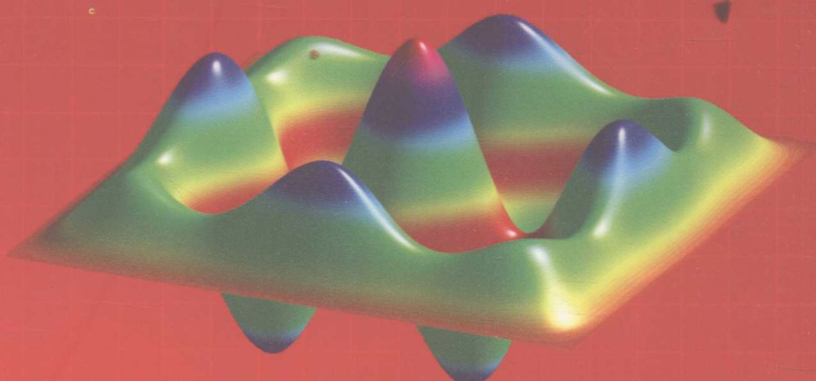
信息科学与技术丛书

张晓 编著



Matlab微分方程高效解法：谱方法原理与实现

- 代码简洁——用二三十行代码解决常见微分问题
- 速度飞快——高效程序大多在二十秒内输出结果
- 结果精确——计算精度通常可达到十位有效数字

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

信息科学与技术丛书

Matlab微分方程高效解法：谱方法原理与实现

张　晓　编著

机械工业出版社

本书系统地介绍了高效求解微分问题的 Matlab 程序编写方法和技巧，并充分地给出了针对各种实际微分问题的实例，包括三类基本线性微分方程（抛物型、双曲型、椭圆型方程），四阶微分方程（双调和方程等），特征值问题（定态薛定谔方程等）和广义特征值问题，以及其他非线性、耦合的复杂微分方程（组），如：KdV 方程、非线性薛定谔方程、浅水方程、Ginzburg-Landau 方程、Burgers 方程、反应-扩散方程、平流-扩散方程。同时还介绍了不同边界条件下的具体计算形式，包括周期性边界条件，第一、二、三类边界条件。本书给出的每个实例都代表了一类问题的通用解决方法。

本书适合作为相关专业高年级本科生或研究生的教材，也可供相关工程技术人员参考。

书中代码可在 http://www.cmpbook.com 免费下载。

图书在版编目（CIP）数据

Matlab 微分方程高效解法：谱方法原理与实现 / 张晓编著. —北京：机械工业出版社，2015.9

（信息科学与技术丛书）

ISBN 978-7-111-51623-1

Ⅰ. ①M…　Ⅱ. ①张…　Ⅲ. ①Matlab 软件－应用－微分方程
Ⅳ. ①O175.8-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 226808 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
责任编辑：车　忱　　责任校对：张艳霞
责任印制：乔　宇
保定市中画美凯印刷有限公司印刷

