



“十二五”高等学校专业教材建设工程

高等结构分析

GAODENG JIEGOU FENXI

孙洪军 马 丹 主编



东北大学出版社
Northeastern University Press



“十二五”高等学校专业教材建设工程

高等结构分析

孙洪军 马 丹 主编

东北大学出版社

· 沈 阳 ·

© 孙洪军 马 丹 2015

图书在版编目 (CIP) 数据

高等结构分析 / 孙洪军, 马丹主编. — 沈阳: 东北大学出版社, 2015. 11
ISBN 978-7-5517-1147-0

I. ①高… II. ①孙… ②马… III. ①结构分析 IV. ①O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 271669 号

出 版 者: 东北大学出版社

地址: 沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编: 110004

电话: 024-83687331 (市场部) 83680267 (社务室)

传真: 024-83680180 (市场部) 83680265 (社务室)

E-mail: neuph@neupress.com http://www.neupress.com

印 刷 者: 沈阳市第二市政建设工程公司印刷厂

发 行 者: 东北大学出版社

幅面尺寸: 185mm × 260mm

印 张: 9.5

字 数: 237 千字

出版时间: 2015 年 11 月第 1 版

印刷时间: 2015 年 11 月第 1 次印刷

策划编辑: 王兆元

责任编辑: 郎 坤

责任校对: 吕宜淳

封面设计: 刘江旻

责任出版: 唐敏志

ISBN 978-7-5517-1147-0

定 价: 22.00 元

前 言

本书是“结构力学”知识的延续。在编写该书的过程中力求做到内容精练，由浅入深，便于学生领悟。在介绍高等结构分析的基本原理和计算方法的基础上，增加了与现代计算力学发展相适应的新内容，为读者继续学习和掌握新方法、新技术提供必要的力学基础知识。

全部内容包括6章：静定结构总论、超静定结构总论、能量原理、结构的稳定计算、结构的极限荷载和结构动力计算续论。每部分内容均着眼于为该课程打好基础，落实该课程的基本要求，同时开阔学生的视野，提高学生的能力。各高校可根据实际情况选择其中不同层次的专题内容，不拘一格地提升教学水平。

本书为专题教程，包含一些专题和提高内容，以供各校增选。提高是在已有基础上的延伸和开拓。学习专题内容时，既要充分联系已有的基础知识，又要注意其中的新问题和新概念。

本书可作为高等学校土建、水利、力学等专业结构力学等后续课程的教材，也可供有关工程技术人员参考。

编 者

2015年7月

目 录

第1章 静定结构总论	1
1.1 几何构造分析与受力分析之间的对偶关系	1
1.2 零载法	3
1.3 空间杆件体系的几何构造分析	6
1.4 静定空间刚架	9
1.5 静定空间桁架	13
1.6 悬索结构	18
1.7 静定结构的一般性质	22
第2章 超静定结构总论	25
2.1 广义基本结构、广义单元和子结构的应用	25
2.2 分区混合法	30
2.3 超静定结构的特性	35
2.4 结构计算简图续论	38
第3章 能量原理	51
3.1 可能内力与可能位移	51
3.2 应变能与应变余能	57
3.3 势能驻值原理	63
3.4 势能原理与位移法	66
3.5 势能原理与矩阵位移法	71
3.6 余能驻值原理	76

3.7 余能原理与力法	79
3.8 分区混合能量驻值原理	84
第4章 结构的稳定计算	88
4.1 两类稳定问题概述	88
4.2 两类稳定问题计算简例	91
4.3 有限自由度体系的稳定——静力法和能量法	94
4.4 无限自由度体系的稳定——静力法	99
4.5 无限自由度体系的稳定——能量法	103
第5章 结构的极限荷载	110
5.1 概 述	110
5.2 极限弯矩、塑性铰和极限状态	111
5.3 超静定梁的极限荷载	113
5.4 比例加载时判定极限荷载的一般定理	117
5.5 刚架的极限荷载	119
第6章 结构动力计算续论	128
6.1 多自由度体系的自由振动	128
6.2 多自由度体系主振型的正交性和主振型矩阵	134
6.3 多自由度体系的强迫振动	139
6.4 无限自由度体系的自由振动	144

第1章 静定结构总论

在结构力学基本教程中,曾经对静定结构问题作过系统的讨论。在此基础上,本章再做一些补充和延伸,从广度和深度上提升认识水平。

1.1 几何构造分析与受力分析之间的对偶关系

几何构造分析与受力分析之间存在对偶关系。把二者的关系比喻为“搭”和“拆”的关系,这就是一种对偶关系。

对偶关系还表现在其他方面,现做进一步的讨论。

1.1.1 从计算自由度 W 的力学含义和几何含义看对偶关系

计算自由度 W 等于“各部件的自由度总数”与“全部约束数”的差值。这就是 W 的几何含义。

在受力分析中,取各部件作为隔离体,把各部件的约束切断,用其约束力来代替,然后利用隔离体的平衡方程来求未知的约束力。由于对部件的每一个自由度可写出一个相应的平衡方程,又每一个约束对应于一个未知的约束力。因此,从静力分析的角度看,参数 W 又具有如下的力学含义: W 等于“各部件的平衡方程总数”与“未知力总数”的差值。

