

# 高等数学及其应用

刘丽瑶 陈承欢 编著

高等教育出版社

# 高等数学及其应用

Gaodeng Shuxue Jiqi Yingyong

刘丽瑶 陈承欢 编著



高等教育出版社·北京

## 内容提要

本书作者充分调研高等职业教育人才培养目标、教学需求与发展趋势、高职学生学习特点和认知规律,探索“多纲一本”的教材编排模式,为满足不同学习要求和课时需求,将高等数学的9个核心内容“函数、极限、导数、微分、多元函数、不定积分、定积分、微分方程和级数”设置为9个独立的教学单元,其中6个单元为各专业的公共学习模块,多元函数、微分方程和级数3个单元为选学模块,将数学应用案例分为【日常应用】、【经济应用】、【电类应用】、【机类应用】4类,其中【日常应用】类为必学内容,其他3类根据专业需求进行选用,还优选了119个典型应用案例供学生学习。本书以“融合专业、注重能力、突出应用”为指导思想,探索“教、学、用”融为一体的教学模式,深化“应用导向、问题驱动、案例教学”的教学方法,让数学知识与专业情境相融合,使数学方法的学习与数学思维的培养相结合,达到数学应用与素质教育并重。本书充分尊重学生的认知规律和数学的教学规律,设置“分层渐进”的教学流程和学习路径,每个教学单元巧设3个教学层次:概念理解、方法学习和应用实践,面向教学全过程设置11个教学环节:【教学导航】—【引例探析】—【概念认知】—【知识梳理】—【实例精讲】—【释疑解难】—【同步训练】—【应用求解】—【应用拓展】—【单元小结】—【单元考核】。本书试图实现降低高等数学的学习难度,提高学习效率的目标,从而激发每一位学生学习高等数学的兴趣和热情,提升学生的数学应用和举一反三、融会贯通的能力。

本书可作为应用型本科院校、高职高专院校、成人高校及本科院校开办的二级学院各理工科、经贸类、管理类专业的教材,也可作为具有高中文化程度程度的读者自学用书。

## 图书在版编目(CIP)数据

高等数学及其应用/刘丽瑶,陈承欢编著. --北京:  
高等教育出版社,2015.6

ISBN 978-7-04-042678-6

I. ①高… II. ①刘… ②陈… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第093323号

策划编辑 崔梅萍 责任编辑 吴晓丽 封面设计 王洋 版式设计 马敬茹  
插图绘制 郝林 责任校对 刘娟娟 责任印制 尤静

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社址	北京市西城区德外大街4号	网址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
邮政编码	100120		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
印刷	北京四季青印刷厂	网上订购	<a href="http://www.landaco.com">http://www.landaco.com</a>
开本	787mm×1092mm 1/16		<a href="http://www.landaco.com.cn">http://www.landaco.com.cn</a>
印张	21.75	版次	2015年6月第1版
字数	530千字	印次	2015年6月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定价	36.90元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 42678-00



# 前 言

高等数学是高职高专院校各专业必修的一门公共基础课程,在培养高端技能型人才综合素质和可持续发展能力中具有重要作用。近年来,高职高专院校在大力推进高等数学的教学改革,其成果也在不断涌现,也出版了诸多优秀的《高等数学》教材,这些成果和教材都让广大高职院校的师生受益匪浅。我们(湖南铁道职业技术学院数学教学团队)也在不断地探索教学规律和创新教学模式,充分调研高等职业教育人才培养目标、教学需求与发展趋势、高职学生学习特点和认知规律,在教材编排模式、教学模式、教学流程、教学方法等方面进行了大胆创新,试图在以下几个方面有新的突破和作为。

(1) 探索“多纲一本”的教材编排模式,满足不同学习要求和课时需求。

根据学生认知水平和学习要求,组织和编排教学内容,适当安排递进式的学习内容,力求实现基础性、实用性和发展性三方面需求协调统一。将高等数学的9个核心内容“函数、极限、导数、微分、多元函数、不定积分、定积分、微分方程和级数”设置为9个独立的教学单元,其中6个单元为各专业的公共学习模块,多元函数、微分方程和级数3个单元为选学模块,各专业可根据专业培养目标的要求,选学所需的教学内容。同时也将数学应用案例分为【日常应用】、【经济应用】、【电类应用】、【机类应用】4类,其中【日常应用】类为必学内容,其他3类根据专业需求进行选用,还优选了119个典型应用案例,为学生了解其他相关专业的应用需求提供方便,有利于拓展学生的知识面,充分满足学生的个性化需求和职业发展需求,真正体现学生为主体的职业教育思想。