2016 年 1 月第 1 版 • 第 1 次印刷

184mm×260mm • 12.25 印张 • 2 插页 • 303 千字

0001－2500 册

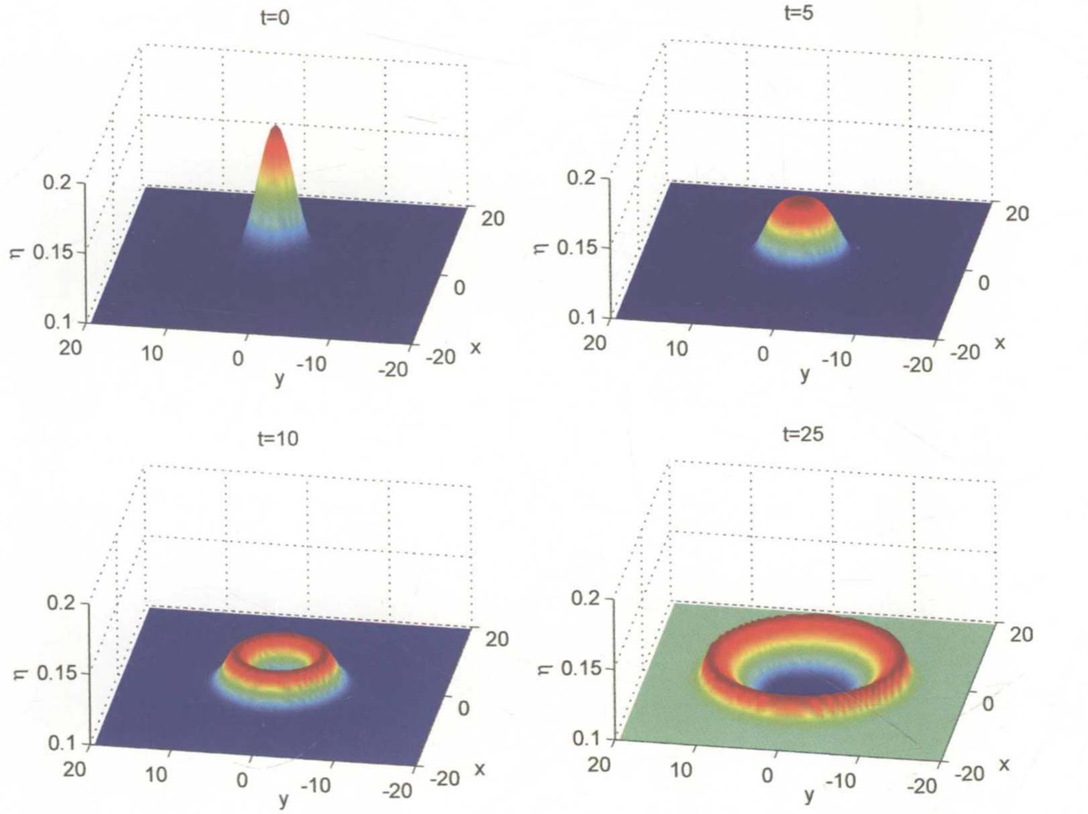
标准书号：ISBN 978-7-111-51623-1

定价：43.00 元

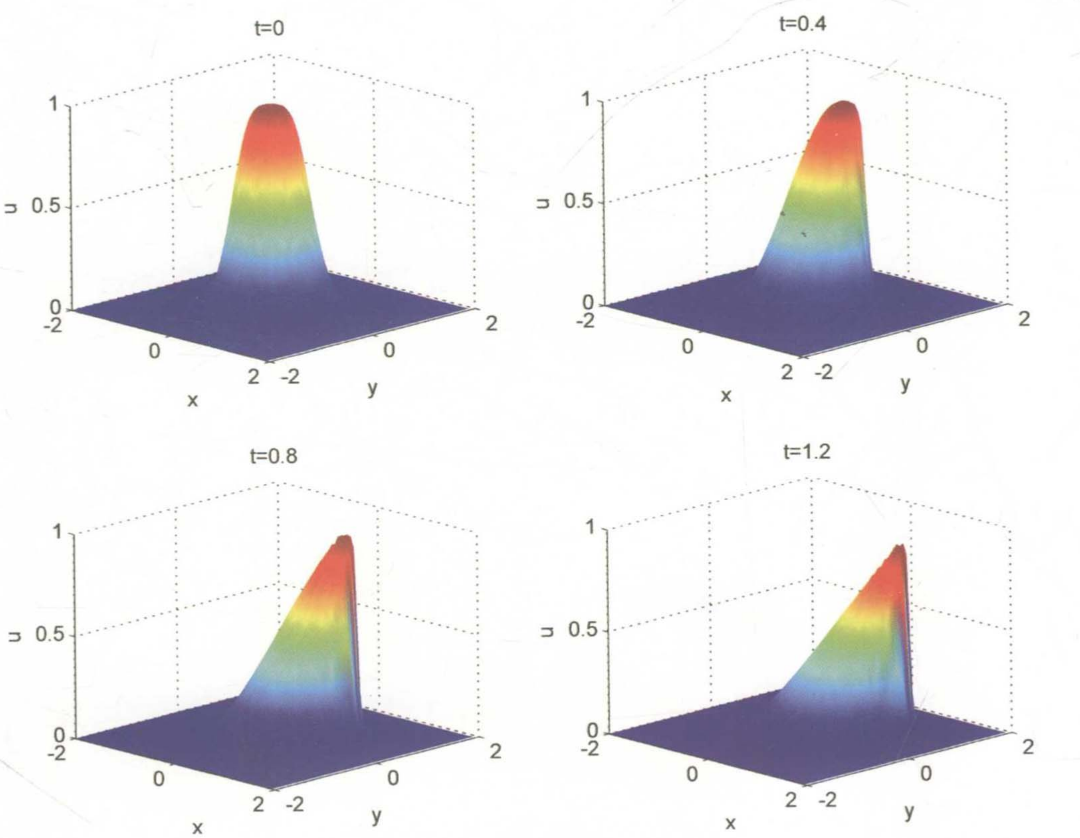
凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
服务咨询热线：（010）88361066
读者购书热线：（010）68326294
（010）88379203