由此可见,参数 W 不仅具有几何含义,而且也具有对应的力学含义。根据 W 的数值,可对体系的静力特性得出如下结论:

(1) 若 $W > 0$, 则平衡方程个数大于未知力个数。

由这组平衡方程求解未知力时,在一般情况下,方程组是矛盾的,没有解答。也就是说,在任意荷载作用下,体系不是都能维持平衡的。(从几何构造分析来看,这种情况对应于体系为几何不变。)

(2) 若 $W < 0$, 则平衡方程个数小于未知力个数。

如果此方程组有解,则解答必定有无穷多种。也就是说,体系如能维持平衡,则必定是超静定的。(从几何构造分析来看,这种情况对应于体系有多余约束。)

(3) 若 $W = 0$, 则平衡方程个数等于未知力个数。

此平衡方程组解答的性质要根据方程组的系数行列式 D 是否为零而定:

① 如果 $D \neq 0$, 则平衡方程组有解,且必是唯一解。(从几何构造分析来看,如果 $D \neq 0$, 则体系是几何不变的,且无多余约束。)

② 如果 $D = 0$, 则平衡方程在一般荷载作用下无解,在特殊荷载作用下有无穷多组解。(从几何构造分析来看,如果 $D = 0$, 则体系是几何可变的,且有多余约束。)

可以看出,由 W 引出的静力特性与由 W 引出的几何特性之间具有对偶关系:在一般

荷载作用下平衡方程组有解对应于体系几何不变, 无解则对应于几何可变。平衡方程组只有唯一解对应于体系无多余约束, 有无穷多种解则对应于有多余约束。

1.1.2 从 $W=0$ 的一个简例看对偶关系

图 1-1a 所示为一个 $W=0$ 的简单对称关系, 其中 α 角在 0 与 $\pi/2$ 之间取值。对此体系分别进行几何构造分析与受力分析, 并从中看出二者之间的对偶关系。

首先, 从几何构造分析 (图 1-1a) 中得出两点结论:

- ① 当 $\alpha \neq 0$ (连杆 1 和 2 不共线) 时, 体系为几何不变, 且无多余约束。
- ② 当 $\alpha = 0$ (连杆 1 和 2 共线) 时, 体系为几何可变 (瞬变), 且有多余约束。

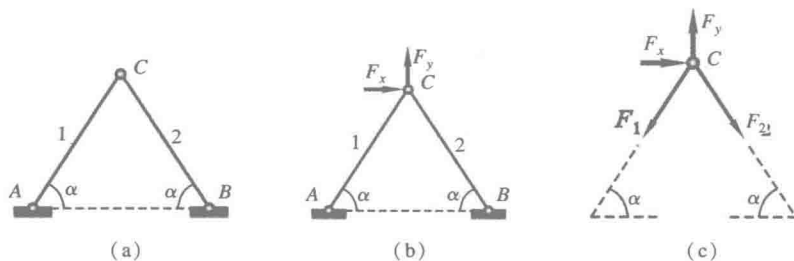


图 1-1

其次, 进行受力分析 (图 1-1b)。为求连杆 1 和 2 中的未知轴力 F_1 和 F_2 , 取结点 C 为隔离体 (图 1-1c), 可写出两个投影平衡方程:

$$\left. \begin{aligned} F_1 \cos \alpha - F_2 \cos \alpha &= F_x \\ F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \alpha &= F_y \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

这时, 平衡方程个数与未知力个数正好相等, 但方程组是否可解, 或者是否有唯一解, 还需根据方程组的系数行列式 D 是否为零才能得出结论。由式 (1-1) 得

$$D = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\cos \alpha \\ \sin \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} = 2 \cos \alpha \sin \alpha = \sin 2\alpha \quad (1-2)$$

下面分为两种情况讨论:

(1) 当 $\alpha \neq 0$ 时 (连杆 1 和 2 不共线)

此时, 由式 (1-2) 得知

$$D \neq 0$$

因此, 方程组 (1-1) 有解, 且有唯一解。解的一般形式可写成

$$F_1 = \frac{D_1}{D}, \quad F_2 = \frac{D_2}{D} \quad (1-3)$$

其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} F_x & -\cos \alpha \\ F_y & \sin \alpha \end{vmatrix} = F_x \sin \alpha + F_y \cos \alpha$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \cos \alpha & F_x \\ \sin \alpha & F_y \end{vmatrix} = -F_x \sin \alpha + F_y \cos \alpha$$