(2) 以“融合专业、注重能力、突出应用”为指导思想,探索“教、学、用”融为一体的教学模式,让数学知识与专业情境相融合,数学方法的学习与数学思维的培养相结合,数学应用与素质教育并重。

与专业情境融合。将专业学习中所需的数学知识、数学应用融为一体,探索专业课程与数学课程有效整合的路径,在高等数学中解决专业中的数学需求,通过剖析专业应用案例,帮助学生学会用数学知识与方法分析、解决实际问题。让学生认为数学有用,也能预先了解数学在专业中的用途,提前了解专业课程中数学的应用。

与工作实际结合。教材中的数学案例设置为与学生的生活或者未来的工作息息相关的问题,减少无实际意义的纯数学计算,尽量将抽象思维转化为形象思维,提升学生应用数学解决工作、生活、创业过程中的实际问题的能力。激起学生探究数学应用的愿望,学好高等数学的同时,也为未来的工作奠定了坚实的基础。

与素养教育契合。注重对学生的数学思想方法和数学应用能力的培养,让学生在解决实际问题中学习,培养其创新思维与实践能力,激发学生学习数学的热情,提高学生的数学素养,让学生领会到数学素养也是学生的基本素养之一,使传授数学知识和培养学生的数学素养相契合。

(3) 尊重学生的认知规律和数学的教学规律,设置“分层渐进”的教学流程和学习路径,降

低高等数学的学习难度,提升学生的数学应用能力。

每个教学单元巧设3个教学层次:概念理解、方法学习和应用实践,面向教学全过程设置11个教学环节:【教学导航】—【引例探析】—【概念认知】—【知识梳理】—【实例精讲】—【释疑解难】—【同步训练】—【应用求解】—【应用拓展】—【单元小结】—【单元考核】。设法实现以下三化:

**概念认知案例化** 通过生活实例和工作实际,引出数学概念,解决入门难的问题,有利于学生认识数学内容的实际背景和应用价值,使学生能感受数学源自生活、工作实际,从而增加亲和力。

**理论阐述通俗化** 用通俗易懂的语言描述数学理论知识的本质,采用数形结合的方法,尽量借助图形、图像和数表等多种途径将抽象的数学知识形象、直观、生动地呈现出来。

**知识应用多元化** 通过大量浅显、贴近生活的数学应用案例,一方面使理论与实践相得益彰,突出用高等数学分析、解释、解决实际问题与实际现象;另一方面可潜移默化地培养学生创新意识,提升学生的数学应用能力。

(4) 深化“应用导向、问题驱动、案例教学”的教学方法,提高学习效率,着力培养学生举一反三、融会贯通的能力。

本着重知识应用、重能力培养、重素质教育的思路,以“学用数学”为主线贯穿整个内容体系,注重加强数学的实际应用,强化应用高等数学知识解决实际问题的能力,在数学应用中培养思维能力和创新意识,充分发挥高等数学对形成学生职业能力和职业素养的重要支撑作用。以“引出问题—阐述知识—实现应用”的思路呈现教学内容,数学概念的引入力求从实际问题出发,突出问题的实际背景,引导学生积极参与解决问题的教学过程。以案例教学的方式,用典型实例引出概念,并用通俗简洁的语言阐述概念的内涵和实质,着重讲解基本概念、基本理论和基本方法,对基本概念和基本理论尽量通过实例说明其实际背景和应用价值,由此加深对基本概念和基本理论的理解。在处理定理与公式的推导与证明方面,避免逢理必证或逢理不证的极端现象,而是本着量力而行的原则,合理取舍教学内容,少一些数学公式的繁琐推导,结合图形描述直观形象地加以适当解释与推导,使数学课程的学习由抽象变得形象,由繁琐变得简单,由索然无味变得生动有趣,从而激发每一位学生学习高等数学的兴趣和热情,让每一位学生都饶有兴趣地学习高等数学,“创造最适合高职学生的教育”应当成为高职教育的共识。