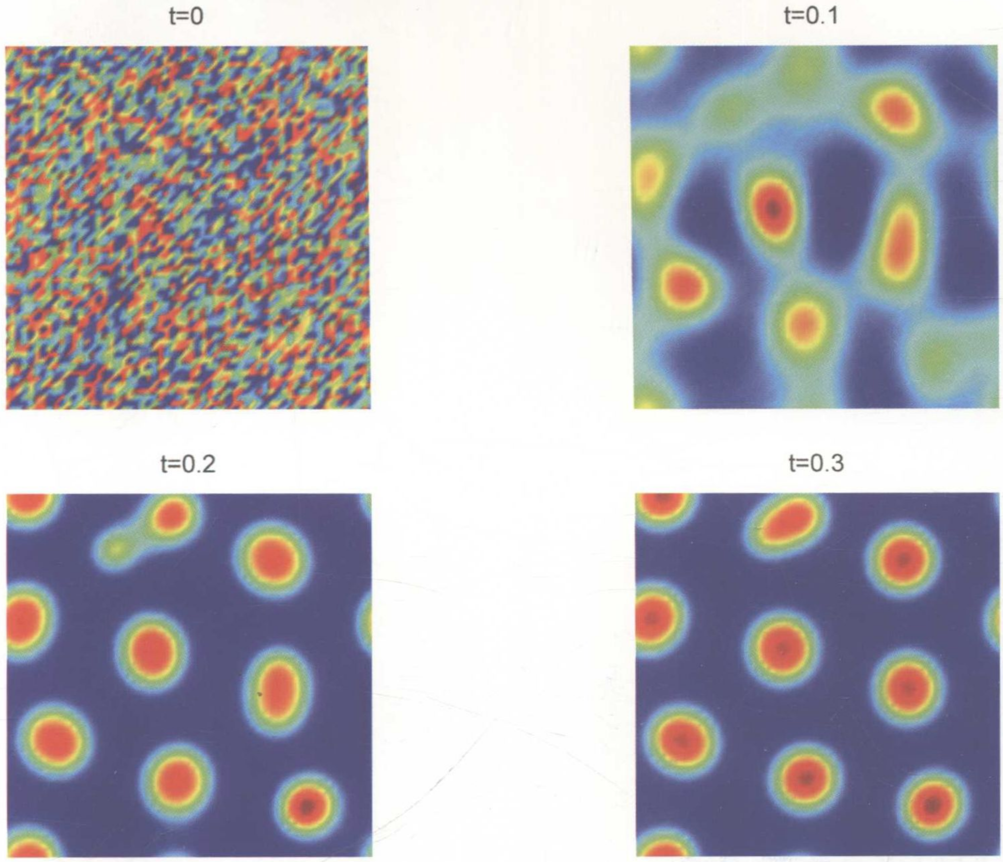
网络服务
机 工 官 网：www.cmpbook.com
机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
教育服务网：www.cmpedu.com
金 书 网：www.golden-book.com