故得

$$F_1 = \frac{F_x}{2\cos\alpha} + \frac{F_y}{2\sin\alpha}, \quad F_2 = -\frac{F_x}{2\cos\alpha} + \frac{F_y}{2\sin\alpha}$$

由此得出受力分析结论：当两连杆不共线时，平衡方程组有解，且为唯一解。

(2) 当 $\alpha=0$ 时（两根连杆共线）

此时，由式(1-2)得知

$$D=0$$

解的一般表示式(1-3) 由于分母为无穷大而不再成立。

实际上，当 $\alpha=0$ 时方程组(1-1) 退化为

$$\left. \begin{aligned} F_1 - F_2 &= F_x \\ F_1 \times 0 + F_2 \times 0 &= F_y \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

当荷载 $F_y \neq 0$ 时方程组(1-4) 无解。

如果考虑 $F_y = 0$ 而只有水平荷载 F_x 作用的特殊情况，则方程组(1-4) 退化为

$$\left. \begin{aligned} F_1 - F_2 &= F_x \\ F_1 \times 0 + F_2 \times 0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

这时，方程组(1-5) 的解为 $F_1 = F_2 + F_x = \text{任意值}$ 。

由此得出受力分析结论：当两连杆共线时，平衡方程组在一般荷载作用下无解，在特殊荷载作用下有解，但解是不唯一的。

最后指出，上面从几何构造分析和受力分析分别得出的结论是殊途同归的。

由于静力特性和几何构造特性的交互关系，一方面，在进行静力分析时可以充分利用结构的几何特性，例如根据结构的组成顺序来选择静力分析的方法和顺序，应用机动法作静定内力和反力的影响线等。另一方面，在讨论几何构造问题时，也可借用静力解法，例如通过静力计算，根据平衡方程的解答是否唯一来判断体系中是否有多余约束。下节讨论的零载法就是在这方面的应用。

1.2 零载法

1.2.1 零载法及其应用举例

上节已经指出，对于 $W=0$ 的体系，其静力特征可归结为两点：

(1) 如体系为几何不变，则其平衡方程组不仅有解，且是唯一解。

(2) 如体系为几何可变和瞬变，则只有在特殊荷载作用下，其平衡方程组才有解，而其解必定不是唯一解。

概括起来，对于 $W=0$ 的体系，平衡方程的解是否具有唯一性，是该体系是否几何不变的标志。

零载法是针对 $W=0$ 的体系，用静力法来研究几何构造问题，用平衡方程的解的唯一性来检验其几何不变性的方法。

检查平衡方程解答的唯一性时，可以任取一种适当的特殊荷载来进行。最简单而又普遍适用的特殊载荷是零载荷。因此，零载法的做法可表述如下：对于 $W=0$ 的体系，如果是几何不变的，则在荷载为零的情况下，它的全部内力都为零；反之，如果是几何可变

体,则在荷载为零的情况下,它的某些内力可不为零。

图 1-2 中的两个体系,计算自由度 W 都为零,载荷也都为零。其中图 1-2a 的体系是几何不变的,与此相应,它的全部支座反力都为零。图 1-2b 的体系是几何可变的,与此相应,它的水平支座反力 F_x 可以不为零。

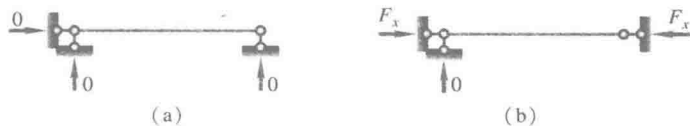


图 1-2

荷载为零而内力不全为零的内力状态可称为自内力,因此,对于 $W=0$ 的体系来说,自内力是否可能存在,是这类体系是否几何可变的标志。

把几何构造问题转化为静力计算问题,这是零载法的特点。它为研究 $W=0$ 的复杂体系的几何可变性提供了一个新的有效的途径。

例 1-1 试用零载法检验图 1-3(a) 所示桁架的几何不变性。

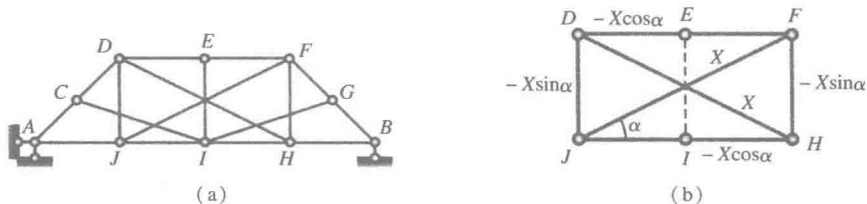


图 1-3

解 首先求 W 。结点数 10, 连杆和支杆总数为 20。所以,

$$W = 2 \times 10 - 20 = 0$$

因此,可以应用零载法来检验几何不变性。

由整体平衡条件可知,在零载下, A 和 B 处支座反力为零,即

$$F_{xA} = F_{yA} = F_{yB} = 0$$

由结点 A, B, C, G 的平衡条件得

$$F_{NAC} = F_{NAJ} = F_{NBG} = F_{NBH} = 0$$

$$F_{NCD} = F_{NCI} = F_{NGF} = F_{NGI} = 0$$

余下部分如图 1-3(b) 所示,由结点 E 或 I 可以判定 $F_{NEI} = 0$, 设: $F_{NDH} = X$, 由结点平衡条件可求出各杆轴力。这里,当 X 为任意值时,各结点都能保持平衡。也就是说,这个桁架可以有自内力存在,是几何可变体系。

