现代逻辑与逻辑比较研究

XIANDAILUOJI YULUOJIBIJIAO YANJIU

开明出版社

现代逻辑与逻辑比较研究

上海逻辑学会编

开 明 出 版 社

现代逻辑与逻辑比较研究

上 海 逻 辑 学 会 编

开 明 出 版 社 出 版

进武县第三印刷厂印刷

开本 850×1168　1/32　印张 11　字数 266 千字

1992 年 8 月第一版　　1992 年 8 月第一次印刷

印数 1—1300

ISBN 7—80077—471—6/H・3

定价：　6.50元

目　录

Topos理论与逻辑

华东师范大学　冯　棉

众所周知，现代数学是以集合论为基础的。无论是康托(G.Cantor)的朴素集合论，还是各种公理集合论系统，都是一种成员关系理论(theory of membership)，“集合”(或“类”)与“成员关系”是理论的初始概念和基本出发点。如今，这两个概念已渗透到现代数学的各个分支，甚至出现在中学生的课本之中，为每个有文化的人所熟识。教育造成了这样一种观念：“集合”与“成员关系”的概念是数学与逻辑学的基石，因而是无法约减的。言下之意，数学的逻辑基础只能是一种成员关系理论。公理集合论在很长一个时期内的发展，也支持了这一见解。

然而，60年代中期在范畴论(category theory)研究的基础之上，范畴集论(categorial set theory)脱颖而出，终于打破了成员关系理论的一统天下，使数学基础研究的格局为之改观。

在范畴集论中，“成员关系”不再是初始概念，它被归约为映射和映射的合成；不仅如此，它还失去了在公理集合论(或朴素集合论)中所占有的举足轻重的地位。数学中的各种结构都可用范畴论的语言统一地加以处理，从而展示出把数学建立在其它(非成员关系)概念之上的可能性。这一前景使数理逻辑学家们惊叹不已，也是范畴论的创始人所未曾预料到的。

范畴的概念提出于1945年，是S.Eilenberg和S.MacLane

研究代数拓扑时引入的①，当时并未想到和数学的逻辑基础有什么瓜葛。随着研究工作的步步深入，各种不同的数学结构，如群、环、模、拓扑空间、向量空间以及集合论等等都一一被纳入了范畴论的框架之中，人们这才领悟到范畴论对于数学基础所具有的重要意义。

从直观上看，范畴包含两个部分：

第一，由相同结构的集合组成的类，这些集合称为“对象”(objects)，用大写字母A，B，C，…表示；

第二，在对象的类上有一个保持对象结构的函数运算，称为映射(mapping或morphism)，用小写字母x，y，z，……表示。映射以对象作为定义域(domain)和值域(codomain)，如果映射x的定义域为A，值域为B，就用$A \xrightarrow{x} B$来标记，但x不一定是满射(surjection)，一般只有$x(A) \subseteq B$。全体映射组成的类上有一个二元运算，称为合成(composition)，合成运算满足结合律。映射的合成能以图(diagram)的方式形象地展现出来。例如，已知$A \xrightarrow{x} B$，$B \xrightarrow{y} C$和x、y的合成$z = xy$，则三者之间的关系构成一个三角形：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "z"'] & B \arrow[d, "y"] \\ & C \end{tikzcd}$$

范畴论的公理系统CT可用一阶语言来表述。CT中有个体变元x，y，z，…，它们表示映射；有一个三元常谓词$K(x, y, z)$，其涵义为：z是x和y的合成。CT中还有两个一元函数D和C，$D(x)$与$C(x)$分别代表x的定义域和值域。

①S.Eilenberg and S.MacLane: General Theory of Natural Equivalences, 《Transactions of the American Mathematical Society》 V.58, P237—238, 1945.

