D_k

称为 D 的一个 **k 阶子式**,去掉选定的 k 行 k 列元素后余下的元素按原顺序构成的 $n-k$ 阶行列式称为子式 D_k 的**余子式**,记为 M_k. 若选定的 k 行 k 列元素的行标为 $i_1,i_2,\cdots,i_k$,列标为 $j_1,j_2,\cdots,j_k$,则 $(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}M_k$ 称为子式 D_k 的**代数余子式**.

1.2.8 行列式展开定理

(1) **按行列展开定理** 行列式等于它任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和;行列式任意一行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和为零. 即若 $D=|a_{ij}|_n$,则

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D, & i=j,\\0, & i\neq j.\end{cases}$$

*(2) **拉普拉斯定理** 行列式等于它任意选定 k 行(列)的全部 k 阶子式与其代数余子式乘积之和. 若在 n 阶行列式 D 中任意取定 k 行后得到的子式为 $M_1,M_2,\cdots,M_t$,它们的代数余子式分别为 $A_1,A_2,\cdots,A_t$,则

$$D=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_tA_t.$$

1.2.9 特殊的行列式的计算

(1) 上三角形行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) 下三角形行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(3) 对角形行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\0 & a_{22} & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(4) 分块上三角形行列式

$$\begin{vmatrix}x_{11} & \cdots & x_{1k} & y_{11} & \cdots & y_{1m}\\\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\x_{k1} & \cdots & x_{kk} & y_{k1} & & y_{km}\\0 & \cdots & 0 & z_{11} & \cdots & z_{1m}\\\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & \cdots & 0 & z_{m1} & \cdots & z_{mm}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_{11} & \cdots & x_{1k}\\\vdots & & \vdots\\x_{k1} & \cdots & x_{kk}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}z_{11} & \cdots & z_{1m}\\\vdots & & \vdots\\z_{m1} & \cdots & z_{mm}\end{vmatrix}.$$