例 1-2 试用零载法检验图 1-4a 所示桁架的几何不变性。

解 此体系的 $W=0$, 可采用零载法。

在零载下,可以判断支座反力为零,又 $F_{NGE}, F_{NGF}, F_{NHA}, F_{NHI}$ 都为零。余下的部分如图 1-4b 所示。其中,在每个结点,有 3 个或 3 个以上的杆件相交,用结点法不能简便地求出内力。为此可预设 AB 杆的轴力 $F_{NAB} = X$, X 称为初参数。然后,再根据初参数 X 求其他杆内力,就可以直接应用结点法,而不需解联立方程。

下面按照 B, C, D, E, F 的次序应用结点法:

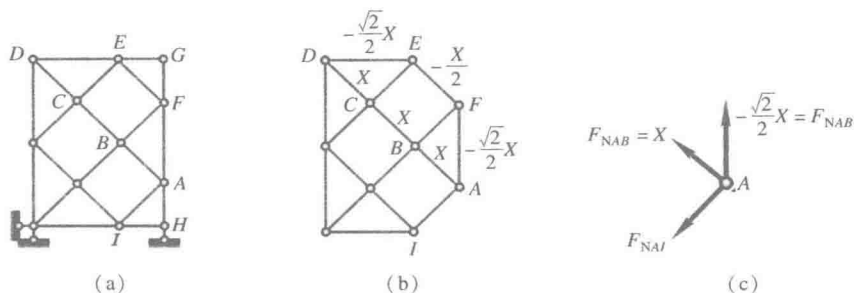


图 1-4

结点 B 和 C $F_{NBC} = F_{NCD} = X$

结点 D $F_{NDE} = -\frac{\sqrt{2}}{2}X$

结点 E $F_{NEF} = -\frac{X}{2}$

结点 F $F_{NFA} = -\frac{\sqrt{2}}{2}X$

经过一系列计算之后,最后回到结点 A。结点 A 的隔离体图如图 1-4c 所示。这里,只有两个待定值,即 X 和 F_{NAI} 。因此,可利用结点的平衡方程求出 X 。实际上,沿 AB 杆方向可列出投影平衡方程如下:

$$X - \frac{1}{2}X = 0$$

由此可知,初参数 X 应为零。由此进一步得出各杆轴力全部为零,即不可能存在自内力。因此,体系是几何不变的。

上面采用的方法称为初参数法或通路法。

在分析复杂桁架的几何不变性或在给定荷载作用下计算复杂桁架的内力时,通路法是一种有效的方法。

1.2.2 从虚功原理角度看零载法

上段介绍的零载法是针对 $W=0$ 的体系,用平衡方程的解的唯一性来检验其几何不变性的方法。

现在应用虚功原理来解平衡问题,讨论平衡问题解答的唯一性,因而从另一个角度对零载法进行新的审视。

现结合图 1-5a 和图 1-6a 所示体系来说明。两个体系的计算自由度 W 都为零,在零荷载作用下,应用虚位移原理求某一约束力 F_X ,为此,撤除与 F_X 相应的约束,代以主动力 F_X ,得到图 1-5b 和图 1-6b 中的可变体系图中虚线表示体系的可能位移。

由于荷载为零,虚功方程左边只有一项:

$$F_X \cdot \Delta_X = 0 \quad (1-6)$$

由式(1-6)解 F_X 时,可能出现两种情况:

(1) 与 F_X 相应的约束是非多余约束(图 1-5a)。在撤除此约束后,体系增加了一个自

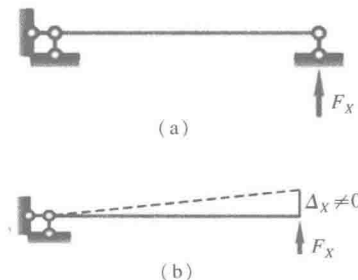


图 1-5

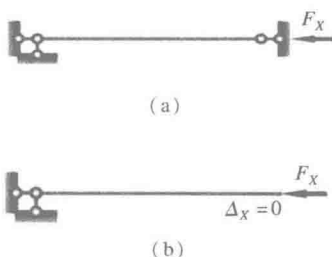


图 1-6

由度，因而在图 1-5b 所示的可能位移中，沿 F_X 方向产生了新的位移 $\Delta_X \neq 0$ ，所以，由式 (1-6) 解得 $F_X = 0$ 。