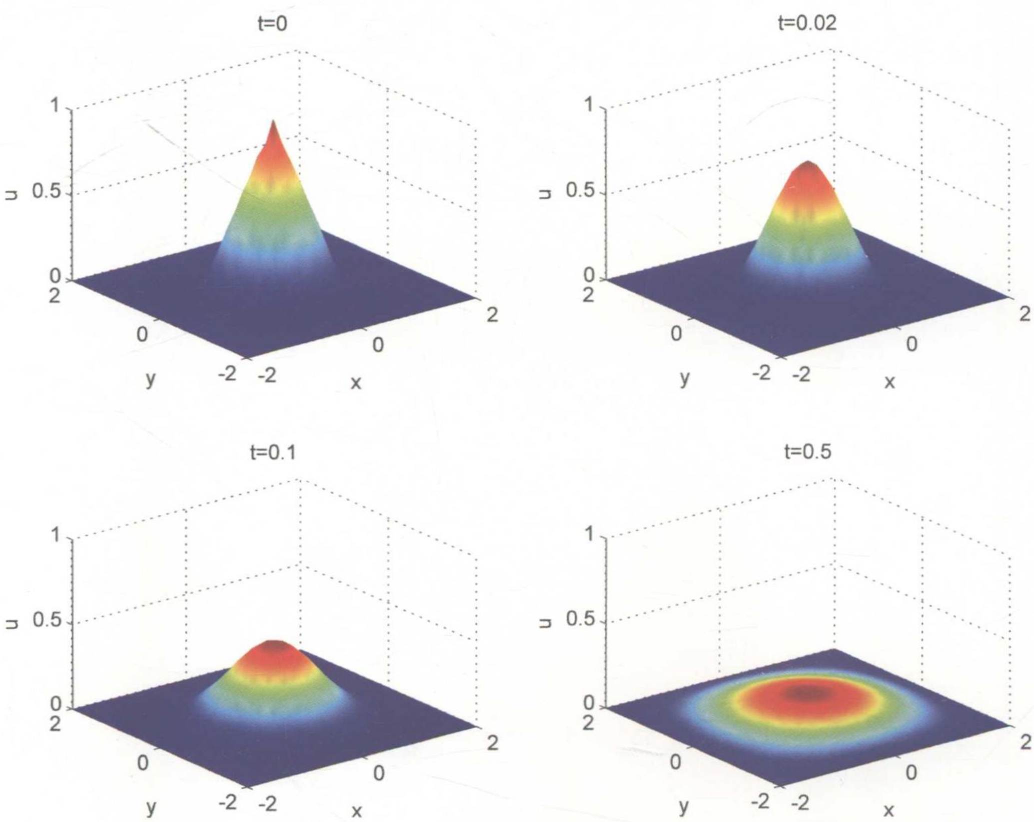
浅水方程的数值结果（水的波纹）



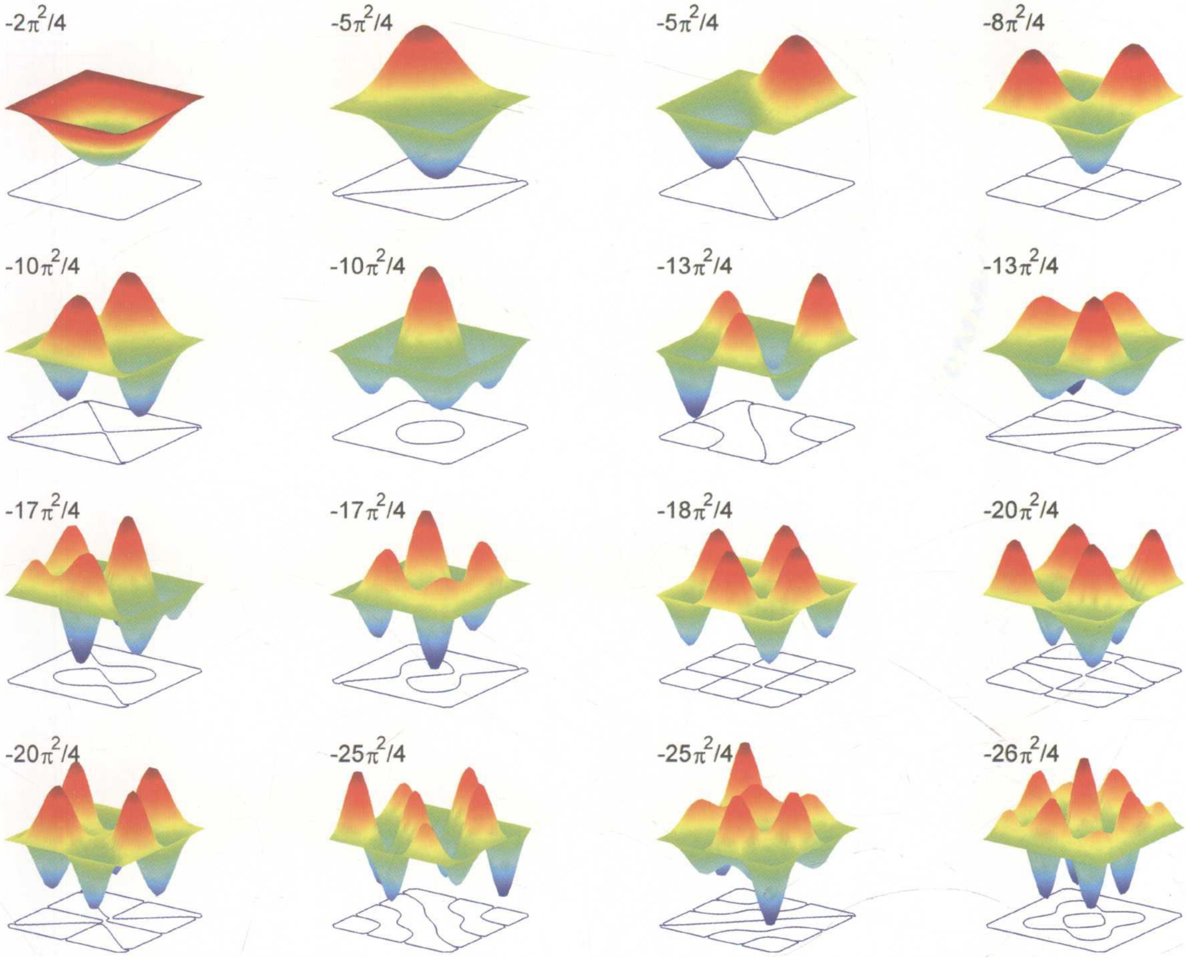
二维 Burgers 方程的数值结果（激波的形成）



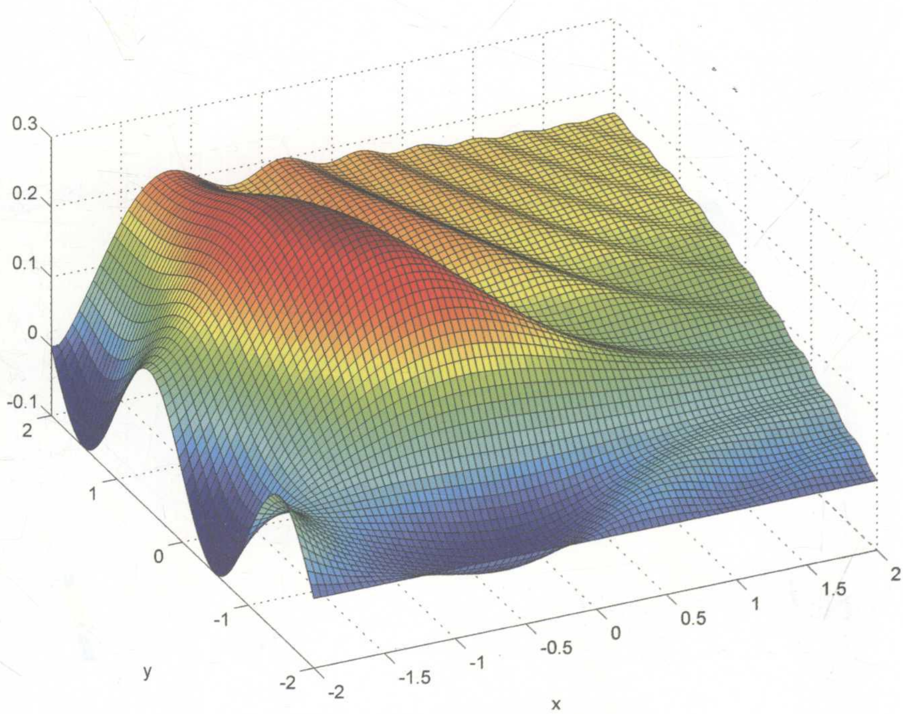
