能力培养与标准化命题

高中解析几何

编写组顾问　崔孟明

孙善麟　陈慧莺　编

中国环境科学出版社

能力培养与标准化命题

高中解析几何

编写组顾问　崔孟明

孙善麟　陈慧莺　编

中國環境科學出版社

1988

内 容 简 介

本书根据教学大纲要求和教学改革的精神编写，与目前的高中解析几何配套使用。内容包括直线、圆锥曲线、参数方程与极坐标。每章有知识脉络、能力要求、能力训练及分析栏目，并附有自我反馈题目及能力测试评价表，以使读者通过自我测试得到反馈，促进学习上的良性循环。本书编写目的在于配合教学，加强基本知识和基本技能的训练。

本书可供高中师生在数学教学中参考，亦可作为自学青年的参考读物。

能力培养与标准化命题

高中解析几何

编写组顾问　崔孟明

孙善麟　陈慧莺　编

•

中国环境科学出版社出版

北京崇文区东兴隆街69号

顺义燕华营印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

•

1988年11月第一版　开本　787×1092　1/32

1988年11月第一次印刷　印张　$8^1/_2$

印数　1—51 150　　字数　185千字

ISBN 7-80010-160X/G·018

定价：2.70元

前　言

《标准化训练与数学》丛书问世以后，受到广大读者的欢迎。该丛书之所以受到欢迎，是因为突出了“双基”训练和依据课本内容，介绍了标准化题型，因而有利于教学改革，有利于教学质量的提高。

今天再向广大读者奉献出一套《能力培养与标准化命题》丛书，使这两套丛书构成为姐妹篇，前者重在基础，介绍题型；后者重在提高，培养能力。

在教学过程中，培养能力的问题，是广大教育工作者努力探讨的新课题。培养什么能力，怎样培养，由于教学科目的不同，各有不同的要求和培养途径，但其中必有一些共性的东西。总结我们多年的教学经验，试着回答这一问题，作为抛砖引玉，这就是编写这套丛书的目的。

这套丛书是依据中、外学者的研究成果，如美国心理学家布鲁姆的认识理论，苏联教育家巴班斯基的最佳教学过程理论，并结合我国教学中的具体情况，把能力要求分为记忆理解、应用、分析综合与创见四部分。

这里说的“创见”是学生掌握基础知识的基础上，灵活运用所学知识的创见，借以提高学生的思维水平。我们认为，学生今天微小的创见，对社会主义建设将是一种无穷的创造力，因而不可忽视。

这套丛书各科均按单元编写，各单元含有“知识脉络”，讲明本单元知识的来龙去脉；“能力要求”，指明通过学习应当培养哪些能力；“能力训练”，给出适量的，按要求分类的训练题；“能力训练分析”，对能力训练题给出解答或分析，

并在适当的章节之后设有“自我反馈”和“能力测试评价表”，以使读者通过自我测试得到反馈，找到自己在学习中的优胜之处和不足之处，以发扬优胜，弥补不足，促进学习上的良性循环。

在这套丛书构思和编写过程中，特聘请特级教师崔孟明同志，作丛书编写组顾问予以指导。但由于编写这套丛书还是一种尝试，肯定有不足之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

1988年5月

目　　录

第一章 直　线

〔知识脉络〕

本章从有向直线、有向线段等概念出发，以有向线段及其数量、长度概念作为本章知识的基础。由于学生通过代数、几何、三角等课程的学习，已经对数轴及平面直角坐标系有所了解，并初步接受了点与数（或数对）对应的概念，因此，引入有向线段的数量、长度等概念，更加体现了坐标的方法。

掌握坐标方法对于平面解析几何课程的学习是至关重要的。在本章的前两节中，通过坐标方法导出的几个基本公式——数轴上有向线段的数量公式、两点间距离公式及定比分点坐标公式，不仅是本章的基本公式也是平面解析几何这门课程的重要工具，应该能够熟练地运用这些公式进行运算或推导。

在几何图形中，无疑直线是形状最简单、应用最广泛的。因此本章的主要研究对象是直线方程。由一次函数及其图象的已有知识为基础，以直线的斜率为核心，逐步深入地展开讨论。

直线斜率的概念是十分重要的，它是直线位置的决定因素，不仅在直线方程的建立中起到核心作用，而且两直线的平行、垂直及夹角都由斜率来沟通。顺便指出，斜率概念不仅在本章、本课程中十分重要，既使在数学的其它学科（如微积分）中，也有着相当重要的应用，因此，斜率概念及其计算公式，是重要的基础知识。