如果体系中所有约束是非多余约束，则所有的约束力在荷载条件下都应是零。体系中不存在自内力状态。

(2) 与 F_X 相应的约束是多余约束 (图 1-6a)。在撤除此约束后，体系并不增加自由度，因而在图 1-6b 所示的可能位移中，沿 F_X 方向不产生新的位移，即 $\Delta_X = 0$ 。将此结果代入式 (1-6)，得

$$F_X \times 0 = 0$$

可知方程的解为 F_X 等于任意值。也就是说，自内力状态能够在体系中存在。

由此得出结论：自内力状态能 (否) 存在是体系有 (无) 多余约束的标志。

对于 $W=0$ 的体系又可得出如下结论：在 $W=0$ 的体系中，自内力状态能 (否) 存在是体系是 (否) 几何可变的标志。这个结论就是零载法的理论根据。

1.3 空间杆件体系的几何构造分析

杆件轴线不在同一平面内的结构称为空间结构。常见的空间结构有空间刚架和空间桁架。空间刚架由杆件与刚结点组成，多为具有多余约束的几何不变体系 (即超静定体系)。空间桁架由直杆和球铰结点组成，称为空间铰结体系。本节将研究空间铰结体系的几何构造分析问题。

1.3.1 空间几何不变体系的组成规律

(1) 一点与一刚之间的联结方式

一点在空间内有 3 个自由度，即沿 3 个坐标轴方向的移动。由此可知，将一点固定到一个刚体 (或基础) 上需要 3 根连杆。图 1-7a 中的结点 O 在连杆 OA , OB 的约束下，在平面 AOB 内的位置被固定，但这一平面仍可绕直线 AB 转动；再增加一根不在 AOB 平面内的连杆 OC ，结点 O 在空间内的位置便固定了。图 1-7b 所示为 3 根连杆位于同一平面内的情况。这时，在平面 AOB 内有一个多余约束，而结点 O 沿平面 AOB 的法线方向仍可以移动，体系有一个自由度，且有一个多余约束。

规律 1 空间中一点与一刚体用 3 根连杆相连，且三连杆不在同一平面内，则组成几何不变的整体，且无多余约束。

当刚片 ABC 是一平面铰接三角形时 (图 1-8), 它与平面外一点 O 用三连杆按规律 1 联结组成一个铰接四面体。因此, 几何不变, 且无多余约束的空间铰结体系基本组成规律是铰接四面体规律, 即一个铰接四面体的形状是几何不变, 且无多余约束的。多次利用这一规律可以组成各种静定空间桁架。

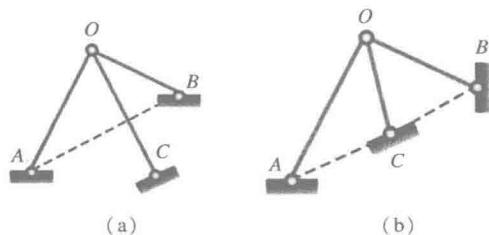


图 1-7

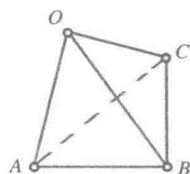


图 1-8

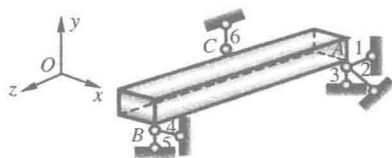
(2) 两个刚体之间的联结方式

一个刚体在空间有沿 3 个坐标轴方向移动和绕 3 个坐标轴转动的 6 种独立运动方式, 即一个刚体在空间有 6 个自由度, 所以, 将一刚体 (基础) 固定到另一刚体上需要 6 根连杆。

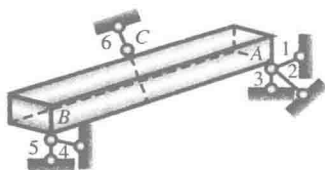
图 1-9a 所示为 6 根支杆支撑着一刚体的情况。其中不共面的 3 根支杆 1, 2, 3 交于 A 点, 因而固定了刚体上 A 点的位置。这时, 刚体沿 x, y, z 轴的移动受到限制, 但仍可以绕过 A 点的 3 个轴转动。再设置 2 根支杆 4, 5, 设其交点为 B ; 这样, 刚体又有 2 个自由度受到了约束, 但仍能发生绕 AB 直线的转动。为了完全固定刚体的位置, 最后设置的第六根支杆必须能约束绕 AB 的转动; 换句话说, 6 根支杆不得交于同一直线。图 1-9a 所示体系, 其 6 根支杆不交于同一直线, 所以体系无多余约束, 且几何不变。图 1-9b 所示是 6 根支杆交于同一直线 AB 的情况。显然, 这时刚体仍能绕直线轴 AB 转动, 体系是可变的。图 1-9c 所示的体系, 其支杆 4, 5, 6 互相平行, 可以看成三杆在无穷远处交于一点, 因此, 过 A 作与支杆 4, 5, 6 平行的直线 AA' , 5 根杆都与直线 AA' 相交, 体系是可变的。于是, 有以下规律。