CT有下述六条公理，它们刻划了定义域、值域和合成运算的特性。

公理1：$(\forall x_1)((D(C(x_1))=C(x_1))\wedge(C(D(x_1))=D(x_1))$，

意为："x_1的值域的定义域是x_1的值域，并且x_1的定义域的值域是x_1的定义域。"

公理2：$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(\forall x_4)(K(x_1, x_2, x_3)\wedge K(x_1, x_2, x_4)\rightarrow x_3=x_4)$，

即"如果x_1和x_2有合成，那末合成是唯一的"。

公理3：$(\forall x_1)(\forall x_2)\ (((\exists x_3)K(x_1, x_2, x_3)\longleftrightarrow(C(x_1)=D(x_2)))$，

可解释为："x_1与x_2有合成当且仅当x_1的值域是x_2的定义域"。

公理4：$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)\ (K(x_1, x_2, x_3)\rightarrow(D(x_3)=D(x_1)\wedge C(x_3)=C(x_2)))$，

意为："若x_3是x_1和x_2的合成，那末x_3的定义域就是x_1的定义域，并且x_3的值域就是x_2的值域"。

公理5：$(\forall x_1)(K(D(x_1), x_1, x_1)\wedge K(x_1, C(x_1), x_1))$

即："对任何映射x_1，x_1的定义域与x_1的合成就是x_1，x_1与x_1的值域的合成也还是x_1"。

公理6：$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(\forall x_4)(\forall x_5)(\forall x_6)(\forall x_7)((K(x_1, x_2, x_3)\wedge K(x_2, x_4, x_5)\wedge K(x_1, x_5, x_6)\wedge K(x_3, x_4, x_7)\rightarrow x_6=x_7)$

这表明合成运算满足结合律，即 $x_1(x_2\ \ x_4)=(x_1x_2)x_4$。

在CT中，"对象"不再是初始概念，它由映射来定义。用$ob(x)$表示"x是对象"，它的定义是：$(x=D(x))\wedge(x=C(x))$，即"对象"是这样一种映射：它等于自身的定义域，并且等于自身的值域。这一巧妙的技术处理，使范畴论的初始概念合二为

一，归并为映射；“对象”的概念被一种特殊的映射——恒等映射取而代之。

在CT中再添加若干条公理，其中包括无穷公理和选择公理，即可构成范畴集论系统CS；在此基础之上，能进一步建立Peano算术和发展经典分析。

在CS中，“成员关系”通过映射来定义。“x是y的元素”，记为$x\in y$，定义如下：

$A\xrightarrow{y}B$，$1\xrightarrow{x}B$，y 是单射(monomorphism)，且存在$1\xrightarrow{h}A$，使得$hy=x$，即有下面的三角形成立：

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "y"] & B \\
1 \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "x"'] &
\end{tikzcd}$$

这里1称为末对象(terminal object)，在CS中，每一个对象A，都存在唯一的映射x，使得$A\xrightarrow{x}1$。1的存在由公理保证。1可作这样的直观理解：它是由一个元素组成的集合。在同构的意义下，1是唯一的。由上述成员关系的定义可推知：

$x\in A$当且仅当$1\xrightarrow{x}A$，其中A是对象。

在CS中，对象的元素是映射，这和集合论中集的成员关系有什么区别呢？从表面上看，前者是两个映射之间的关系，后者是两个集合之间的关系，“映射”与“集合”只是术语不同，把对象A解释为集合，$1\xrightarrow{x}A$解释为从集合A中挑出一个元素，似也未尝不同，由此猜测其中的差别无非是大同小异罢了。然而深究细察，就会发现实际情况并非如此。差异之大，下面的例子便可略见一斑。设对象A和B有一个元素x是共同的，这意味着$1\xrightarrow{x}A$和$1\xrightarrow{x}B$是同一个映射，因而有$A=B$。这说明

集合论中集合的外延特性在*CS*中不成立，“对象”并不等同于集合。有关*CS*的详情细节可参看①。

60年代末、70年代初，F.W.Lawvere和M.Tierney着手对范畴集论加以改进，一种新的理论随之应运而生，登上了舞台。它的名字叫Topos，也称Topoi。②

Topos公理系统*TP*是范畴论系统*CT*的一个扩张。与*CT*(或*CS*)相比，*TP*中增加了两个初始符号：个体常元Ω和T。*TP*的公理有十多条，其中包括*CT*的全部公理和*CS*的部分公理。就公理而言，*TP*和*CS*有两个至关重要的不同之处。

第一，有三个*CS*的公理不再是*TP*的定理(当然也不会是*TP*的公理了)，它们是无穷公理、选择公理和一个有关成员关系的公理：

若$A\xrightarrow{y}B$，$A\xrightarrow{z}B$，且对一切$1\xrightarrow{x}A$有$xy=xz$，则$y=z$。

第二，*TP*中有一个*CS*所没有的公理，名为子对象分类者(subobject classfier)公理，它断言：

①常元Ω是一个对象，称作子对象分类者；

②映射$1\xrightarrow{T}\Omega$存在；

③对于每一个单射$A\xrightarrow{m}B$，存在唯一的映射$B\xrightarrow{C_m}\Omega$，使得下图可构成一个“拉回”(pullback)

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "t_A"'] & B \arrow[d, "C_m"] \\
1 \arrow[r, "T"] & \Omega
\end{tikzcd},$$

①W.S.Hatcher: The Logical Foundations of Mathematics, §8.5, 1982.

