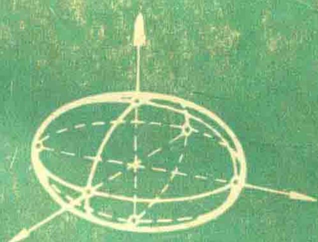
高等数学辅导

上　册

高等数学辅导编写组编



江苏教育出版社

高等数学辅导

上册

高等数学辅导编写组编

江苏教育出版社

高 等 数 学 辅 导
上 册
《高等数学辅导》编写组编

江 苏 教 育 出 版 社 出 版
江苏省新华书店发行　　无锡后宅印刷厂印刷
开本787×1092毫米 1/32　印张12　字数285,000
1987年5月第1版　　1987年5月第1次印刷
印数1—20,000册

ISBN 7—5343—0081—9/G·78

统一书号：7351·471　　定价：2.15元

目　录

解 析 几 何

高 等 代 数

练习题答案与提示

附　　录

解 析 几 何

第一章 直 线

学习本章的目的要求

1、复习平面解析几何中各种形式的直线方程。

2、正确理解直线法式方程的意义。

3、掌握点到直线的距离和离差的意义及其计算方法。

4、了解直线束方程的意义和作用。

一、主要内容

关于x，y的二元一次方程图象是一条直线；反之，任何直线都可由关于x，y的一次方程表示。

1、直线方程的几种不同形式

（1）点斜式：已知直线过点（x_1，y_1）、斜率为k，则直线方程为：　$y-y_1=k(x-x_1)$。

（2）斜截式：已知直线斜率为k，在y轴上截距为b，则直线方程为：　$y=kx+b$。

（3）二点式：已知直线过点（x_1，y_1）及点（x_2，y_2）则直线方程为　$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$。

（4）截距式：已知直线在X轴、Y轴上截距分别为a、b（$a\neq0$，$b\neq0$）则直线方程为　$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$。

（5）一般式：$Ax+By+C=0$（A、B不同时为0）

（6）直线的法式方程：设原点O在直线l上垂足为N，则ON称为l的法线，OX轴正向逆时针方向转到ON正向的角是θ，θ称为幅角，记$|ON|=p$，则直线法式方程为：

$$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$$

法式方程特点是：一次项系数平方和为1 $(\cos^2\theta+\sin^2\theta=1)$，常数项为非正数（$p\geqslant0$）；常数项为零则$y$项系数为非负数，如果$y$项系数也是零则$x$项系数为1。

2、点到直线的距离和离差

已知点$M_1(x_1, y_1)$和直线 $x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$，$M_1$关于$l$的离差为 $\delta=x_1\cos\theta+y_1\sin\theta-p$

当点M_1与原点在l两侧时，δ取正值，

当点M_1与原点在l同侧时，δ取负值，

当点M_1在直线l上时，$\delta=0$。

若点M_1到直线l的距离是d，则$d=|\delta|$。

3、直线束

（1）过点(x_1, y_1)的全体直线方程：

$\lambda(y-y_1)=\mu(x-x_2)$ （λ、μ为参数）。

（2）过两定直线$A_1x+B_1y+C_1=0$，$A_2x+B_2y+C_2=0$交点的全体直线是

$\lambda(A_1x+B_1y+C_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2)=0$（$\lambda$，$\mu$为参数）。

若两定直线互相平行时，则：

$\lambda(A_1x+B_1y+C_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2)=0$表示平行于这两条直线的全体直线。

4、二元一次不等式应用

直线$Ax+By+C=0$将平面中不在该直线上的点分为两类：一侧的点满足$Ax+By+C>0$，另一侧的点则满足$Ax+By+C<0$。

原点所在一侧点$Ax+By+C$的符号必与C同号。

二、内容分析与例题

1、化直线方程为法式方程

将一般方程乘上一个法化因式$\dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$，按如下规定决定符号：当直线不通过原点时（C≠0），法化因式符号取与C异号，当直线过原点时（C=0），则符号取与B同号，如果B也等于零，则取与A同号。

例1　确定下列直线方程中哪些是法线式？

（1）　$\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-3=0$；

（2）　$\frac{2}{5}x-\frac{3}{5}y-1=0$；

（3）　$x-2=0$；　（4）　$y+2=0$。

解　根据法式方程特点易得出（1）、（3）是法式方程。

例2　将下列各直线的一般方程化为法式方程：

（1）$x-\sqrt{3}y+2=0$　（2）$2x+5y=0$

解（1）∵ C=2＞0，∴法化因式取负值

∴　法式方程为 $\dfrac{x-\sqrt{3}y+2}{-\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}=0$