规律 2 一刚体与另一刚体 (地基) 用 6 根连杆相连, 如连杆中有 3 根交于一点而不在同一平面内, 当 6 根连杆不交于同一直线时, 则组成几何不变的整体, 且无多余约束。

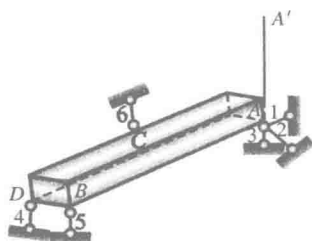
图 1-10a 所示体系中 6 根支杆有 3 根位于同一平面内 (支杆 1, 2, 3), 但不交于一点。这 3 根支杆可以固定刚体在此平面 (如 xy 平面) 内的位置, 但沿此平面法向 (z 方向) 的移动和绕此平面内任意轴线的转动 (可以分解为绕 x 轴的转动和绕 y 轴的转动) 须由另外 3 根支杆来约束。因此, 6 根支杆的布置仍应遵循 6 根杆不得交于同一直线的原则。图 1-10a 所示体系的 6 根支杆不交于同一直线, 故该体系是几何不变体系。图 1-10b 所示体系是一可变体系, 因为其 6 根支杆中相互平行的杆多于 3 根 (支杆 1, 3, 5, 6 互相平行), 这种情况可看作 4 根杆在无穷远处一点相交; 过 B 点作此 4 根支杆的平行线 BB' , 6 根支杆都与直线 BB' 相交, 刚体仍能发生绕直线 BB' 的转动。图 1-10c 所示体系也是一可变体系, 因为其 6 根支杆中位于同一平面 (比如 xz 平面) 内的多于 3 根 (支杆 2, 4, 5, 6)。这种情况下, 在 xz 平面内作直线 BD 与杆 1 和杆 3 相交, 不难看出, 6 根支杆都交于直线 BD (杆 4 与直线 BD 在无穷远处相交), 体系是可变的。于是, 有以下规律 3。



(a)

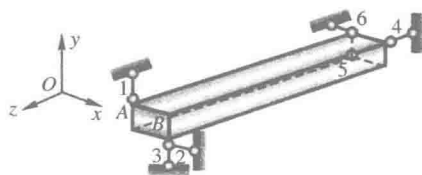


(b)

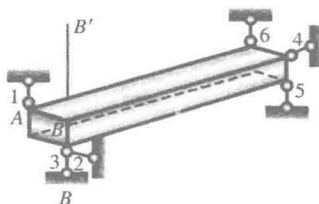


(c)

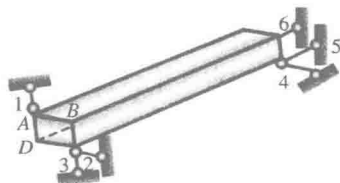
图 1-9



(a)



(b)



(c)

图 1-10

规律 3 一刚体与另一刚体(地基)用 6 根连杆相连,如连杆中有 3 根位于同一平面内而不交于一点,当 6 根连杆不交于同一直线时,则组成几何不变的整体,且无多余约束。

空间刚体用 6 根连杆组成几何不变体系的一般规律是一个复杂的问题。一般情况下采用零载法来判断更为简便(零载法见 1.2 节)。

例 1-3 试分析图 1-11 所示体系的几何构造。

解 先排除 6 根支杆的影响,分析体系内部的几何构造。

体系中的 ABCD 是一个铰接四面体,因此它是几何不变的,且无多余约束的刚体。在此基础上按规律 1 用 3 根不共面的连杆 BE, CE, DE 联结结点 E,构成一个大的刚体;重复应用规律 1,依次将结点 F, G, H 分别用 3 根不共面的连杆联结到大刚体上,构成几何不变又无多余约束的整体。最后,再用 6 根支杆按规律 2 将其与地基相连。因此,体系是无多余约束的几何不变体系。

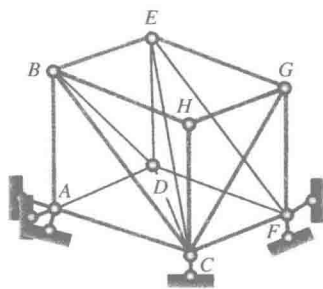


图 1-11

1.3.2 空间铰接体系的计算自由度 W

把体系中的结点看作具有自由度的对象,而将连杆(包括支杆)看作对结点施加的约束。设体系上结点的总数为 j ,连杆与支杆的总数为 b ,其计算自由度 W 可表示为

$$W = 3j - b \quad (1-7)$$

与平面体系中的情况类似, W 是体系自由度 S 的下限, $-W$ 是多余约束数 n 的下限。

所以, 根据求得的 W 可对体系做出以下定性结论:

若 $W > 0$: 体系是几何可变的; 若 $W = 0$: 体系可能是几何不变的, 且无多余约束, 也可能是几何可变且有多余约束的, 需做进一步分析 (例如用零载法分析); 若 $W < 0$: 则体系有多余约束。

例 1-4 计算例 1-3 所示体系的计算自由度 W 。

解 先计算结点个数 $j = 8$, 再计算连杆与支杆数目 $b = 24$ 。按式 (1-7) 求体系的计算自由度 W 为

$$W = 3j - b = 3 \times 8 - 24 = 0$$

由此只能得到定性结论, 即体系属于下列两种情况之一: 或者是多余约束, 且几何不变的, 或者是多余约束且几何可变的。如再补充进行构造分析, 则可知体系属于前一种情况。

1.4 静定空间刚架

1.4.1 内力计算

刚架处于平面受力状态的情况下, 假设刚架各杆轴线都在同一平面内, 荷载和支座反力也都应作用在刚架平面内。若不能满足上述条件, 则刚架处于空间受力状态, 这类问题称为空间刚架问题。图 1-12 所示刚架由 AB 、 BC 两杆组成, 两杆轴线都在 Oxz 平面内, 但由于荷载 F_P 不在 Oxz 平面内, 故属于空间刚架的计算问题。

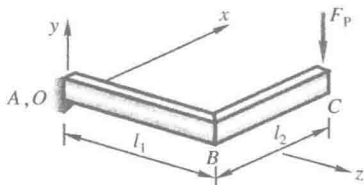


图 1-12

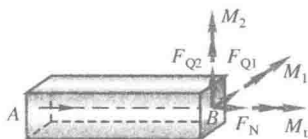


图 1-13

在空间受力状态下, 杆件截面上一般有 6 个内力分量 (图 1-13): F_N , F_{Q1} , F_{Q2} , M_1 , M_2 。其中, F_N 是轴力, 沿杆件轴线方向作用的分力; F_{Q1} , F_{Q2} 是剪力, 分别沿截面两个主轴方向作用的分力; M_1 是扭矩, 绕杆件轴线旋转的力偶矩;

M_1 , M_2 是弯矩, 分别绕截面两个主轴旋转的力偶矩 (这里的下标 1, 2 可根据计算时具体情况用 x , y , z 来代替)。

为了更清楚地表示力偶作用面的位置, 这里的力偶都按右手旋转法则用双箭头矢量来表示。

静定空间刚架的内力计算仍采用截面法。由于一个物体的空间有 6 个自由度, 故可对所取隔离体建立 6 个平衡方程, 由此求出截面上的 6 个内力分量。

作内力图的步骤仍然是: 首先求各杆件的杆端内力, 然后分别作各杆内力图, 最后组合在一起便得到空间刚架内力图。

为了表示各内力分量的正负号和性质, 作内力图时采用如下的规定:

① 轴力图 and 扭矩图都要注明正负号。轴力 F_N 以受拉为正；扭矩 M_t 以双箭头矢量向外为正。

② 弯矩图不注正负号，弯矩 M_1, M_2 都画在杆件受拉一侧。

③ 剪力图不注正负号，但需预先规定杆件轴线的正方向（在图 1-13 中，杆轴的正方向如箭头所示，即由 A 到 B 的方向为正方向），并规定截面的正面和反面（图 1-13 中，截面 B 的外法线与杆轴正方向一致，称为正面；截面 A 的外法线与杆轴正方向相反，称为反面）。剪力图即画在正面上剪力所指向的一侧。

以下通过图 1-12 所示刚架说明内力图的作法。设杆 AB 和 BC 的截面主轴分别为 x, y 和 z, y 。

(1) 求杆 BC 的杆端内力

先由端点 C 的受力情况可知，截面 C 沿 y 轴的剪力为

$$(F_{Qy})_{CB} = F_P$$

其余 5 个内力分量全为零。

再考虑杆 BC 的 B 端，取隔离体如图 1-14a 所示。截面 B 的 6 个内力分量可由平衡方程求出如下：

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 & F_{NBC} = 0 \\ \sum F_y = 0 & (F_{Qy})_{BC} = F_P, \\ \sum F_z = 0 & (F_{Qz})_{BC} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum M_x = 0 & (M_t)_{BC} = 0 \\ \sum M_y = 0 & (M_y)_{BC} = 0 \quad (\text{上边受拉}) \\ \sum M_z = 0 & (M_z)_{BC} = F_P l_2 \end{cases}$$