②L.W.Lawuere: Topos, Algebraic Geometry and logic, P.1, 1972.

即对任何映射 $C \xrightarrow{x} B$，$C \xrightarrow{t_c} 1$，且满足条件 $xC_m = t_c T$，都存在唯一的映射 $C \xrightarrow{r} A$，使得 $rm = x$，$rt_A = t_C$ 成立。上述“拉回”可用图的方式来显示：

$$\begin{tikzcd}
 & & B \arrow[dr, "C_m"] & \\
C \arrow[r, "r"] \arrow[urr, "x"] \arrow[drr, "t_c"'] & A \arrow[ur, "m"] \arrow[dr, "t_A"] & & \Omega \\
 & & 1 \arrow[ur, "T"'] &
\end{tikzcd}$$

TP 的任何模型称为 Topos。公理集合论ZF(Zermelo-Fraenkel)系统的集与函数范畴就是一个Topos。在 ZF 中，Ω 解释为集{0，1}，T 解释为从集{0}到集{0，1}的函数 f，$f(0)=0$；映射 C_m 是 m 的特征函数，m 是 B 的子集，C_m 以值0赋予 m 的每一个成员，B 的其他成员则取值1。通过这一解释，使我们对 Ω.T 和特征映射 C_m 的实际背景有了较深入的了解。有关 TP 的详细内容可参看P 5 注①。

作为基础系统，CS 固然有许多可取之处，但比起 TP 来就相形见拙了。首先，CS 的模型较少，它是为刻划 ZF 的集与函数范畴——一种特殊的范畴而设计的，这就限制了 CS 的适用范围。TP 则不然，它有着为数众多的模型。比如，CS 的任何模型都是Topos。不仅如此，对任何小范畴[映射类不是公理集合论 NB(von Neumann-Bernays)系统中的真类(propercl-ass)的范畴]e，都可以通过e上的顶层(presheaf)，找到一个与之有关的范畴 $S^{\cdot op}$，称为e的顶层上的范畴，$S^{\cdot op}$ 是Topos。这表明系统 TP 比 CS 适用范围更广，表达能力更强。其次，CS 系统过份依赖选择公理，许多极为基本的定理都必须经由选择公理来证明。鉴于对选择公理的合理性众说纷纭，一直存在着

争议，人们总是设法尽可能减少它的使用，除非万不得已。但这在CS中却无法做到。系统TP采用子对象分类者公理，它比选择公理要弱得多，某些在CS中借助于选择公理来证明的重要定理，可使用子对象分类者公理在TP中加以论证，这是TP的又一个为人称道的优点。

在TP中，若A为对象，则称映射$1 \xrightarrow{x} A$为A的全元素(global element)，与CS中元素的形式定义相同；称映射$X \to A$为A的偏元素(local element)，其中X是任意的对象。TP和CS一样，存在一个对象0，叫做始对象(initial object)，它的定义是：

$$(\forall A)(\exists! x)(0 \xrightarrow{x} A)。$$

记号$\exists!$ 意为"存在唯一"。

TP有这样一个异乎寻常的(与CS不同的)特性：非0对象A不一定有全元素，即A可以是全元素的空集。这一特性寓意深长，它揭示了集合论与Topos之间深刻的差别。集合论以集合和成员关系为初始前提，集合与其成员之间是一种绝对的、整体性的关系，每一个集合都是由其元素唯一确定的，这样的集合可称作常集(constant set)。Topos以映射和映射的合成为出发点，成员关系只具有局部的、相对的意义，对象事实上成了变集(variable set)，常集只是变集的极限情况，如同全元素只是偏元素的特例一样。

P.T.Johnstone精辟地指出：从常集到变集，这一思想上的扩展是Topos理论的核心。① 正是这种思想上的扩充，使Topos成为比集合论更一般、更具普遍性的理论，集合论不过是一种特殊的Topos。这是一次对传统观念的革命性变革，将对数学基础、逻辑学乃至哲学产生深远的影响。

①P.T.Johnstone: Topos Theory, P.XVii, 1977.

