新编理科学习指导丛书

高中数学100天

贺双桂 主编

新编理科学习指导丛书

高中数学100天

主　编　贺双桂
副主编　郑灼球
　　　　陈元芳

广西师范大学出版社

(桂) 新登字 04 号

主　编　　贺双桂
副主编　　郑灼球　　陈元芳
编　委　　(以姓氏笔划为序)
邓正德　庄鸿翔　李坤梅　李康林
李　斌　林　军　罗永国　周月岭
俸桂明　黄祖达　蒋树生

新编理科学习指导丛书
高中数学 100 天
贺双桂　主编
责任编辑:麦瑞钿　　封面设计:杨琳

广西师范大学出版社出版　　邮政编码:541001
(广西桂林市中华路36号)
广西新华书店发行　　广西荔浦县印刷厂印刷
*
开本:787×1092　1/32　印张:13　字数:298千字
1992年7月第一版　　1995年2月第六次印刷
印数:104801－124800册
ISBN 7－5633－1300－1/G・1055
定价:5.60元

3.全书按技能训练水平梯度，共精选范例300余道，以及足量的技能训练选择题、填空题、解答题等，并对全部训练题给出了答案、解答或关键步骤的提示.

本书由贺双桂主编，参加编写的人员有：郑灼球（第一章），邓正德（第二章），黄祖达（第三章），李康林（第四章），庄鸿翔（第五章），林军、俸桂明（第六章），贺双桂（第七章），李斌（第八章），罗永国（第九章），周月岭（第十章），李坤梅（第十一章），陈元芳（第十二章），蒋树生（第十三章）.全书由贺双桂负责统稿.

本书可直接供高三师生总复习课堂教学使用，也可作为高中一、二年级师生同步学习训练的教学参考.

限于编者水平，书中缺点错误在所难免，欢迎广大读者批评，指正.

编　者

1992.2

前　言

许多中学生对学习数学有着浓厚的兴趣，并且为之付出了辛勤的劳动，但由于部分学生学不得法，往往收效甚微，事倍功半. 数学是一门具有高度抽象和技巧性的学科，因而在学习上需要丰富的想象力和创造力. 纵观历年高考试题，其侧重点不仅在于考查基础知识，更重要的是考查分析问题和解决问题的能力. 然而这种能力从何来？我们认为这种能力来自对基础知识的牢固掌握，科学的思维方法与解题技能技巧，并且其能力的种种表现又是三者的有机统一.

本书以科学的思维方法与技能技巧为主线，着眼于高中数学基础知识的系统复习和基本能力的全面训练，全书紧扣现行数学教学大纲，并参照新大纲精神，取材新颖，重点突出，覆盖面广. 编写中，按现行高中教材顺序，以及代数、三角、立体几何、解析几何的课时比例，较为科学地划分为 13 章，按每天 1 课，共 100 个课时设计. 各章节的特点如下：

1. 每一章的知识结构网络与能力评估训练题首尾呼应，便于学生对本章知识的理解、记忆、运用和检测，以保证训练的系统性，避免盲目性和随意性.

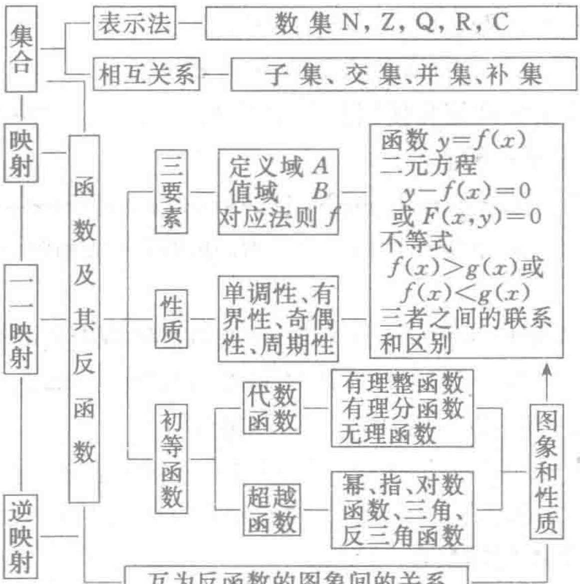
2. 每一章的具体内容由若干课时组成，每课时包含知识点提要、思维方法与技巧训练、技能训练题三个部分. 每一部分都力求反映本章节的重要知识、方法和技能技巧，以其收到总结知识，点拨方法，开拓思路，纵横沟通，激活思维的效果.

