全国高等农林院校“十一五”规划教材

高等数学

下册

工科类专业用

吴 坚 主编

中国农业出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

高 等 数 学

下 册

工科类专业用

吴 坚 主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册/吴坚主编．—北京：中国农业出版社，2006.8

全国高等农林院校“十一五”规划教材

ISBN 7-109-11022-2

Ⅰ．高…　Ⅱ．吴…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 083774 号

中国农业出版社出版

（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）

（邮政编码 100026）

出版人：傅玉祥

责任编辑　朱　雷

中国农业出版社印刷厂印刷　　新华书店北京发行所发行

2006 年 8 月第 1 版　　2006 年 8 月北京第 1 次印刷

开本：820mm×1080mm　1/16　　印张：17

字数：401 千字

定价：24.80 元

主　编　吴　坚(安徽农业大学)
副主编　王来生(中国农业大学)
崔文善(莱阳农学院)
刘应安(南京林业大学)
郑大川(云南农业大学)
张长勤(安徽农业大学)
参　编　甄　苓(中国农业大学)
蒋华松(南京林业大学)
孙丹娜(莱阳农学院)
吴瑞武(云南农业大学)
李丽华(河北科技师范学院)

内 容 提 要

本书是全国高等农林院校"十一五"规划教材。我们按照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会制定的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》进行编写，兼顾农林院校的特点，结合多年来的教学体会，对教材进行了一些有益的改革尝试。

全书分上、下两册编写，共九章。

上册内容包括：函数的极限与连续，一元函数微分学及其应用，一元函数积分学及其应用，微分方程等四章。

下册内容包括：空间解析几何，多元函数微分学，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数等五章。本书可以作为高等农林院校工科类专业高等数学课程教材，也可供其他普通高等学校理工类非数学专业选用。

前　言

本书是全国高等农林院校"十一五"规划教材，主要面向高等农林院校的理工科非数学类专业，也可适用于普通高等院校的理工科非数学类专业。该教材按照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会制定的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》进行编写，兼顾到高等农林院校的特点，旨在传授基本数学知识，提高读者的数学素养和能力，培养读者运用数学知识分析和解决实际问题的能力。

高等数学课程是工科类专业十分重要的一门基础课程，是许多后继课程的基础，对培养具有良好科学素养以及应用数学知识解决实际问题的人才起着重要作用。在教材编写过程中，我们主要考虑以下几个方面：(1)考虑与中学教材的衔接，删去了传统的初等函数一节，拓宽和加强了数学基础。因此在极限理论上，我们通过讨论实数的完备性，从确界定理出发，讲解并建立了极限论。凡所涉及的定理如柯西收敛准则，闭区间上连续函数的性质等都给予严格的证明。(2)高等数学的概念和方法都是从研究各种物质形态以及各种运动形式的数量关系而产生的。教材力求在引入重要概念和方法时，对它们的实际背景给予说明。(3)教材还注重引入一些数学发展史，强调数学的应用，以提高学生的数学素养和分析解决实际问题的能力。(4)尽量使内容安排趋于合理，符合学生的认知规律。(5)编者精选了例题和习题，力求使例题不仅配合所授内容，而且让学生能够从中获取分析问题、解决问题的思想和方法。

安徽农业大学吴坚编写第一章和第二章，中国农业大学王来生、甄苓编写第七章，莱阳农学院崔文善、孙丹娜编写第六章，南京林业大学刘应安、蒋华松编写第五章，安徽农业大学汪宏喜编写第四章，安徽农业大学张长勤编写第八章，云南农业大学郑大川编写第九章，河北科技师范学院李丽华编写第三章(四至五节)，仲恺农业技术学院杨逢建编写第三章(一至二节)。全书由吴坚统稿。

囿于学识，本书的错误和不足之处在所难免，恳请广大读者和授课教师提出批评和建议。

吴　坚

2006年3月9日

目　　录

第五章　空间解析几何与向量代数

在平面上建立平面直角坐标系，使平面几何的问题转化为代数问题，由此产生了平面解析几何，给平面几何的研究增添了新的活力，同时，在解决平面几何问题时，可以利用平面的概念和代数分析的方法更加有效地解决平面几何问题．现在，我们可以用类似的思想，在空间中建立空间直角坐标系，利用空间的概念和代数分析的方法有效地解决空间几何问题．