Topos的内在逻辑是一种类型论——直觉主义类型论(intuitionist type theory)。在Topos中，若 $X \xrightarrow{x} A$，A、X是对象，且x是单射，则称x是A的子对象(subobject)，记为$x \subset A$。对任何对象A，它的全体子对象(在包含关系之下)可构成一个偏序集，记为Sub(A)。Sub(A)不是一个布尔代数，而是一个Heyting代数，即相应于直觉主义命题逻辑的格(Lattice)。因此，Topos的命题逻辑是直觉主义的。

Topos的谓词逻辑则是类型论的。可以用直觉主义类型论的语言构造一个Topos公理系统，并证明在该系统中可靠性定理（soundness theorem）和完全性定理（completeness theorem)成立。由于Topos可建立在直觉主义类型论的基础之上，所以如下结论自是理所当然的了：如果一个集论定理在不使用排中律和选择公理的情况下获证，那末它在任何添加了自然数对象的Topos中为真。

Topos理论的兴起，标志着数学基础的研究进入了一个新的时期。一劳永逸地为数学提供一个可靠的逻辑基础，曾是G.Frege，B.Russell等人为代表的逻辑主义学派梦寐以求的理想，许多人为之呕心沥血，耗费了毕业的精力。这一理想的实现，不仅仍遥遥无期，甚至变得越来越可疑了。相反，通过某种途径，从概念和方法上对各个数学分支作统一的处理，成了当代数理逻辑学家的一个现实而有意义的目标。Topos理论已为人们展示了这一前景。

自然推理系统
——一种新的形式系统

上海社会科学院　王耀堃

自然推理系统，也是一种形式化的逻辑演算，它既能够精确地把日常推理转变为形式推理的逻辑结构，又能以直接而自然的方式表达逻辑推理，并且掌握起来较之形式公理系统要容易得多。为此，笔者认为，这是我国逻辑教材在面向现代化改革进程中，可以首先引进的一部分内容。本文将阐述自然推理系统的创立、特点、规则，并对命题逻辑自然推理的推理规则作一些分析比较。

一、自然推理的创立

逻辑演算系统有两种，除了形式公理系统外，还有一种是自然推理系统。形式公理系统出现较早，在弗雷格的著作中，在罗素与怀特海的巨著《数学原理》中，所展现的就是形式公理系统。自然推理的出现比较晚，它是20世纪30年代才提出来的。形式公理系统是以公理为出发点建立的演绎系统。而所谓自然推理系统，即不是以公理为出发点，而是引进假设利用推理规则进行推演的演绎系统。由于这种形式推理、形式证明比较直接而自然地反映了演绎推理，接近于自然科学，特别是数学中的演绎推理，因此称为自然推理或“自然演绎”。在自然推理的过程中，可以随时引入假设，在假设的引入与消去的过程中，获得求证公式，因而又叫“假设推理”。最早的自然推理是由德国逻辑学家G.甘岑(G.Gentzon)和波兰逻辑学家C·雅斯科夫斯基(S.Jaskowski)在本世纪三十年代提出来的。1934

年，G·甘岑提出了自然推理的一个规则系统，并且证明，“在某个相关的逻辑系统中的任一证明都可变为一个范式，这一范式需要一种称之为‘切痕’的运算，并且在某种意义上是最直接可能的”。①甘岑建立的这种自然推理的形式系统较之弗雷格、罗素的形式化的公理系统，以一种更为自然的方式表述了逻辑。同年，雅斯科夫斯基独立发表的一篇论文《形式逻辑的假设规则》也提出了自然推理的规则系统，把他原先在卢卡西维茨研究班上所取得的成果进一步精确了，后来对自然推理的说明大多采用了雅斯科夫斯基的解释方法。