目　录*

* 各章标题末圆括号内的数字表示各章包含的课时数。

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

[知识结构]



第1课时　集合的概念

一、知识点提要

1. 元素与集合的关系：$a\in A$ 或 $a\notin A$.

2. $A\subseteq B$ 定义为：任一 $a\in A$，都有 $a\in B$.

3. $A\cap B=\{x\,|\,x\in A$ 且 $x\in B\}$.

4. $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

5. $\overline{A}=\{x|x\in I$ 且 $x\notin A\}$, I 称为全集.

二、思维方法与技巧训练

〔**例** 1〕选择题　如下五个表示法：

①$\{1\}\in\{0,1,2\}$；　　②$\{1,-3\}=\{-3,1\}$；

③$\{0,1,2\}\subseteq\{1,0,2\}$；④$\varnothing\in\{0,1,2\}$；

⑤$\varnothing\in\{0\}$. 其中错误的表示法的个数是(　　).

(A)1 个；(B)2 个；(C)3 个；(D)4 个.

解　①，④，⑤为错误的表示法，故选(C).

注：要正确理解和使用集合中的“$\in$、$\subset$、$\subseteq$、$=$”等符号，正确理解空集的概念.

〔**例** 2〕　已知 $x\in\mathrm{R}$，$y\in\mathrm{N}$，且 $A=\{y|y=x^2-4x+6\}$，$B=\{y|y=-x^2-2x+18\}$，求 $A\cap B$，并用描述法和列举法表示它.

解　A 是由 $y=(x-2)^2+2\geqslant 2$ 的自然数所组成的集合，B 是由 $y=-(x+1)^2+19\leqslant 19$ 的自然数所组成的集合，因此

$A\cap B=\{y|2\leqslant y\leqslant 19, y\in\mathrm{N}\}$.（描述法）

$A\cap B=\{2,3,4,5,\cdots\cdots,17,18,19\}$.（列举法）

注：要正确区别$\{y|y=x^2-4x+6\}$与$\{(x,y)|y=x^2-4x+6\}$这两个不同的集合.

〔**例** 3〕已知全集 $I=\mathrm{R}$，

$A=\{x|2x^2-5x<0\}$，

$B=\{x|6x^2-x-2\geqslant 0\}$，求：

$A\cap B$，　$A\cup B$，　$\overline{A\cup B}$，$\overline{(A\cup B)}\cap A$.

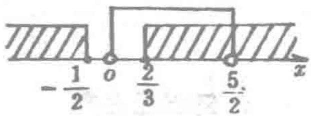


图 1－1

解　如图 1-1. 因为　$A=\{x|0<x<5/2\}$，

$B=\{x|x\leqslant-1/2$ 或 $x\geqslant2/3\}$,

所以 $A\cap B=\{x|2/3\leqslant x<5/2\}$,

$A\cup B=\{x|x\leqslant-1/2$ 或 $x>0\}$,

$\overline{A\cup B}=\{x|-1/2<x\leqslant0\}$,

$\overline{A\cup B}\cap A=\varnothing$.

〔例 4〕 已知 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$,

$B=\{x|\log_2(x^2-5x+8)=1\}$,$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$,且 $A\cap B\neq\varnothing$,$A\cap C=\varnothing$,求 a 的值.

解 由已知得 $B=\{2,3\}$,$C=\{-4,2\}$,因为 $A\cap C=\varnothing$,所以 $2\notin A$,$-4\notin A$,又 $A\cap B\neq\varnothing$,所以 $3\in A$. 将 $x=3$ 代入 $x^2-ax+a^2-19=0$,得 $a=5$ 或 $a=-2$.