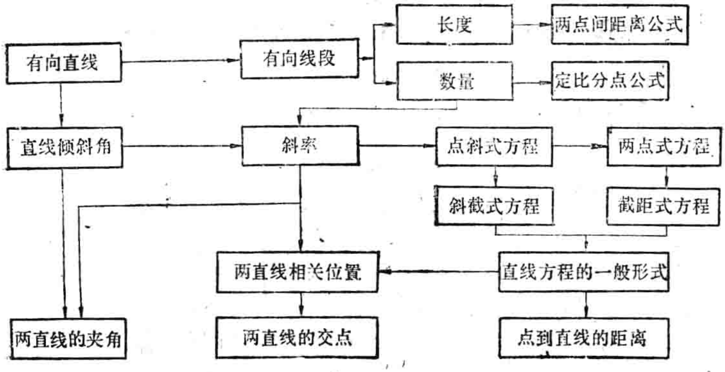
直线方程以点斜式为基础并派生出其它几种形式。根据不同的条件，可选择适当的形式来建立直线方程，这是本章着重要求的基本技能，应该熟练掌握。

本章在讨论直线方程的基础上，得出了在平面直角坐标系中，直线与二元一次方程的一一对应关系，这也是一个重要的结论。它不仅为下一章将要建立起曲线与方程的概念以及这二者的对应关系，作了知识和认识上的准备，而且这本身就已经开始了数、形结合的思想、方法、能力的渗透、运用、培养的过程。

因此，直线方程的建立以及之后的利用方程对两直线相关位置的讨论，就已经是数、形结合思想逐步建立和数形结合能力逐步形成的基础阶段，对下面各章学习的重要作用是不容忽视的。

总之，在本章的学习中，要正确理解有向线段、斜率等基本概念，熟练地应用两点间距离、定比分点坐标、两直线的夹角、点到直线的距离等基本公式；熟练地建立各种形式的直线方程并理解直线与二元一次方程的对应关系；会利用直线方程来讨论两直线间的位置关系；并且注意通过这些知识和技能的掌握及应用，促进数、形结合等能力的发展。

本章知识脉络框图(见下页)。



有向直线
有向线段
长度
两点间距离公式
数量
定比分点公式
直线倾斜角
斜率
点斜式方程
两点式方程
斜截式方程
截距式方程
两直线相关位置
直线方程的一般形式
两直线的夹角
两直线的交点
点到直线的距离

第一单元　有向线段与定比分点

〔能力要求〕

一、记忆与理解

1．理解有向线段的概念，正确区分有向线段、有向线段的数量及有向线段的长度三者的联系与不同。

2．记住数轴上有向线段的数量公式及长度公式。

3．熟记平面上有向线段长（即两点间距离）的计算公式。

4．理解定比分点的概念；记准比值λ的定义并理解内、外分点的λ值的正、负的意义。

5．熟记定比分点的坐标公式及其特殊情况——线段的中点公式。

二、应用

1．能够应用公式正确计算数轴上有向线段的数量与长度。

2．能够正确地应用两点间距离公式计算平面上有向线段的长度。

3．正确使用定比分点坐标公式：

（1）能够根据比值λ求出分点坐标；

（2）能够由比值λ、分点及一端点坐标求出另一端点坐标；

（3）能够根据有向线段的端点及分点坐标或数量或长度，正确地求出比值λ。

4．能够运用两点间距离公式及定比分点坐标公式等解

决一些简单的几何计算及证明问题。

三、分析与综合

1．在进一步应用本单元的重要概念或公式时，应该能够根据条件，从不同的角度正确地加以分析、运用，从而发展逆向思维能力及发散思维能力。

2．在已有的平面几何或代数等方面的知识与技能的基础上，进一步应用本单元中的有关概念和公式时，应该具有一定的灵活运用能力及综合应用能力。

3．在需自行建立坐标系的问题中，要能够根据平面几何等方面的知识作出相应的分析、判断，以建立起适当的坐标系，逐步地培养转化能力及数、形结合能力，并不断地领会、理解解析法的原理。