Schnakenberg 模型的数值结果（斑图的形成）



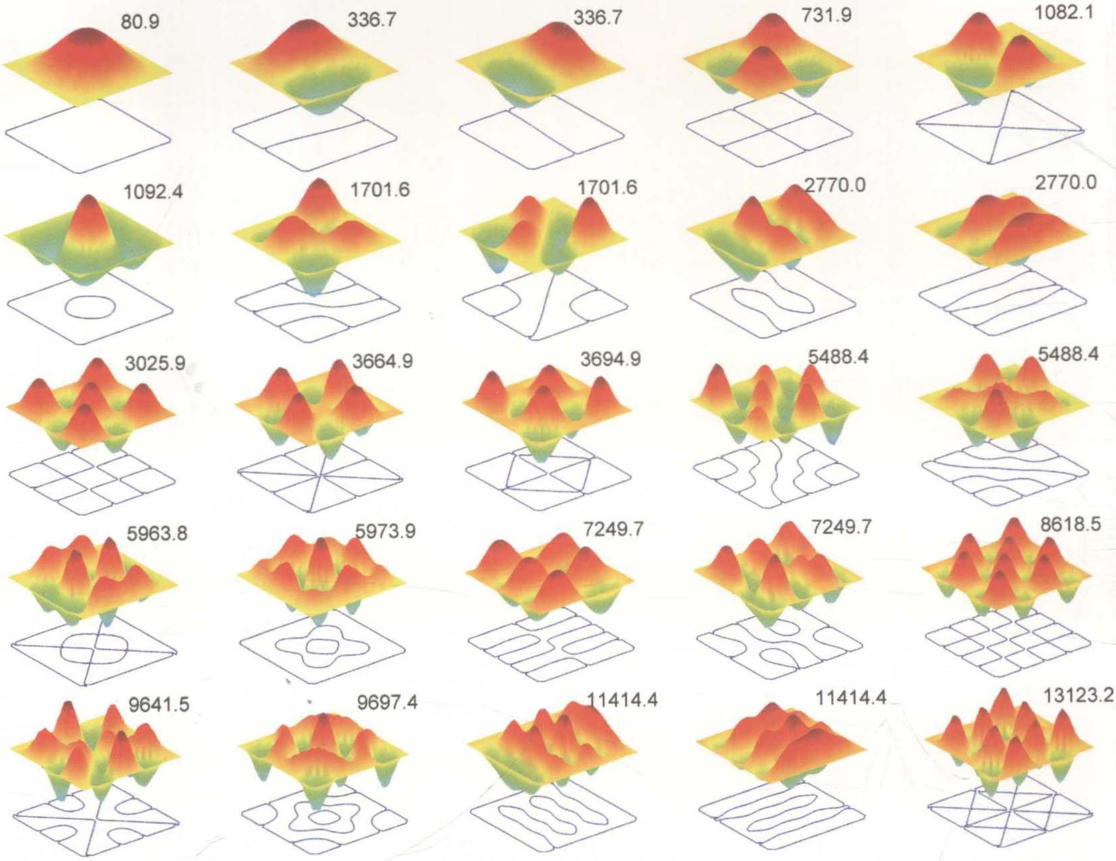
二维热传导方程的数值结果



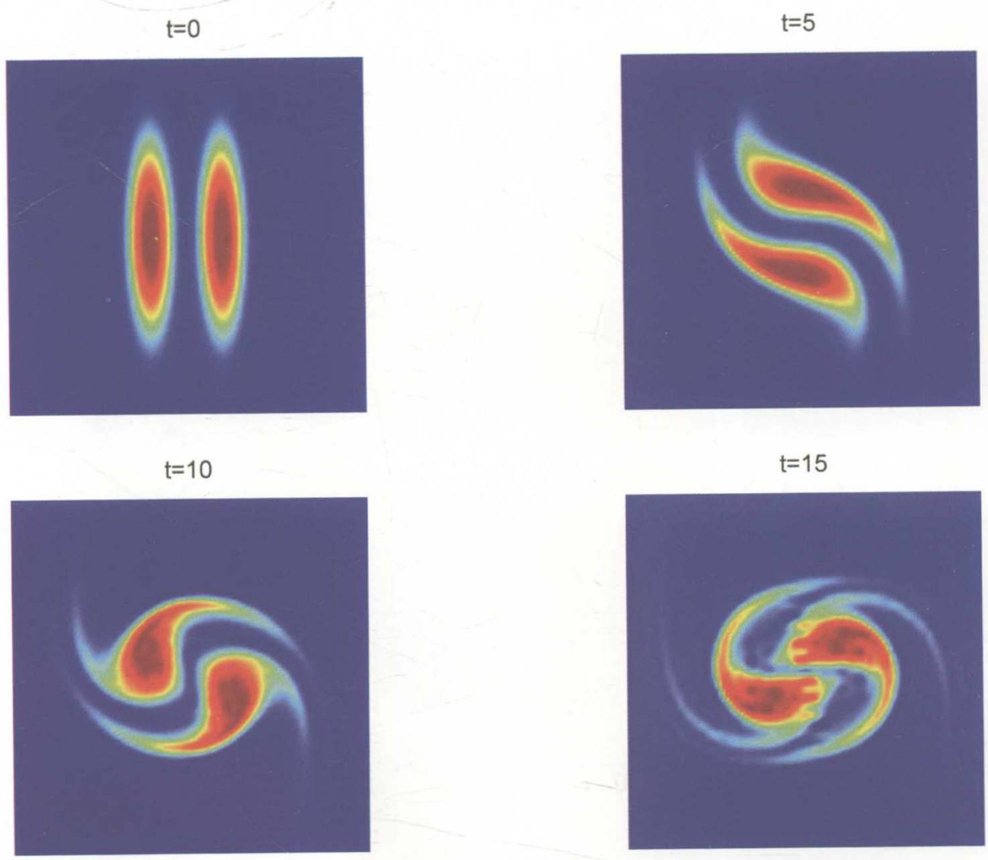
二维无限深方势阱中粒子波函数的特征值和特征函数（定态薛定谔方程）



二维泊松方程的数值解



二维双调和算符的特征值和特征函数



二维平流－扩散方程的数值结果

出版说明

随着信息科学与技术的迅速发展，人类每时每刻都会面对层出不穷的新技术和新概念。毫无疑问，在节奏越来越快的工作和生活中，人们需要通过阅读和学习大量信息丰富、具备实践指导意义的图书来获取新知识和新技能，从而不断提高自身素质，紧跟信息化时代发展的步伐。