当 $a=5$ 时,$A=\{2,3\}$导致 $2\in A$ 的矛盾. 故 $a=5$ 应舍去.

当 $a=-2$ 时,$A=\{-5,3\}$,符合题意,故 $a=-2$.

注:要注意检验,避免解的范围扩大.

三、技能训练题(1.1)*

1. 选择题

①下列各表示式中,正确的是(　　).

(A)全集为实数集 R,则 $A\cup\overline{A}=\{R\}$;

(B)若集合 $A=\{1,\varnothing,\{2\}\}$,则$\varnothing\in A$;

(C)空集$\varnothing\in\{0\}$;　(D)$\{(1,-3)\}=\{(-3,1)\}$

②已知全集 $I=Z$,$M=\{x=x|2k,\ k\in Z\}$,$P=\{x|x=3k,\ k\in Z\}$,则 $M\cap\overline{P}$是(　　).

* 本书各课时三、技能训练题标题末圆括号内的数字是各章各课时训练题的序码,圆点前的数字表示章序数,圆点后的数字表示课时序数.

(A) $\{x \mid x=3k\pm1, k\in Z\}$;(B) $\{x \mid x=4k\pm1, k\in Z\}$;

(C) $\{x \mid x=6k\pm2, k\in Z\}$;(D) $\{x \mid x=4k$ 或 $4k+2, k\in Z\}$.

③已知集合 $M=\{x \mid \log_x 2/3<1\}$.

$N=\{x \mid \lg|3x-1|>0\}$,下列表达中正确的是(　　).

(A) $M\cup N=R$;　　　　(B) $M\cap N=[2/3,+\infty)$;

(C) $\overline{M}\supset N$;　　　　(D)以上都不对.

2. 填空题

①设 $A=\{0,1\}$, $B=\{x \mid x\subseteq A\}$,用列举法写出集合 B 是________.

②设全集 $I=\{$空间内的直线$\}$,集合 $A=\{$与已知平面 α 垂直的直线$\}$,将 $\overline{A}$ 写成几个两两不相交的真子集的并集,则 $\overline{A}=$________.

③设 $I=R$, $A=\{x \mid x^2-x-6<0\}$, $B=\{x \mid |x|=y+2, y\in A\}$,则 $\overline{A\cup B}=$________;$A\cap B=$________.

④设 $M=\{(x,y) \mid y/(1-x^2)=1\}$, $N=\{(x,y) \mid y=1-x^2\}$, $P=\{(x,y) \mid (x,y)\in N$ 但 $(x,y)\notin M\}$,以上 $x,y\in R$,则 $N\cap P=$________.

3. 已知 $I=\{x \mid x^2-3x+2\geqslant0\}$, $A=\{x \mid |x-2|>1\}$, $B=\{x \mid (x-1)/(x-2)>0\}$,求 $A\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cup B$.

4. 已知集合 A, B 都有 10 个元素,$A\cap B$ 有 5 个元素,集合 C 有 3 个元素,且 $C\subset A\cup B$, $C\cap A\neq\varnothing$,求满足上述条件的集合 C 所有可能的个数.

5. 已知 $A=\{x \mid x^2+(m+2)x+1=0, x\in R\}$ 且 $A\cap R^+=\varnothing$,求实数 m 的取值范围.

第2课时　映射与函数

一、知识点提要

1. 映射是反映两个集合间的单值对应关系，注意原象与象的关系.

2. 把函数纳于集合到集合上的映射的范畴，变为相对静态的定义，有利于揭示函数的本质. 注意函数的三要素：定义域、值域和定义域到值域上的对应法则. 其中对应法则是函数概念的核心，是理解的关键.

3. 正确理解一一映射、逆映射、反函数的概念.

二、　思维方法与技巧训练

〔例1〕　选择题

①设R^-是负实数集，按对应法则$f:x\to x^2$，使集合M的元素对应于集合P的元素，那么f是从M到P的一一映射的条件是(　　).