本教材由刘丽瑶、陈承欢教授编著,黄晓津、朱彬彬、张杰、刘东海、陈雄波、杨茜玲、李寿军、郭文池、刘荣胜、吴献文、颜珍平和张丽芳等多位老师参与了教学案例的设计与部分章节的编写、校对和整理工作。本教材是湖南铁道职业技术学院与高等教育出版社校社合作的教学改革成果之一,在教材的编写过程,也得到了高等教育出版社的王冰老师、曹京华老师和多位编辑的悉心指导,在此一并表示感谢!

由于编者水平有限,教材中的疏漏之处敬请专家与读者批评指正。

编者  
2015年5月

# 《高等数学及其应用》课程设计与说明

## 1. 教学单元设计

教学单元	说 明
单元 1 函数及其应用	公共必修
单元 2 极限及其应用	公共必修
单元 3 导数及其应用	公共必修
单元 4 微分及其应用	公共必修
单元 5 二元函数微分法及其应用	选修
单元 6 不定积分及其应用	公共必修
单元 7 定积分及其应用	公共必修
单元 8 微分方程及其应用	选修
单元 9 级数及其应用	选修

## 2. 教学流程设计

教学环节	说 明
环节 1:【教学导航】	明确教学目标、教学重点和教学难点
环节 2:【引例探析】	通过分析典型实例,引出高等数学的基本概念,对它有初步印象
环节 3:【概念认知】	集中分析讲解基本概念、基本定义、基本特性和几何意义,为后续解题提供理论指导,解题时如果遇到概念问题可直接在此环节进行查找
环节 4:【知识梳理】	集中分析讲解基本定理、基本性质、基本公式和基本方法
环节 5:【实例精讲】	为进一步理解概念、熟悉公式和方法,有针对性的分析讲解典型实例
环节 6:【释疑解难】	对学生经常出错的问题进行分析,一方面预防出错,另一方面当出现错误时能尽快找到解决方法
环节 7:【同步训练】	设置必要的习题,让学生动手练习,验证知识是否掌握和方法是否会用
环节 8:【应用求解】 (1) 日常应用 (2) 经济应用 (3) 电类应用 (4) 机类应用	学习数学知识主要目的是为了应用,运用所学知识解决生活、工作中的实际问题。这里设置了日常应用、经济应用、电类应用和机类应用 4 类典型应用问题,其中日常应用为必学内容,其他 3 类根据教学需要进行选择性讲解即可,同时也为学生了解其他相关专业的应用需求提供了方便,有利于拓展学生的知识面,满足学生的个性化需求和职业发展需求

教学环节	说 明
环节 9:【应用拓展】	设置必要的实际应用问题,让学生自行求解
环节 10:【单元小结】	对本单元关键知识和常用方法进行小结
环节 11:【单元考核】	每个单元设置一个考核环节,检查知识掌握情况和训练解决实际问题的能力



# 目 录

单元1 函数及其应用 .....	1
【教学导航】 .....	1
【引例探析】 .....	1
【概念认知】 .....	2
【知识梳理】 .....	5
1.1 函数的三要素 .....	5
1.2 函数的表示方法 .....	7
1.3 函数的性质 .....	7
1.4 基本初等函数 .....	9
1.5 复合函数 .....	12
1.6 初等函数 .....	13
1.7 分段函数 .....	13
1.8 反函数 .....	14
【实例精讲】 .....	14
【实例1-1】 求函数的定义域 .....	14
【实例1-2】 求函数的值 .....	15
【实例1-3】 分解与组合复合函数为基本初等函数 .....	16
【实例1-4】 求函数的反函数 .....	16
【释疑解难】 .....	17
【同步训练】 .....	18
【应用求解】 .....	19
【日常应用】 .....	19
【经济应用】 .....	19
【电类应用】 .....	22
【机类应用】 .....	23
【应用拓展】 .....	23
【单元小结】 .....	25
【单元考核】 .....	25
单元2 极限及其应用 .....	28
【教学导航】 .....	28
【引例探析】 .....	29
【概念认知】 .....	31