众所周知，在计算机硬件方面，高性价比的解决方案和新型技术的应用一直备受青睐；在软件技术方面，随着计算机软件的规模和复杂性与日俱增，软件技术不断地受到挑战，人们一直在为寻求更先进的软件技术而奋斗不止。目前，计算机和互联网在社会生活中日益普及，掌握计算机网络技术和理论已成为大众的文化需求。由于信息科学与技术在电工、电子、通信、工业控制、智能建筑、工业产品设计与制造等专业领域中已经得到充分、广泛的应用，所以这些专业领域中的研究人员和工程技术人员越来越迫切需要汲取自身领域信息化所带来的新理念和新方法。

针对人们了解和掌握新知识、新技能的热切期待，以及由此促成的人们对语言简洁、内容充实、融合实践经验的图书迫切需要的现状，机械工业出版社适时推出了“信息科学与技术丛书”。这套丛书涉及计算机软件、硬件、网络和工程应用等内容，注重理论与实践的结合，内容实用、层次分明、语言流畅，是信息科学与技术领域专业人员不可或缺的参考书。

目前，信息科学与技术的发展可谓一日千里，机械工业出版社欢迎从事信息技术方面工作的科研人员、工程技术人员积极参与我们的工作，为推进我国的信息化建设作出贡献。

机械工业出版社

序

Matlab是目前在科学、技术及工程中很重要且常用的一种成熟的计算软件工具。除了一些基本简单的应用功能外，有许多更复杂的问题也可以借助Matlab来帮助解决。其中基于谱方法原理，对于各类微分方程的解法，在求解区域中，与一般的有限元、有限差分法相比，具有更高的精度。该方法虽然有数十年的发展历史，但在国内还有待于普及，相关图书很少。作者将其多年的数值计算的经验，以及在美国华盛顿大学应用数学系所学到的“谱方法”，结合Matlab的实现，编著本书，将有助于推动相关方法的实际应用，并且有助于快速解决现有的科学、技术和工程中的实际问题。

我认为这是一本和诸多实际问题紧密结合得很好的学习工具书，适合大学生、研究生、以及从事科学、技术及工程应用的人员作为参考。

薛平

2015年11月16日

于清华园

前　言

我第一次进行微分方程数值求解是在读硕士的时候，当时查找了很多资料，用现在看来很蹩脚的办法写了大段的 Matlab 代码解决了一个描述激光器谐振腔的简单边值问题。随后我开始对数值计算产生了强烈的兴趣，继续用不那么专业的方法处理研究中遇到的微分方程。直到读博期间我得到了国家留学基金委的资助，到美国华盛顿大学（University of Washington）应用数学系接受联合培养，在系主任 J. Nathan Kutz 教授的课堂上、组会上以及每周 1～2 次的面对面单独指导中，我接触到了谱方法（spectral method）。谱方法巧妙的原理和导师精湛的 Matlab 编程技艺深深地震撼了我。求解微分方程（组）竟可以如此简洁、高效、优雅，那段时间内几乎每天我都会产生这样的感慨。回国后我曾在不同场合做过关于我理论结果的现场报告，于是常有研究生向我请教那些复杂的微分方程（组）是如何求解的。我在他们身上看到了我当初的影子，同时我也意识到谱方法的实际应用在国内还不普及。例如非线性光纤光学中最基本的非线性薛定谔方程（该方程也出现在非线性量子力学中）可以根据谱方法用寥寥十几行的 Matlab 代码获得高精度数值解，而我所认识的研究生还在使用既不简便也不精确的分步傅里叶法。不久之后我博士毕业，由于一心想进高校任教的我没有找到想要的教职，所以刚刚拿到博士学位后就待业了 3 个月。于是我在年近 30 岁的时候开始面对既无业、也无钱、还单身的人生悲剧，想起昔日的同窗、朋友大多已成家立业，内心的苦闷愈甚却无处排解。这时候我开始着手将已掌握的谱方法及其重要的技巧和经验总结成书，一来要让更多的人接触到这些有价值的数值方法，二来潜心写书可令我暂时忘记眼前的烦恼。之后我来到清华大学物理系做博士后研究工作，开始了一项令人振奋的研究，当然也不忘多方联系本书的出版事宜。如今我很高兴地看到本书即将出版发行，它不但是一本可以教你如何高效、便捷地解决各类微分问题的实用教程，同时也是我身处逆境不甘认命的一个见证。