(A)$M=\overline{R^-}$，$P=\overline{R^-}$；(B)$M=\overline{R^-}$，$P=R$；

(C)$M=R$，$P=\overline{R^-}$；　(D)$M=R$，$P=R$.

②已知集合$M=\{(x,y)|x+y=1\}$，映射$f:M\to N$，在f的作用下，点(x,y)的象是$(2^x,2^y)$则集合$N=$(　　).

(A)$\{(x,y)|x+y=2,x,y\in R^+\}$；

(B)$\{(x,y)|xy=1,x,y\in R^+\}$；

(C)$\{(x,y)|xy=2,x,y\in R^-\}$；

(D)$\{(x,y)|xy=2,x,y\in R^+\}$.

③下列函数中，$f(x)$与$g(x)$表示同一函数的是(　　).

(A)$f(x)=\sqrt{x^2}$；　与$g(x)=(\sqrt{x})^2$；

(B) $f(x)=x$ 与 $g(x)=2^{\log_2 x}$;

(C) $f(x)=\sin(\arccos x)$ 与 $g(x)=\cos(\arcsin x)$;

(D) $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$.

解 ①当 $M=\overline{R^-}$, $P=\overline{R^-}$, 映射 $f: x\to y=x^2$ 是 M 到 P 的一一映射,故选(A).

②令 $m=2^x$, $n=2^y$, 则 $mn=2^{x+y}=2^1=2$ 并且 $m>0$, $n>0$, 因此集合 $N=\{(m,n)\mid mn=2, m,n\in R^+\}$, 故应选(D).

③(A), (B), (D)的定义域不同,应排除,故选(C).

〔**例** 2〕 已知 $A=R$, $B=[1,+\infty)$, 从 A 到 B 的映射 $f: x\to\log_2(x^2-2x+3)$, 试讨论这个映射是否构成函数?是否为一一映射,是否存在反函数?何时才有反函数?

解 这个映射构成函数 $y=\log_2(x^2-2x+3)$. 事实上, f 显然是映射,且对于任一 $y_1\in B$, 即 $y_1\geqslant 1$, 有原象 $x_1=\pm\sqrt{2^{y_1}-2}+1$ 在 R 中. 且知这个映射不是一一映射,因此没有逆映射,也就不存在反函数.

函数 $y=\log_2(x^2-2x+3)$ 在区间 $(-\infty,1]$ 或 $[1,+\infty)$ 上存在反函数,其反函数分别是

$$y=1+\sqrt{2^x-2}\quad(x\geqslant 1),\qquad y=1-\sqrt{2^x-2}\quad(x\geqslant 1).$$

〔**例** 3〕 设函数 $f(x)$ 满足关系式: $f(2/x+1)=\lg x$, ①求 $f(x)$ 的表达式;②求 x, 使 $f(x)=f[(x-1)^2]$.

解 ①设 $2/x+1=t$. 得 $x=2/(t-1)$, 代入已知条件,得 $f(t)=\lg\dfrac{2}{t-1}$, 即 $f(x)=\lg\dfrac{2}{x-1}$.

②依题意有 $\lg\dfrac{2}{(x-1)}=\lg\dfrac{2}{(x-1)^2-1}$,

解此方程得 $x=(3\pm\sqrt{5})/2$.

经检验知，$x=(3-\sqrt{5})/2$ 应舍去，故 $x=(3+\sqrt{5})/2$ 即为所求.

注:换元法与消去法是求函数表达式的常用方法。本题①也可令 $x=2/t+1, y=\lg t$ 然后消去 t 求得.

三、技能训练题(1.2)

1. 选择题

①按对应法则 $f: x \to y=\log_2(x^2-1)$，使集合 M 的元素 x 对应于集合 N 中的元素 y，若这个对应恰是映射，则集合 M, N 应是(　　).

(A)$M=\{x|x\in \mathrm{R}\}, N=\{y|y\in \mathrm{R}\}$;

(B)$M=\{x|x\geqslant 1\}, N=\{y|y\in \mathrm{R}\}$;

(C)$M=\{x||x|>1\}, N=\{y|y\geqslant 0\}$;

(D)$M=\{x||x|>1\}, N=\{y|y\in \mathrm{R}\}$.