【知识梳理】	37
2.1 无穷小与无穷大	37
2.2 极限的运算	39
2.3 函数的连续性	44
【实例精讲】	51
【实例 2-1】 利用函数的左、右极限求函数的极限	51
【实例 2-2】 利用恒等变形方法求极限	52
【实例 2-3】 利用极限的运算法则求极限	53
【实例 2-4】 利用两个重要极限求极限	53
【实例 2-5】 利用同阶无穷小求极限	54
【实例 2-6】 判断函数的连续性与间断点	54
【实例 2-7】 判断方程在指定区间内是否存在根	55
【释疑解难】	55
【同步训练】	56
【应用求解】	59
【日常应用】	59
【经济应用】	60
【电类应用】	60
【机类应用】	61
【应用拓展】	62
【单元小结】	64
【单元考核】	65
单元 3 导数及其应用	67
【教学导航】	67
【引例探析】	68
【概念认知】	70
【知识梳理】	74
3.1 应用导数的定义求基本初等函数的导数	74
3.2 基本初等函数的求导公式	74
3.3 导数的四则运算法则	75
3.4 复合函数的求导法则	76
3.5 反函数的求导法则	78
3.6 隐函数及参数式函数的求导法则	78
3.7 高阶导数	80
3.8 中值定理	82
3.9 应用洛必达法则求极限	84
3.10 函数单调性的判定	88
3.11 函数极值及求解	90

3.12	函数最值及求解 .....	92
3.13	曲线的凹凸性与拐点及求解 .....	94
3.14	曲线的渐近线及求解 .....	96
<b>【实例精讲】</b>	.....	97
<b>【实例 3-1】</b>	求曲线的切线方程与法线方程 .....	97
<b>【实例 3-2】</b>	探析函数的连续性与可导性 .....	97
<b>【实例 3-3】</b>	探析函数可导性的应用 .....	98
<b>【实例 3-4】</b>	应用导数的定义求基本初等函数的导数 .....	98
<b>【实例 3-5】</b>	应用导数的求导公式和四则运算法则求函数的导数 .....	99
<b>【实例 3-6】</b>	应用复合函数的求导法则求函数的导数 .....	100
<b>【实例 3-7】</b>	应用反函数的求导法则求函数的导数 .....	101
<b>【实例 3-8】</b>	应用隐函数及参数式函数的求导法则求函数的导数 .....	102
<b>【实例 3-9】</b>	应用高阶导数的求导法则求函数的导数 .....	103
<b>【实例 3-10】</b>	应用洛必达法则求函数的极限 .....	104
<b>【实例 3-11】</b>	求函数的单调区间并判断各区间的单调性 .....	106
<b>【实例 3-12】</b>	求函数的极值 .....	106
<b>【实例 3-13】</b>	求函数的最大值或最小值 .....	107
<b>【实例 3-14】</b>	求函数的凹凸区间和拐点 .....	108
<b>【释疑解难】</b>	.....	109
<b>【同步训练】</b>	.....	111
<b>【应用求解】</b>	.....	114
<b>【日常应用】</b>	.....	114
<b>【经济应用】</b>	.....	115
<b>【电类应用】</b>	.....	118
<b>【机类应用】</b>	.....	119
<b>【应用拓展】</b>	.....	120
<b>【单元小结】</b>	.....	124
<b>【单元考核】</b>	.....	126
<b>单元 4 微分及其应用</b>	.....	128
<b>【教学导航】</b>	.....	128
<b>【引例探析】</b>	.....	128
<b>【概念认知】</b>	.....	130
<b>【知识梳理】</b>	.....	132
4.1	基本初等函数的微分公式与微分运算法则 .....	132
4.2	微分在近似计算中的应用 .....	133
<b>【实例精讲】</b>	.....	135
<b>【实例 4-1】</b>	求函数的微分 .....	135
<b>【实例 4-2】</b>	计算近似值 .....	135