即
$$-\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y-1=0。$$

（2）∵ $C=0$，$B=5>0$，∴法化因式也取正值

∴　法式方程为 $\dfrac{2x+5y}{\sqrt{2^2+5^2}}=0$

即
$$\frac{2}{\sqrt{29}}x+\frac{5}{\sqrt{29}}y=0。$$

2、确定点关于直线的离差

先将直线方程化为法式方程，再将点的坐标代入即得

$\delta=x_1\cos\theta+y_1\sin\theta-p$。

例3　确定点A(2，-1)关于直线$4x+3y+10=0$的离差。

解　$4x+3y+10=0$化为法式方程为：

$$-\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-2=0，于是$$

$$\delta=-\frac{4}{5}\times2-\frac{3}{5}\times(-1)-2=-3。$$

3、确定点关于直线的距离

先求出点关于直线离差δ，则距离$d=|\delta|$，例3中A（2，－1）关于直线$4x+3y+10=0$的距离$d=|-3|=3$。

例4 求下列两条平行直线间的距离：

$$3x-4y=0 \qquad 6x-8y+10=0$$

解 选定$3x-4y=0$上点(4,3)，将$6x-8y+10=0$化为法式方程为 $-\frac{6}{10}x+\frac{8}{10}y-1=0$

于是（4，3）到 $-\frac{6}{10}x+\frac{8}{10}y-1=0$距离为

$$d=|\delta|=\left|-\frac{6}{10}\times4+\frac{8}{10}\times3-1\right|=1。$$

4、在应用直线束方程建立直线方程时，关键是根据已知条件确定$\lambda:u$。

例5 求过两直线$2x+y+1=0$和$x-2y+1=0$的交点，且垂直于直线$3x+4y-7=0$的直线方程。

解 设所求直线方程为

$$\lambda(2x+y+1)+\mu(x-2y+1)=0$$

即 $(2\lambda+\mu)x+(\lambda-2\mu)y+\lambda+\mu=0$

又所求直线与$3x+4y-7=0$垂直，

故有 $3(2\lambda+\mu)+4(\lambda-2\mu)=0$

从而 $\lambda:\mu=1:2$

所求直线方程是 $4x-3y+3=0$。

5、在用二元一次不等式组确定平面区域时，可先判别原

点所在一侧的符号，对每一个二元一次不等式确定符合条件的半平面，其公共部分即为所求平面中的区域。

例6　图解不等式组

$$\begin{cases} x+2y-5<0 \\ 2x-y-5<0 \\ 2x+y+5>0 \end{cases}$$

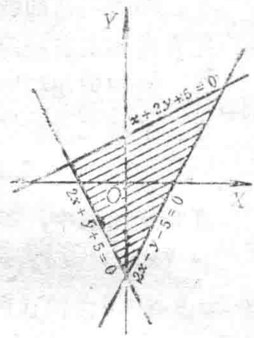


图1—1

解　先作出直线$x+2y-5=0$，$2x-y-5=0$，$2x+y+5=0$

将原点坐标代入后，得

$x+2y-5<0$半平面中包含原点；

$2x-y-5<0$半平面中包含原点；

$2x+y+5>0$半平面中包含原点，

其公共部分即为所求见图（1—1）。

练　习　题

1、把下列各直线的一般方程化为法式方程

（1）$12x+5y+26=0$；（2）$6x-8y-9=0$；

（3）$2x+4=0$。

2、确定点$A(0,-3)$关于直线$5x-12y-23=0$的离差。

3、已知梯形两底方程为$2x+y-5=0$，$4x+2y-7=0$，求它的高h。

4、求由下列直线所成锐角平分线方程

$3x+4y-5=0$，　$5x-12y+z=0$。

5、求过点$A(2,-3)$，且平行直线$x-2y+z=0$的直线方程。

6、求过两直线$2x+y+1=0$和$x-2y+1=0$的交点，且垂直于直线$3x+4y-7=0$的直线方程。

7、过$x-2y+2=0$和$3x+4y-14=0$的交点M作两条直线，分别平行和垂直于已知直线$3x-y-8=0$求这两条直线方程（不求交点坐标）。

第二章　二次曲线的一般理论

学习本章的目的要求

1、理解二次曲线的中心、渐近方向、渐近线、切线、直径、主方向和主直径等概念；

2、能利用坐标变换化简二次曲线的一般方程并作图；

3、了解二次曲线的不变量及利用不变量讨论二次曲线。

一、主 要 内 容

直角坐标系中，二次曲线的一般方程是

$$F(x,y) \equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

若记