②已知函数 $y=\log_2 x+3 \quad (x\geqslant 1)$，那么 $f^{-1}(x)$ 的定义域是(　　).

(A)$\{x|x\geqslant 3\}$;(B)R;(C)$\{x|x\geqslant 1\}$;(D)$\{x|x\geqslant 0\}$.

③已知

$f(x)=\begin{cases} x^2, (x\geqslant 0) \\ x, (x<0) \end{cases}, g(x)=\begin{cases} x, (x\geqslant 0) \\ -x^2, (x<0) \end{cases}$ 则当 $x<0$ 时，$f[g(x)]=$(　　).

(A)$-x$;(B)$-x^2$;(C)x;(D)x^2.

2. 填空题

①$y=x^2(x\leqslant 0)$的反函数是________.

②若函数 $f(x)$ 的定义域是$[0,1]$，则函数 $f(x^2)$ 的定义域是________.

③已知 $f(x)=ax^9+bx^7+cx^5-4 \quad (a,b,c$ 为常数)，且

$f(-\sqrt{23})=100$，则 $f(\sqrt{23})=$____.

④将 $f(x)=f^{-1}(x)=ax+b$，则 $a=$____，$b=$____.

3. 设 $A=\{(x,y)\mid x\in \mathrm{Z}, |x|<2, y\in \mathrm{N}, x+y<3\}$，$B=\{0,1,2\}$，从 A 到 B 的对应法则 $f:(x,y)\to x+y$，试画出对应图，并判断这个对应是不是映射.

4. 已知 $af(x)+bf(1/x)=cx$ （a,b,c 为常数，且 $|a|\neq|b|$，求函数 $f(x)$ 的解析式.

5. 已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 同时满足条件：对一切实数 x，y 都有 $g(x-y)=g(x)g(y)+f(x)f(y)$ 且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，求 $g(0)$ 的值.

第 3 课时　函数的定义域和值域

一、知识点提要

1. 函数的定义域和值域的概念.

2. 求函数定义域：①考虑运算意义，根据几种常见函数对于自变量的制约得到相应的不等式(组)，然后解不等式(组)；②考虑实际意义.

3. 求函数的值域的常用方法：观察法，图象法，配方法.求反函数的定义域可用换元法，或利用函数的单调性，极值性等.

二、 思维方法与技巧训练

〔例 1〕　填空题

①函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-|x|}$ 的定义域是________.

②函数 $y=\sqrt{1-(1/3)^{2x-1}}$ 的定义域是________.

③函数 $f(x)=\log_{2x-1}\sqrt{3x-2}$ 的定义域是________.

④函数 $y=\sqrt{25-x^2}+\lg\cos x$ 的定义域是________.

答　①$x\neq 0$ 且 $x\neq\pm 1$；②$[1/2,+\infty)$；③$(2/3,1)\cup(1,+\infty)$；④$[-5,-3\pi/2)\cup(-\pi/2,\pi/2)\cup(3\pi/2,5]$.

〔**例** 2〕 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$，试求 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域. 其中 $a>0$.

解　由 $-1\leqslant x+a\leqslant 1$ 且 $-1\leqslant x-a\leqslant 1$ 得

$$\begin{cases}-1-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\ -1+a\leqslant x\leqslant 1+a.\end{cases}$$

当 $1-a<-1+a$，　即　$a>1$ 时，$x\in\varnothing$.

当 $1-a\geqslant -1+a$，　即　$0<a<1$ 时，有

$-1+a\leqslant x\leqslant 1-a$.　这就是所求的定义域.

〔**例** 3〕 求下列函数的值域：

①$y=2-\sqrt{-x^2+4x}$；

②$y=\dfrac{3-x}{2x+5}$；　③$y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2-2x+2}$；

④$y=2x-3+\sqrt{13-4x}$；

⑤$y=2x+2\sqrt{1-x^2}-1$. $(x\geqslant 0)$

解　①配方法　$y=2-\sqrt{-(x-2)^2+4}$，

$0\leqslant-(x-2)^2+4\leqslant 4$，　$\therefore$　$0\leqslant y\leqslant 2$.