【实例 7-1】	利用牛顿—莱布尼茨公式计算定积分 .....	227
【实例 7-2】	利用定积分的换元积分法计算定积分 .....	228
【实例 7-3】	利用定积分的分部积分法计算定积分 .....	228
【实例 7-4】	利用广义积分方法计算定积分 .....	229
【释疑解难】	.....	230
【同步训练】	.....	231
【应用求解】	.....	234
【日常应用】	.....	234
【经济应用】	.....	237
【电类应用】	.....	240
【机类应用】	.....	241
【应用拓展】	.....	243
【单元小结】	.....	246
【单元考核】	.....	248
单元 8 微分方程及其应用	.....	250
【教学导航】	.....	250
【引例探析】	.....	251
【概念认知】	.....	252
【知识梳理】	.....	255
8.1 可分离变量的一阶微分方程及求解方法	.....	255
8.2 一阶线性微分方程及求解方法	.....	256
8.3 可降阶的高阶微分方程及求解方法	.....	258
8.4 二阶线性微分方程及求解方法	.....	260
【实例精讲】	.....	261
【实例 8-1】	求解可分离变量的微分方程 .....	261
【实例 8-2】	求解一阶线性齐次微分方程 .....	262
【实例 8-3】	求解一阶线性非齐次微分方程 .....	263
【实例 8-4】	求解可降阶的高阶微分方程 .....	264
【实例 8-5】	求解二阶常系数线性齐次微分方程 .....	265
【释疑解难】	.....	265
【同步训练】	.....	267
【应用求解】	.....	269
【日常应用】	.....	269
【经济应用】	.....	271
【电类应用】	.....	272
【机类应用】	.....	276
【应用拓展】	.....	277
【单元小结】	.....	279

【单元考核】 .....	279
单元9 级数及其应用 .....	282
【教学导航】 .....	282
【引例探析】 .....	283
【概念认知】 .....	284
【知识梳理】 .....	287
9.1 常数项级数及其审敛法 .....	287
9.2 幂级数及其收敛性 .....	294
9.3 函数展开成幂级数 .....	297
9.4 傅里叶级数 .....	299
【实例精讲】 .....	303
【实例9-1】 利用级数的收敛定义判断其收敛性 .....	303
【实例9-2】 利用级数的基本性质判断其收敛性 .....	304
【实例9-3】 利用正项级数审敛法判断级数的收敛性 .....	305
【实例9-4】 求幂级数的收敛域 .....	306
【实例9-5】 将函数 $f(x)$ 展开成幂级数 .....	306
【实例9-6】 将函数 $f(x)$ 展开为傅里叶级数 .....	307
【释疑解难】 .....	309
【同步训练】 .....	310
【应用求解】 .....	311
【日常应用】 .....	311
【经济应用】 .....	312
【电类应用】 .....	313
【机类应用】 .....	314
【应用拓展】 .....	315
【单元小结】 .....	316
【单元考核】 .....	317
附录 习题与考核参考答案 .....	320
参考文献 .....	333



# 单元 1 函数及其应用

在研究事物内部、事物与事物各因素之间的关系时,我们通常通过对客观事物的分析,建立各因素之间的关系式,这种关系式可以充分揭示各因素之间的数量关系,也是我们揭示事物发展规律,对事物进行分析和研究的重要基础,这种事物各因素之间的关系可用函数进行描述.

1837年,德国数学家狄利克雷(Dirichlet,1805—1859)提出的函数定义,使函数关系更加明确.函数是微积分学的主要研究对象,它能准确地刻画各事物或各因素之间在数量上的依赖关系.



## 【教学导航】

教学目标	(1) 理解函数的概念,会求函数的定义域及值域,会绘制简单分段函数的图像 (2) 掌握函数的基本性质,会判断函数的单调性、奇偶性、有界性和周期性 (3) 掌握基本初等函数的图像和主要性质 (4) 理解复合函数的概念,掌握复合函数的复合过程,能熟练地进行复合函数的分解 (5) 理解初等函数的概念 (6) 掌握常用函数的典型应用,能根据一些实际问题建立函数
教学重点	集合与函数的概念、求函数的定义域、分段函数、复合函数
教学难点	分段函数、复合函数



## 【引例探析】

### 【引例 1-1】 计算网上购书金额

#### 【问题描述】

希望读书社到博库书城购买励志书籍《从来没有太晚的开始》,该书原价为 29.8 元,购书 7 折优惠,即购一本图书实际价格为 20.86 元,如果购买  $x$  本该书,计算应付的金额.