举例：

一、记忆与理解

1．通过相近概念的对比，深入认识概念的内涵及外延从而提高理解能力。

例1 多项选择题（本题中的线段AB系指平面几何中所说的线段）：

以下结论正确的是

（A）线段AB与有向线段$\overline{AB}$都是以A、B为端点；

（B）线段AB与有向线段$\overline{AB}$都一定以A为起点、B为终点；

（C）线段AB与有向线段$\overline{AB}$都有一定的长度；

（D）线段AB与线段BA是同一线段；

（E）有向线段$\overline{AB}$与有向线段$\overline{BA}$是同一线段。

解答：应选（A）、（C）、（D）

分析：本例意在通过与已有知识的对比，来加深对有向

线段概念的理解。

有向线段与平面几何意义下的线段本质的不同就在于前者有了方向，而有向线段的方向是依对起点、终点的规定来体现的。同时在有向线段的记号中字母的次序反映了起点与终点，反之，平面几何意义下的线段并无方向的规定，所以不谈起点及终点。

利用与已有知识的比较来深化对概念的内涵或外延的认识，这是提高理解能力的重要方法。

2. 通过正确地理解有关术语或符号的训练，改善记忆效果。

例2. 是非选择题：

（A）有向线段$\overline{AB}$是一图形，$\overline{AB}$的数量AB是一数值；　　（　　）

（B）AB与$|AB|$都是数值，而且$|AB|$即AB的绝对值；　　（　　）

（C）有向线段$\overline{AB}$的数量AB的正或负，由有向线段的起点、终点来决定；　　（　　）

（D）有向线段$\overline{AB}$的数量AB的正或负，由$\overline{AB}$的方向与所在有向直线的正方向的同异来决定。　　（　　）

解答：(A)✓　(B)✓　(C)×　(D)✓

分析：了解并正确地运用有关术语，是提高理解与记忆能力的重要因素。比如本例中（C）是不正确的。因为记号$\overline{AB}$已经指明了该有向线段的起点为A、终点为B，其数量正、负是由有向线段的方向——即从A到B的方向——与规定的正向是否相同来决定的。继而不难看出（D）是正确的。

3. 通过多形式的实际运算，提高记忆与理解能力。

例3 填空选择题：

若A、B、C均为数轴上的点，

（1）若$AB=5$、$AC=3$，则$|BC|=$____；

（2）若$AB=5$、$|AC|=3$，则$|BC|=$____；

（3）若$AB=3$、$|BC|=5$，则$AC=$____；

（4）若$|AB|=5$、$|AC|=3$且$AB\cdot AC>0$，则$BC=$____．

备选答案：（A）2或8；（B）-2或8；（C）-2或2；（D）2．

解答：（1）（D）（2）（A）（3）（B）（4）（C）

分析：本题是通过不同形式下的计算，培养对公式的理解和记忆能力。

以（4）题为例、设：A、B、C坐标分别为a、b、c．

方法一：利用代数运算

最终应求出$c-b$，据已知，显然应该由$(c-a)-(b-a)$得出。问题是如何从$|c-a|$及$|b-a|$中解脱出来？

注意到题设中$AB\cdot BC>0$的条件，即知AB、AC同正或同负，再由$|b-a|=|AB|=5$、$|c-a|=|AC|=3$可得

$$\begin{cases}b-a=5\\c-a=3\end{cases}\quad 或 \quad \begin{cases}b-a=-5\\c-a=-3\end{cases}$$

分别解这两个方程组，便有$c-b=-2$或$c-b=2$．

方法二：借助于图形

由$AB\cdot AC>0$知$\overline{AB}$、$\overline{AC}$同向，即同时与数轴同向或反向。作出示意图，再标上长度，则结果不难得出。

从上述两种解法的对比中，可以看出，充分地利用数、形结合，对分析、解决问题是大有益处的。所以，类似题目的求解过程也就是初步要求和培养学生数、形结合能力的过

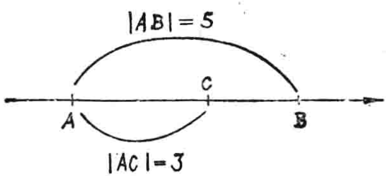


图 1-1

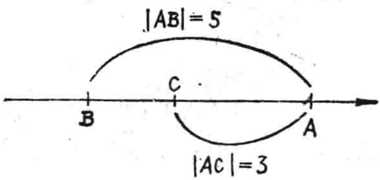


图 1-2

程。

4. 通过相关概念及公式结合的练习，来增进记忆与理解。

例4. 配伍选择题：

已知P_1、P_2、P_3为数轴上三点，且设P分$\overline{PP}$的比$\lambda=\frac{3}{7}$

（1）若$P_1(-1)$、$P_2(9)$，则P点坐标为____；

（2）若$P_2(-5)$、$P(2)$，则P_1点坐标为____；

（3）若$P(2)$、$PP_1=3$，则P_1、P_2点坐标为____；

（4）若$|PP_1|=3$ $P(2)$，则P_1、P_2点坐标为____.