②由 $y=\dfrac{3-x}{2x+5}\Rightarrow x=\dfrac{3-5y}{2y+1}$，$y\neq-\dfrac{1}{2}$，得函数的值域为

$$(-\infty,-1/2)\cup(-1/2,+\infty).$$

③　判别式法　将原函数式变为

$$(y-1)x^2-(2y-1)x+(2y-1)=0.$$

若 $y\neq 1$，$x\in\mathbf{R}$，$\Delta=(2y-1)^2-4(y-1)(2y-1)\geqslant 0$，则 $1/2\leqslant y\leqslant 3/2$.

若 $y=1$，原式 $-x+1=0$，$x=1$，可见 $y=1$ 也是值域中的

一元. 故 $y\in[1/2,3/2]$.

④令 $\sqrt{13-4x}=t\quad(t\geqslant0,x\leqslant13/4)$,则

$$2x=(13-t^2)/2.$$

$y=(13-t^2)/2-3+t=-(t-1)^2/2+4\leqslant4.$

当且仅当 $t=1$ 即 $x=3$ 时, $y_{\max}=4$,故所求值域为 $(-\infty,4]$.

⑤令 $x=\sin\theta\quad(0\leqslant\theta\leqslant\pi/2)$则

$y=2\sin\theta+2\sqrt{1-\sin^2\theta}-1=2\sin\theta+2\cos\theta-1$

$=2\sqrt{2}\sin(\theta+\pi/4)-1.$

$\because\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$, $\sqrt{2}/2\leqslant\sin(\theta+\pi/4)\leqslant1$,

故函数的值域为$[1,2\sqrt{2}-1]$.

三、技能训练题(1.3)

1. 选择题

①函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^{-1}}$的定义域是(　　).

(A)$\{x|x\neq0\}$;　　(B)$\{x|x\neq-1\}$;

(C)$\{x|x\neq0$ 且 $x\neq-1\}$;　　(D)$\{x|x\neq0$ 或 $x\neq-1\}$.

②函数 $y=\sqrt{\sin x}+\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\ln(2x-1)}$的定义域是(　　).

(A)$(1/2,1)\cup(1,2]$;　　(B)$(1/2,2]$;

(C)$(1/2,\pi]$,　　(D)$(1/2,1)\cup(1,\pi/2]$.

③函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$的反函数的定义域是(　　).

(A)$(-1,1)$;(B)R;(C)$[0,+\infty)$;(D)$(\sqrt{2}-1,1]$.

2. 填空题

①函数 $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\lg(5-x)$的定义域是____.

②如果函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-1,0)$，那么函数 $f(\frac{1-x}{1+x})$ 的定义域是____.

③函数 $f(x)=\log_{0.5}(x^2-2x+5)$ 的值域是________.

④函数 $y=x-2\sqrt{x-1}+2$ 的值域为________.

3. 求下列函数的定义域：

①$y=\sqrt{\cos 3x}+\sqrt{9-x^2}$；

②$y=\sqrt{1-\log_a(x+a)}$. ($a>0$ 且 $a\neq 1$).

4. 求下列函数的值域：

①$f(x)=\frac{5x+3}{x-3}$；②$y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$；

③$f(x)=\frac{a+bx}{a-bx}$. ($a>b>0,-1\leqslant x\leqslant 1$)

5. 已知 $f(x)$ 的值域是 $[3/8,4/9]$，试求函数 $g(x)=f(x)+\sqrt{1-2f(x)}$ 的值域.

第 4 课时 二次函数

一、知识点提要

1. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 经配方可以得到

$$y=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a},$$

其图象是一条抛物线，对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点 $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$，$a>0$ 时开口向上，$a<0$ 时开口向下，并在顶点处取极值.

2. 二次函数在闭区间上的最值、判别式和韦达定理的应