### 【问题求解】

根据问题描述可知: 购买一本书, 应付金额为  $1 \times 29.8 \times 0.7 = 1 \times 20.86$  元, 购买 2 本书, 应付金额为  $2 \times 20.86$  元, 购买 3 本书, 应付金额为  $3 \times 20.86$  元, 由此可以推断购  $x$  本书, 应付金额为  $x \times 20.86$  元, 即在集合  $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  中任取一个值, 按照乘以 20.86 的法则, 在集合  $M = \{0, 20.86, 41.72, 62.58, \dots\}$  中有唯一的一个值与之对应, 如果用  $x$  表示  $\mathbf{N}$  中的任意一个值, 用  $y$  表示  $M$  中相对应的值, 那么  $y = 20.86x$ , 反映了实际问题中购买数量  $x$  和应付金额  $y$  之间的函数关系.

## 【引例 1-2】 计算正方形的面积

### 【问题描述】

已知正方形的边长为  $x$ , 求该正方形的面积  $y$ .

### 【问题求解】

由于正方形的面积  $y$  等于其边长的平方, 对于边长为 1 的正方形, 其面积为  $1^2 = 1$ , 对于边长为 2 的正方形, 其面积为  $2^2 = 4$ , 对于边长为 3 的正方形, 其面积为  $3^2 = 9$ , 对于边长为 4 的正方形, 其面积为  $4^2 = 16$ , 以此类推, 对于边长为  $x$  的正方形, 其面积为  $x^2$ , 即在集合  $L = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  中任取一个值, 按照其平方的法则, 在集合  $A = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$  中有唯一的一个值与之相对应. 如果用  $x$  表示  $L$  中的任意一个值,  $y$  表示  $A$  中相对应的值, 那么  $y = x^2$  反映了正方形的边长  $x$  与正方形面积  $y$  之间的函数关系.



## 【概念认知】

### 1. 常量与变量的概念

我们首先做一个实验, 掷同一铅球数次, 观察铅球的质量和体积在掷球过程中都保持稳定的数值, 即为常量; 而投掷距离、上抛角度、用力大小在不同的掷球过程会发生变化, 为不同的数值, 即为变量.

#### 【定义 1.1】 变量

在某一过程中始终保持一定数值的量称为常量; 在某一过程中可以取不同数值的量称为变量.

例如, 商品的购买数量, 教室的长、宽、高等都属于常量; 教室的温度、汽车运行的速度等都属于变量.

(1) 常量一般用  $a, b, c$  等英文字母表示, 变量用  $x, y, z, u, t$  等英文字母表示.

(2) 常量为一定值, 在数轴上可用定点表示, 变量代表该量可能取的任一值, 在数轴上表示一个动点. 例如,  $x \in (a, b)$  表示  $x$  可代表  $(a, b)$  中的任一个数. 常量可以看作变量的一种特例.

(3) 常量与变量是相对而言的, 同一量在不同场合下, 可能是常量, 也可能是变量. 例如在一

天或在一年中观察某小孩的身高;从小范围和大范围而言,重力加速度可为常量或变量.然而,一旦环境确定了,同一量不能既为常量又为变量,二者必居其一.

## 2. 集合的概念

### 【定义 1.2】 集合

集合是具有某种特定性质的事物所组成的全体,通常用大写英文字母  $A, B, C, \dots$  来表示,组成集合的各个事物称为该集合的元素.形式为  $A = \{x \mid x \text{ 所具有的特征}\}$ .

例如,实数的集合用  $\mathbf{R}$  表示,有理数的集合用  $\mathbf{Q}$  表示,整数的集合用  $\mathbf{Z}$  表示,自然数的集合用  $\mathbf{N}$  表示.

【说明】 以后不特别说明的情况下考虑的集合均为数集.

若事物  $a$  是集合  $M$  的一个元素,就记  $a \in M$  (读  $a$  属于  $M$ );若事物  $a$  不是集合  $M$  的一个元素,就记  $a \notin M$  或  $a \bar{\in} M$  (读  $a$  不属于  $M$ );集合有时也简称为集.

#### (1) 集合的特点

① 对于一个给定的集合,要具有确定性的特征,即对于任何一个事物或元素,能够判断它属于或不属于给定的集合,二者必居其一.