(2) 求杆 AB 的杆端内力

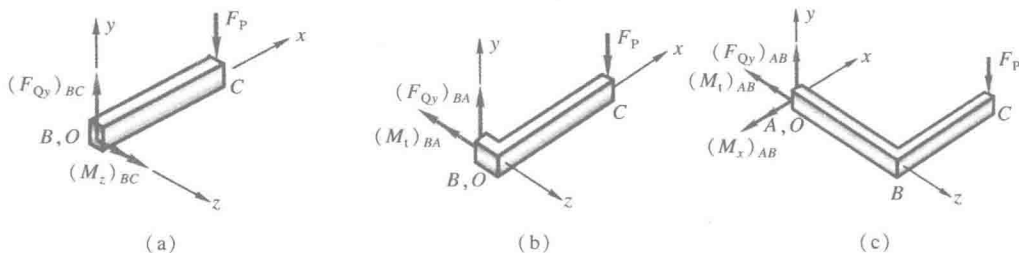


图 1-14

先考虑杆 AB 的 B 端，取隔离体如图 1-14b 所示。由 6 个平衡方程求出内力如下：

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 & (F_{Qx})_{BA} = 0 \\ \sum F_y = 0 & (F_{Qy})_{CB} = F_P, \\ \sum F_z = 0 & F_{NBA} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum M_x = 0 & (M_x)_{BA} = 0 \\ \sum M_y = 0 & (M_y)_{BA} = 0 \\ \sum M_z = 0 & (M_z)_{BA} = -F_P l_2 \end{cases}$$

再考虑杆 AB 的 A 端，隔离体如图 1-14c 所示。由 6 个平衡方程求得。

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 & (F_{Qx})_{AB} = 0 \\ \sum F_y = 0 & (F_{Qy})_{BC} = F_P, \\ \sum F_z = 0 & F_{NAB} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum M_x = 0 & (M_x)_{AB} = F_P l_1 \\ \sum M_y = 0 & (M_y)_{AB} = 0 \quad (\text{上边受拉}) \\ \sum M_z = 0 & (M_z)_{AB} = -F_P l_2 \end{cases}$$

(3) 最后作内力图

图 1-15a 为弯矩图, 杆 AB 上为 M_x 图, 杆 BC 上为 M_z 图。由于两杆均为上部受拉, 故图形画在上面。

图 1-15b 为扭矩图。图中需注明正负号。

图 1-15c 为剪力图, 图中用箭头规定了杆轴线的正方向。由于各杆件在正面上的剪力均指向下边, 因而剪力图都画在杆件下边。

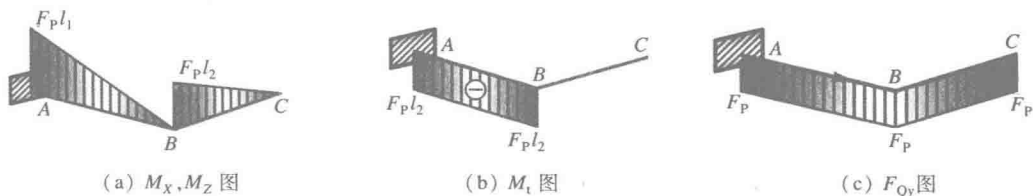


图 1-15

例 1-5 如图 1-16a 所示刚架承受空间平衡力系, 试作内力图。

解 由于结构和荷载都对称于通过 D 点且与 xy 面平行的平面, 因此只需求半边结构 $ABCD$ 的内力。

(1) 作弯矩图

杆 AB 的 A 端

$$M_x = M_y = 0$$

B 端

$$M_x = F_P a \text{ (下边受拉)}$$

$$M_y = 0$$

杆 BC 的 B 端

$$M_y = 0, \quad M_z = F_P a \text{ (上边受拉)}$$

C 端

$$M_y = 0 \quad M_z = 0$$

杆 CD 的 C 端

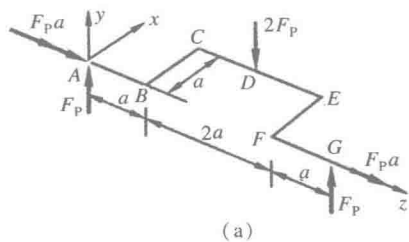
$$M_x = F_P a \text{ (下边受拉)}, \quad M_y = 0$$

D 端

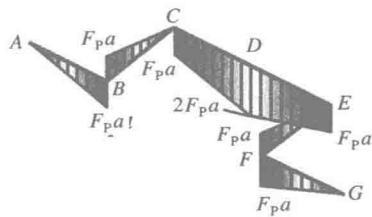
$$M_x = 2F_P a \text{ (下边受拉)}, \quad M_y = 0$$

作出弯矩图, 如图 1-16b 所示。弯矩图是对称的。

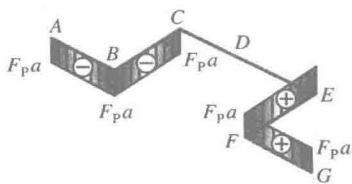
(2) 作扭矩图



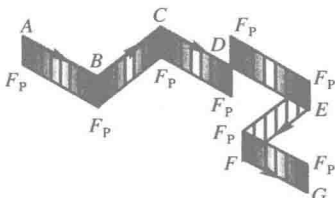
(a)



(b)



(c)



(d)

图 1-16