本章首先建立空间直角坐标系，在此基础上介绍研究空间几何问题的重要工具之一——向量代数，最后讨论空间的平面、直线、曲线和二次曲面的内容．

第一节　空间直角坐标系

1.1　空间点的直角坐标

过空间的一个定点 O 作三条相互垂直的直线，并规定方向和单位，这三条直线分别叫做 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），统称为**坐标轴**．这样的三条有向直线构成**空间直角坐标系**，定点 O 称为**坐标原点**．通常把 x 轴和 y 轴放置在水平平面上，而 z 轴则是铅直放置，并取从后到前为 x 轴的正方向，从左到右为 y 轴的正方向，从下到上为 z 轴的正方向（右手系）．习惯上，三条坐标轴取相同长短的长度单位．每两条坐标轴所确定的平面称为**坐标面**，由此可确定三张坐标面：由 x 轴和 y 轴所确定的坐标面称为 xOy 坐标面；由 y 轴和 z 轴所确定的坐标面称为 yOz 坐标面；由 z 轴和 x 轴所确定的坐标面称为 zOx 坐标面（图 5.1.1）．

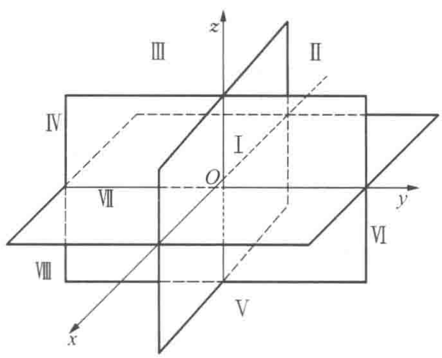

图 5.1.1

三张坐标面将空间分为八个部分，每个部分称为一个**卦限**，在 xOy 坐标面的上半部分，由 x 轴的正方向开始按逆时针方向依次为Ⅰ卦限、Ⅱ卦限、Ⅲ卦限、Ⅳ卦限；在 xOy 坐标面的下半部分，由 x 轴的正方向开始按逆时针方向依次为Ⅴ卦限、Ⅵ卦限、Ⅶ卦限、Ⅷ卦限．

在空间直角坐标系中，我们可以建立起空间的点与数组之间的关系．

设 M 为空间一已知点．过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴，它们与 x 轴、y 轴和 z 轴的交点依次为 P、Q、R（图 5.1.2），这三点在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标依次为 x、y、z．于是空间的一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 x,y,z；反过来，已知一有序数组 x,y,z，可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P，可以在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q，可以在 z 轴上取坐标为 z 的点 R，然后过点

P、Q、R 分别作与 x 轴、y 轴和 z 轴垂直的平面，这三张垂直平面的交点 M 便是由有序数组 x,y,z 所确定的唯一的点．这样，就建立了空间的点 M 和有序数组 x,y,z 之间的一一对应关系，数组 x,y,z 就叫做点 M 的坐标，并依次称 x,y,z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标．坐标为 x,y,z 的点 M 通常记作 $M(x,y,z)$.

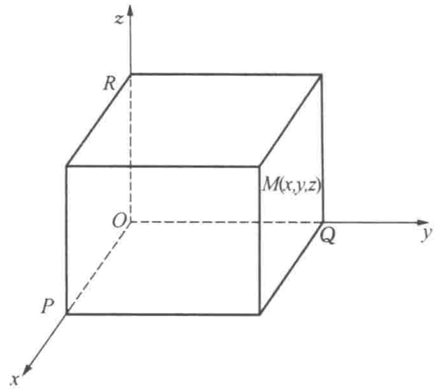

图 5.1.2

坐标面上的点和坐标轴上的点，其坐标都有一定的特征．如果点 M 在 yOz 坐标面上，则 $x=0$；同样地，在 zOx 坐标面上，则 $y=0$；在 xOy 坐标面上，则 $z=0$. 如果点 M 在 x 轴上，则 $y=z=0$；同样地，在 y 轴上，则 $z=x=0$；在 z 轴上，则 $x=y=0$. 如果 M 为坐标原点，则 $x=y=z=0$.