② 对于一个给定的集合,同一个元素在同一个集合里不能重复出现,完全相同的元素,不论数量多少,在一个集合里只算作一个元素.

③ 若一集合只有有限个元素,就称为有限集;否则称为无限集.

#### (2) 集合的基本关系

① 子集,若集合  $A$  的元素都是集合  $B$  的元素,即若有  $x \in A$ ,则必有  $x \in B$ ,就称  $A$  为  $B$  的子集,记为  $A \subset B$  或  $B \supset A$  (读  $B$  包含  $A$ ).

显然:  $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ .

② 相等集,若  $A \subset B$ ,同时  $B \subset A$ ,则称  $A, B$  相等,记为  $A = B$ .

③ 空集,不含任何元素的集合称为空集,记为  $\emptyset$ .例如,  $\{x \mid x^2 + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\} = \emptyset$ ,  $\{x \mid 2^x = -1\} = \emptyset$ ,空集是任何集合的子集,即  $\emptyset \subset A$ .

#### (3) 集合的表示方法

表示集合的方法,常见的有列举法和描述法两种.

① 列举法,按任意顺序列出集合的所有元素,并用花括号  $\{\}$  括起来,这种方法称为列举法.

例如,引例 1-2 中的正方形边长的集合表示为  $L = \{x \mid x = 1, 2, 3, 4, \dots\}$ ,全体自然数的集合表示为  $\mathbf{N} = \{x \mid x = 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ .

② 描述法,设  $P(a)$  为某个与  $a$  有关的条件或法则,把满足  $P(a)$  的所有元素  $a$  构成的集合  $A$  表示为  $A = \{a \mid P(a)\}$ ,这种方法称为描述法.

例如,全体实数构成的集合表示为  $\mathbf{R} = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$ .

例如,由不等式  $x - 3 > 2$  的解构成的集合  $A$  可表示为  $A = \{x \mid x > 5\}$ .

例如,由抛物线  $y = x^2 + 5$  上的点  $(x, y)$  构成的集合  $B$ ,可表示为  $B = \{(x, y) \mid y = x^2 + 5\}$ .

#### (4) 应用区间表示集合

区间是介于两个实数之间的全体实数.

设  $a$  和  $b$  都是实数,且  $a < b$ ,数集  $\{x \mid a < x < b\}$  称为开区间,记作  $(a, b)$ ,即  $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ .  $a$  和  $b$  称为开区间  $(a, b)$  的端点,这里  $a \notin (a, b), b \notin (a, b)$ .

数集  $\{x \mid a \leq x \leq b\}$  称为闭区间,记作  $[a, b]$ ,即  $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ .  $a$  和  $b$  称为闭区间  $[a, b]$  的端点,这里  $a \in [a, b], b \in [a, b]$ .

类似地可以说明:

$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}, (a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ ,  $[a, b)$  和  $(a, b]$  都称为半开区间.

以上区间都称为有限区间,  $b - a$  称为这些区间的长度. 从数轴上看,有限区间是长度为有限的线段,闭区间  $[a, b]$  与开区间  $(a, b)$  在数轴上可以表示出来. 此外还有无限区间,引进记号“ $+\infty$ ”(读作“正无穷大”)及“ $-\infty$ ”(读作“负无穷大”),则可类似地表示下面的无限区间:

$[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x\}, (-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$ .

全体实数的集合也可记作  $(-\infty, +\infty)$ ,它也是无限区间.

常见的区间类型及其表示方法如表 1-1 所示.

表 1-1 常见的区间类型及其表示方法

区间类型	开区间	闭区间	半开区间	无限区间
范围表示法	$(a, b)$	$[a, b]$	$(a, b], [a, b)$	$(-\infty, +\infty)$
不等式表示法	$a < x < b$	$a \leq x \leq b$	$a < x \leq b, a \leq x < b$	$-\infty < x < +\infty$

### (5) 应用邻域表示集合

设  $\delta$  是任一正数,  $a$  为某一实数,把数集  $\{x \mid |x - a| < \delta\}$  称为点  $a$  的  $\delta$  邻域,记作  $U(a, \delta)$ ,即  $U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}$ . 点  $a$  称为这邻域的中心,  $\delta$  称为这邻域的半径,如图 1-1 所示.