形式化公理系统在现代科学中虽然显示了巨大的优越性和强大的生命力。但是，随着现代逻辑的发展，人们对公理化逻辑也提出了一些问题和看法。比如说，命题逻辑的公理化是否是必需的？因为要确定哪些合式公式是永真的，利用永真命题和真值表来解决命题逻辑的真值，是可以简单办到的。而命题逻辑中运用公理方法的话，证明手续就变得非常麻烦。有的逻辑学家甚至提出，逻辑的公理化会引起对逻辑本性的误解，等等。这些问题的提出，启迪人们去探索别的途径，是否可以有一种较为简便直接而自然的形式推理？正是在这种情况下，自然推理也就应运而生。在形式公理系统内，要建立一个演绎证明，是件很抽象很麻烦的工作。而自然推理，既是一种形式化的方法，能够精确地把日常推理转变为形式推理的逻辑结构，又以直接而自然的方式表达了逻辑推理，掌握它要比掌握形式公理系统来得容易。对初学者来说，尤其如此。正是基于这样一些原因，在两种系统的选择上，有不少逻辑学家倾向于利用自然推理。

①[英]威廉·涅尔、玛莎·涅尔：（《逻辑学的发展》第672页）。

二、自然推理的特点

自然推理系统和形式公理系统都是用形式化的方法建立的系统，有着同样的演绎能力，有着同样的解释力，凡是在一个系统内能够得到证明的东西，在另一相应的系统内也能够得到证明。公理系统内的每一条公理，在自然推理系统中都可以用一条或若干条相应的推理规则来代替。从语法角度来看，两者在确定逻辑联结词功能特性方面，也是可以相互替代的。因此，自然推理和形式公理两者的区别只是具体方法上的不同，表达形式上的不同。自然推理的运用往往较为简便自然，而在证明命题逻辑的完全性等元定理时，公理系统就显示了优越性。

自然推理的主要特征是应用推理规则，在引入假设的过程中推出形式结论。这种方法是吸取了人们日常推理中的优点而采用的。在日常的推理中，特别是数学推理过程中，通常是通过随时引入假设和消去假设而求得待证公式。拿一个蕴涵式来说，自然推理是把需要证明的命题的各个前件暂时假设为真，由此进行推理，而当推出要证明的命题的后件时，被证明的命题便得到了证明。这就是这种推理又叫"假设推理"的原故。以蕴涵词分配律"如果$A\to(B\to C)$和$A\to B$，则$A\to C$"的证明为例，设$A\to(B\to C)$和$A\to B$，再假设A，那么，由$A\to(B\to C)$和A可以推出$B\to C$，由$A\to B$和A可以推出B，又由所推得的$B\to C$和B可以推出C；这样，在前提$A\to(B\to C)$和$A\to B$之下，再假设A，可以推出C；因此，由$A\to(B\to C)$和$A\to B$可以推出$A\to C$。可以看出，自然推理与日常思维特别是数学思维中的推理的方法是一致的，顺着思路比较容易求得一个证明。

自然推理方法的基本点可概括如下：

（1）可以根据证明的需要随时引入假设。

（2）推理必须根据推理规则严格进行。

（3）有某些规则可消去假设。

（4）当所有假设均已消去时，所得公式即为可证公式。

由于可以根据证明的需要随时引入假设，因此作为推理前件的公式可以有许多，推导起来，极为方便。

自然推理的推理方法，还有化繁为简进行判别和证明的特点。一个要证明的公式，如果是一个比较复杂的公式，则可以将它分解为若干较为简单的证明公式，而每一个较为简单的证明公式，可以用简单明了的方法加以判定。当我们将重言式推理分解为较简单的各个部分时，通常有十多种类型的简单重言蕴涵式就够了。这样，为形式证明的有效性提供了直接而近于自然的方法。这种方法和真值表方法相比，也有其方便之处。在真值表方法中，当有四个以上的变项时，构造的真值表就在十多行以上，这不仅繁琐，而且计算容易出错。对比之下，自然推理则是一种更适宜的方法。

三、自然推理的准则

不同的自然推理系统，对规则的选择是有所不同的。但是，有两条准则是建立任何演绎系统，也是建立任何一组自然推理的推理规则时所必须遵从的，它们是指导和管辖着其余一切规则的准则。

（1）推理的一致性准则。推理规则必须是正确的，即保证推演是有效的，使我们能仅仅推出那些可从前提合乎逻辑地得出的结论。

（2）推理的完全性准则。用这些推理规则构成的演绎系统必须是完全的，就是说它在推出所有有效推理时是足够的。

此外，在建立规则时，还须考虑的一个因素是：在保证系统是完全的所必需的规则以外，可以适当增加一些规则。这样