1.2　空间两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间的两点．为了用两点的坐标来表达它们间的距离 d．过点 M_1、M_2 各作三个分别与三条坐标轴垂直的平面，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 5.1.3).

由于 ΔM_1NM_2 为直角三角形，$\angle M_1NM_2$ 为直角，所以 $d^2=|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2$.

又 ΔM_1PN 为直角三角形，且 $|M_1N|^2=|M_1P|^2+|PN|^2$，所以 $d^2=|M_1M_2|^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2$.

又由于

$$|M_1P|=|P_1P_2|=|x_1-x_2|,$$
$$|PN|=|Q_1Q_2|=|y_1-y_2|,$$
$$|NM_2|=|R_1R_2|=|z_1-z_2|,$$

所以

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

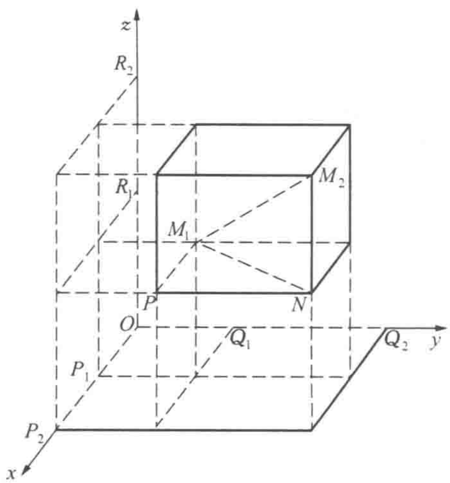

图 5.1.3

这就是空间两点间距离公式，是平面两点间距离公式的推广．

特别地，点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 5.1.1　求证以 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形为等腰直角三角形．

证　因为 $|AB|^2=(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2=49$,

$$|AC|^2=(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2=49,$$
$$|BC|^2=(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2=98,$$

所以 $|AB|^2=|AC|^2$，且 $|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2$，即$\triangle ABC$为等腰直角三角形.

例 5.1.2　在 y 轴上求与点 $P(2,3,-4)$ 和 $Q(2,7,0)$ 等距离的点.

解　因为所求的点在 y 轴上，所以设所求的点为 $M(0,y,0)$，依题意有

$$|MP|^2=|MQ|^2,$$

即
$$(2-0)^2+(y-3)^2+(0+4)^2=(2-0)^2+(y-7)^2+(0-0)^2,$$

解得
$$y=3,$$

所以，所求的点为(0,3,0).

习　题　5.1

1. 在空间直角坐标系中，标定下列各点的位置：
   $A(2,1,3)$，　$B(-3,1,5)$，$C(1,-2,3)$，
   $D(-2,-3,6)$，$E(2,4,-2)$，$F(1,-2,-4)$.
2. 三条坐标轴：x 轴，y 轴，z 轴上的点有什么特征？
3. 三张坐标平面：xOy 面，yOz 面，zOx 面上的点有什么特征？
4. 求点(2,−1,5)关于原点的对称点？
5. 求点(4,3,−2)关于三条坐标轴的对称点？
6. 求点(1,−2,−6)关于三张坐标面的对称点？
7. 在 z 轴上求与点 $A(2,3,4)$ 和 $B(-2,4,1)$ 等距离的点.
8. 求证以 $P(4,3,1)$，$Q(7,1,2)$，$R(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形为等腰三角形.

第二节　向量的线性运算

2.1　向量的概念

在工程技术和科学实验中，经常会遇到这样一些物理量，如位移、速度、加速度、力、力矩等，它们不仅有大小，而且有方向，这种既有大小又有方向的量称为向量(或矢量). 在数学中常用一条有方向的线段，即有大小长度的有向线段来表示向量.

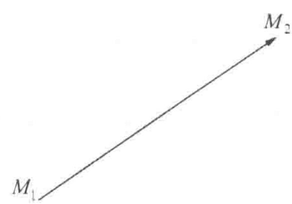

图 5.2.1

以 M_1 为起点，M_2 为终点的有向线段表示的向量，用记号 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 表示(图 5.2.1). 向量有时也可用粗体字母或用字母上方加箭头来表示，如 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{F}$ 或 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{F}$ 等.

向量的大小称为向量的模，如向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{F}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$，$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{F}|$. 模等于 1 的向量称为单位向量，模等于零的向量称为**零向量**，记作 $\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{O}$. 零向量为任意方向.