备选答案：(A)5，(B)2；(C)5、-5；(D)-1、9或5、-5.

解答：配伍结果依次为(B)、(A)、(C)、(D).

分析：本题将定比分点及线段的数量、长度混编在一起，

需要有对概念及公式的准确的理解与记忆，才不致在解题的过程中，引起混乱。本例的四个小题，有的条件相反、有的是条件相近，在求解的过程中，需要一定的比较鉴别能力；小题之间条件与结果的变换也有利于培养学生的逆向思维能力。

二、应用

1．通过多解法的习题，训练灵活的应用能力。

例1 已知$A(-1,\ 0)$、$B(3,0)$、$C(0,\ 3)$为圆上三点，求圆心坐标。

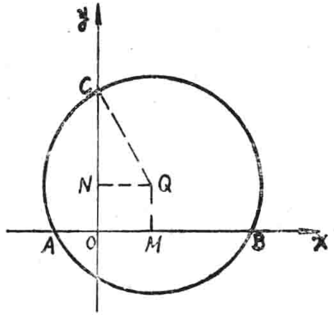


图 1-3

分析：设圆心为$Q(x_0,y_0)$据圆的定义可知$|QA|=|QB|=|QC|$，从而据两点间距离公式，可得方程组

$$\sqrt{(x_0+1)^2+y_0{}^2}=\sqrt{(x_0-3)^2+y_0{}^2}=\sqrt{x_0{}^2+(y_0-3)^2}.$$

解出x_0、y_0.

另外，从本题的特殊条件——A、B、C三点均在坐标轴上.设Q向x轴、y轴引垂线OM、ON（见图1-3），M即$\overline{AB}$的中点，则M点的横坐标即为Q的横坐标x_0；继而可由$|QC|=|QA|$解出Q的纵坐标y_0.

若能考虑到圆内两条相交弦的有关性质，则立即可得出$\odot Q$与y轴另一交点D的坐标，从而$\overline{CD}$中点N的纵坐标即Q点的纵坐标y_0.

从以上分析可知本例有多种解法。如上面分析的三种解法中，一种仅依靠两点间距离公式求解；另一种用两点间距离公式与中点坐标公式结合使用；第三种仅用中点坐标公式解决。对已知条件分析得越透彻，运算过程越简单。所以这

类习题要求有一定的灵活运用知识的能力以及对特殊和一般的认识能力。

解答：按第三种方法

∵$QM\perp AB$、$QN\perp CD$ ∵M 为$\overline{AB}$中点、N 为CD中点，且Q与M横坐标相同、与N纵坐标相同。

$$\therefore\quad x_0=\frac{-1+3}{2}=1$$

又∵ $\dfrac{|DO|}{|OC|}=\dfrac{|AO|}{|OB|}=\dfrac{1}{3}$ ∴ D点坐标为$(0,-1)$

$$\therefore\quad y_0=\frac{3+(-1)}{2}=1$$ 即Q坐标为$(1,\ 1)$.

2. 通过对有关公式的反复使用，增强应用能力。

例2 AD为$\triangle ABC$的角平分线，三顶点坐标为$A(5,-1)$、$B(-1,\ 7)$、$C(1,\ 2)$ 求AD的长.（图1-4为示意图）

分析：欲求$|AD|$，自然想到两点间距离公式，A点坐标已知，则须求出D点坐标。从图中知D为$\overline{BC}$的内分点，那么解题的关键在于找出内外比λ的值。从而可联想到角平分线的性质，在$|AB|$、$|AC|$可以求出的情况下，λ值便可求出。

此例的求解过程中，两点间距离公式及定比分点坐标公式反复得到应用，而且还要用到角平分线的性质，因此，解决此题需要具有综合应用能力。

解答：$\lambda=\dfrac{|BD|}{|DC|}=\dfrac{|AB|}{|AC|}=2$，

则D点坐标为$\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{11}{3}\right)$，