本书中，常见的微分问题均可在 40 行代码内解决，其中的核心代码不到 10 行，且代码只需在默认安装的 Matlab 上即可执行，并不依赖于第三方插件。此外，Matlab 代码中采用的谱方法以及时间步进法是在计算精度、运算量、稳定性等方面颇具优势的数值计算方法，所有掌握高等数学和 Matlab 语法的读者在看完本书之后，均可以得心应手地、高效简洁地、精确地解决各类常见微分问题。本书分为上篇、中篇和下篇。上篇介绍欧拉法、龙格-库塔法、有限差分法和有限元法等基础数值知识，旨在使读者了解在谱方法之前出现的主要数值方法的基本原理，并能够与后文中的谱方法形成对比，加深理解。中篇

和下篇分别介绍了不同边界条件下的谱方法，对数值方法比较了解的读者可快速浏览上篇后直接阅读中篇和下篇。

感谢 J. Nathan Kutz 教授，他深厚的数学功底和过人的物理直觉令我受益匪浅，极大地感召我在学术的道路上一路前行。感谢我的硕导和博导宋晏蓉教授、张新平教授，这两位教授工作出众并且将学生的自身发展放在首要位置，在研究组人手不足的情况下仍然支持学生出国学习。感谢密云二中的数学老师王嘉新，我对数学的热爱都始于他生动有趣的教学以及慧眼识才的培养。感谢清华大学物理系的薛平教授对我的悉心栽培和提携，他在我学术道路最艰难的起步阶段给予了无私的支持，并为本书作序。最后感谢我的家人、亲戚和朋友多年来予以我的支持和鼓励。

没有几位恩师兢兢业业的工作以及亲友们的关怀，就没有我的这本书，也没有我的今天。

张　晓

2015 年 8 月于清华园

提　　示

本书代码中对变量的命名遵循一定规律：

以 t 结尾的变量代表对某函数做傅里叶变换的结果（取 transform 首字母），如 ut 为函数 u 的傅里叶变换结果（即频谱）。

以 d 开头的变量代表对函数求导的结果（取 derivative 首字母），如 du 代表$\partial u/\partial t$。

以 sol 结尾的变量代表最终结果（取 solution 前三个字母），如 usol 代表函数 u 的最终结果。

有时为了传递参数，不得不把几个变量合并为一个变量，新的变量名就是直接把这几个变量名合并。如 uv=[u; v]。

变量 bc 代表边界条件相关矩阵（取 boundary conditions 的缩写）。

上述命名规律可组合使用。如：utsol、vtsol 分别代表函数 u、v 在频域上的最终结果，uvtsol 代表将 utsol、vtsol 合并后的结果。dut、dvt 分别代表函数 u、v 在频域上的导数，duvt 代表将 dut、dvt 合并后的结果。

目　　录

上篇 前置知识

第1章 初值问题和边值问题

本章将通过最基本、简单的微分问题——初值问题（initial value problem）和边值问题（boundary value problem）的数值解法，引入欧拉法、改进的欧拉法、龙格-库塔法等方法的基本思想和内在关系，给出代码的实现并予以说明。此外还介绍了局部截断误差、刚性等基本概念，为后续章节中求解更复杂的偏微分问题做铺垫。

1.1 初值问题

初值问题是科研、工程技术应用中最常见的一类问题，一阶常微分方程的初值问题表述如下：

已知 $u(x)$的起始点(x_0, u_0)以及 $u(x)$的一阶导数表达式为二元函数 $f(x, u)$，求在区间$[x_0, \infty)$上满足这两个条件的 $u(x)$。即：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(x,u)\\ u(x_0)=u_0\end{cases} \tag{1-1}$$

由于起始点(x_0, u_0)给出了初始状态的条件，所以被称为初始条件。在少数特殊情况下，可以直接求出初值问题的解析解。对于更一般的情况，就只能通过数值解法求出数值解。**数值解法的基本思路就是先对 x 和 $u(x)$在区间$[x_0, \infty)$上进行离散化，然后构造递推公式，再步进式地得到 $u(x)$在这些位置的近似取值。**

这些离散的位置可表为：

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

数值解法可得到 $u(x)$在这些位置的近似取值：

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

显然，$u(x)$在这些离散点处的精确取值为：

$$u(x_1), u(x_2), \ldots, u(x_n), \ldots$$

令相邻两个离散点的间隔为一定值 h，则有 $x_n=x_0+nh$ $(n=1, 2, \ldots)$，这里 h 也被称为数