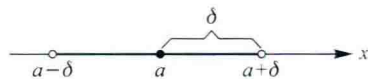


图 1-1 邻域的中心与半径

由于  $a - \delta < x < a + \delta$  相当于  $|x - a| < \delta$ ,因此  $U(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$ .

因为  $|x - a|$  表示点  $x$  与点  $a$  间的距离,所以  $U(a, \delta)$  表示与点  $a$  距离小于  $\delta$  的一切点  $x$  的全体.

例如,  $|x - 2| < 1$ ,为以点  $a = 2$  为中心,以 1 为半径的邻域,也就是开区间  $(1, 3)$ .

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉,点  $a$  的  $\delta$  邻域去掉中心  $a$  后,称为点  $a$  的去心的  $\delta$  邻域,记作  $U(\hat{a}, \delta)$ ,即  $U(\hat{a}, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ ,这里  $0 < |x - a|$  就表示  $x \neq a$ .

## 3. 函数的概念

在某个变化过程中出现两个变量,通常不是彼此独立地变化,而是其中一个变量的变化会引起另一个变量随它作相应的变化. 其中一个是主动变化的量,另一个是被动变化的量. 例如,由于时间的变化,使得温度随之相应地变化,时间是主动变化的量,而温度是被动变化的量,在时间与时间这两个变量之间存在着对应的关系,实际上这种对应关系由某种对应法则所决定,这种关系被称为变量之间的函数关系.



### 【定义 1.3】 函数

设在某一变化过程中有两个变量  $x$  和  $y$ , 当变量  $x$  在一个给定的非空数集  $D$  内任意取某一个数值时, 按照一定的对应法则  $f$ , 变量  $y$  总有唯一确定的数值与之对应, 则称变量  $y$  为变量  $x$  的函数, 记作  $y=f(x), x \in D$ , 其中  $x$  称为自变量,  $y$  称为函数或因变量, 数集  $D$  称为该函数的定义域.

定义的示意图如图 1-2 所示.

函数的本质是对应法则  $f$ , 它反映的是变量  $x$  与  $y$  之间的一种依存关系, 不同的函数对应法则需使用不同的字母表示. 例如, 我们考察自变量  $x$  的两个函数, 为了避免混淆, 函数可分别记作  $y=u(x)$  与  $y=g(x)$ .

在函数定义中, 若对每一个  $x \in D$ , 如果自变量取定值时, 对应的函数值  $y=f(x)$  是唯一的, 那么这样的函数叫单值函数. 例如,  $y=\cos x$  是单值函数. 如果自变量取定值时对应的函数值  $y$  有两个或两个以上, 那么这样的函数叫多值函数. 例如,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  是多值函数.

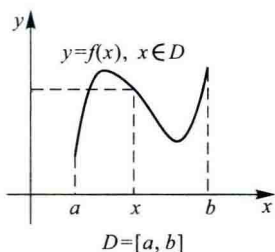


图 1-2 函数关系示意图

我们这里所讲的函数是指单值函数, 也就是说, 对于每一个  $x$  值只能对应变量的一个值. 以后若没有特别声明, 讨论的都是单值函数.



## 【知识梳理】

### 1.1 函数的三要素

函数概念反映了自变量和因变量之间的依赖关系, 它涉及函数的三要素: 函数的定义域、对应法则和值域. 很明显, 只要定义域和对应法则确定了, 值域也就随之确定. 因此, 定义域和对应法则是确定函数的两个关键要素.

图 1-3 简明地标注了函数的自变量、因变量、对应法则、定义域和值域等基本要素.

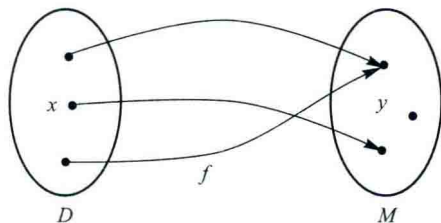


图 1-3 函数的基本要素

#### 1. 对应法则

符号“ $f$ ”表示自变量  $x$  与函数  $y$  的某种对应关系. 例如,  $y=f(x)=5x^2+3x-1$ , 它的对应关