以后，我们只讨论与向量的大小和方向有关的问题(与起点无关)，因此，凡是模相等、方向相同

的向量称为相等向量，即经过平行移动后能完全（包括方向）重合的向量是相等向量．

2.2　向量的加法与数乘

2.2.1　向量的加法

在物理学中，力和速度等一些向量可以按照一定法则进行加减运算，这些法则可以推广到一般向量．

向量的平行四边形法则：设非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，把它们的起点放在空间的同一点，以两向量为邻边作平行四边形，则对角线所表示的向量就是向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（图 5.2.2）．

向量的求和也可以用三角形法则．

向量的三角形法则：设非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，把向量平行移动，使向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点与向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，则以向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点，向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量就是向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（图 5.2.3）．

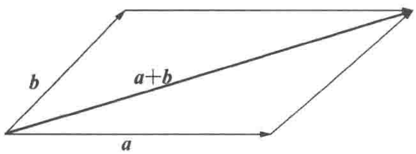

图 5.2.2

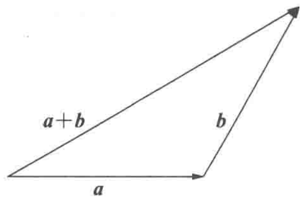

图 5.2.3

向量的加法符合下列运算规律：

(1)交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2)结合律$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$．

2.2.2　向量的减法

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 向量的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$（图 5.2.4）．

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $-\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，特别地，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{O}$．

向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的几何方法如下：

平行四边形法则：设非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，把 $\boldsymbol{a}$，$-\boldsymbol{b}$ 的起点放在空间的同一点，以两向量为邻边作平行四边形，则对角线所表示的向量就是向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$（图 5.2.5）．

三角形法则：设非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，把向量平行移动，使向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点与向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点重合，则以向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点为起点，向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的向量就是向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$（图 5.2.6）．

由三角形两边之和大于第三边的原理，有下列三角不等式：

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|\ ,\ |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|\ ,$$

其中等号在向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向或反向时成立.

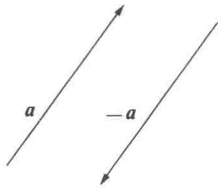

图 5.2.4

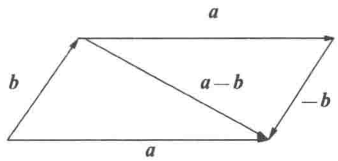

图 5.2.5

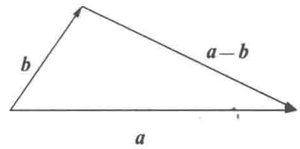

图 5.2.6

2.2.3　向量的数乘

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$. 我们规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量,且

(1) $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模是 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍,即

$$|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda|\,|\boldsymbol{a}|;$$

(2) $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行,当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同,当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.

另外,我们规定 $0\,\boldsymbol{a}=\boldsymbol{O}$.

向量的数乘满足下列运算律:

(1)结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$.

(2)分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

$\qquad\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

由向量的数乘定义可以推出如下结论:如果 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,$\lambda$ 为实数,那么向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行;反之,如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,那么必存在一实数 λ,使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

前面我们已经讲过,模为 1 的向量称为单位向量. 设 $\boldsymbol{e}_a$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量,那么按照向量数乘的规定有

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\quad\text{或}\ \boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a.$$

例 5.2.1　在平行四边形 $ABCD$ 中(图 5.2.7),设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{m}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{n}$. 试用向量 $\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 表示 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}$ 和 $\overrightarrow{OD}$.

解　由向量加法和减法的平行四边形法则知,

$$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n},\ \overrightarrow{DB}=\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n},$$

又因为平行四边形对角线互相平分,所以

$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}),$$

$$\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}),$$

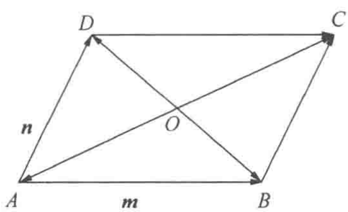

图 5.2.7

由于 $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OB}$,所以

$$\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}),\overrightarrow{OD}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}).$$

例 5.2.2　证明三角形的三条高线交于一点.