$$\Phi(x,y) \equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$$

$$F_1(x,y) \equiv a_{11}x+a_{12}y+a_{13}$$

$$F_2(x,y) \equiv a_{21}x+a_{22}y+a_{23}$$

$$F_3(x,y) \equiv a_{31}x+a_{32}y+a_{33}$$

$$a_{ij}=a_{ji} \qquad (i,j=1,2,3)$$

则 $F(x,y) \equiv xF_1(x,y)+yF_2(x,y)+F_3(x,y)=0$

1、二次曲线的中心

如果通过点c的二次曲线的一切弦都以c为中点（因而c是二次曲线的对称中心），则称c为二次曲线的中心。

设c的坐标为(x_0, y_0)，则点c是二次曲线$F(x,y)=0$的中心其充要条件是：

$$F_1(x_0, y_0) \equiv a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}=0$$

$$F_2(x_0, y_0) \equiv a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}=0$$

如记$I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$　则：

$I_2 \neq 0$，方程组有唯一解，曲线有唯一中心，称此曲线为中心二次曲线；

$I_2 = 0$，如果方程组无解，则称此曲线为无心二次曲线；如果方程组有无穷多解，则曲线有一条中心直线，称此曲线为多心（或线心）二次曲线。无心二次曲线与多心二次曲线统称为非中心二次曲线。

I_2 是否等于零是二次曲线为中心曲线或非中心曲线的标志。

2、二次曲线的渐近方向、渐近线

（1）直线 $\dfrac{x-x_1}{X}=\dfrac{y-y_1}{Y}$ 的方向X：Y如果满足$\Phi(X, Y)=0$，则称X：Y所定的方向为二次曲线的渐近方向，否则称为非渐近方向。

具有渐近方向的直线如果不是曲线的一部分，则它与二次曲线的交点最多只有一个；具有渐近方向的直线如果是二次曲线的一部分，则此二次曲线退化为一对直线。如记

$$I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$，那么$I_3=0$是二次曲线退化为一对直线的条件。

沿非渐近方向的直线与二次曲线或交于两个（不同的或重合）实点，或交于两个共轭虚点。

每一个二次曲线最多只有两个不同的实渐近方向，而非渐近方向却有无穷多个。

没有实渐近方向的二次曲线叫做椭圆型的，有一个实渐近方向的二次曲线叫做抛物型的，有两个实渐近方向的二次曲线叫做双曲型的。

因此，按渐近方向可将二次曲线$F(x, y)=0$分为三

类：椭圆型曲线：$I_2>0$；抛物型曲线：$I_2=0$；双曲型曲线：$I_2<0$。

显然，椭圆型曲线与双曲型曲线都是中心曲线，而抛物型曲线是非中心曲线（包括无心曲线与多心曲线）。

（2）过二次曲线的中心且具有实渐近方向的直线称为二次曲线的渐近线。

设二次曲线$F(x,y)=0$的中心为(x_0, y_0)，则渐近线方程为 $\dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{y-y_0}{Y}$（$X:Y$ 为实渐近方向）。

二次曲线$F(x,y)=0$如有渐近线，它的方程还可写成 $\Phi(x-x_0, y-y_0)=a_{11}(x-x_0)^2+2a_{12}(x-x_0)(y-y_0)+a_{22}(y-y_0)^2=0$（其中$x_0$、$y_0$是中心坐标）。

双曲线有两条实渐近线，椭圆和抛物线都没有实渐近线，而多心二次曲线有一条实渐近线，即中心直线。

3、二次曲线的直径、共轭直径与主直径

（1）设方向$X:Y$不是二次曲线$F(x,y)=0$的渐近方向，则以$X:Y$为方向的平行弦的中点的轨迹是一条直线，称这直线为二次曲线的共轭于方向$X:Y$的直径。

共轭于方向$X:Y$的直径方程为：

$XF_1(x,y)+YF_2(x,y)=0$；

即$(a_{11}X+a_{21}Y)x+(a_{12}X+a_{22}Y)y+(a_{13}X+a_{23}Y)=0$

如果记 $k=\dfrac{Y}{X}$（k称为平行弦的斜率），则二次曲线的一族平行弦（斜率k）的共轭直径方程为$F_1(x,y)+kF_2(x,y)=0$，且直径的斜率为$k'=-\dfrac{a_{11}+a_{12}k}{a_{21}+a_{22}k}$。

平行弦的方向$X:Y$与共轭于该方向的直径方向$X':Y'$称为共轭方向，它们满足等式：

$a_{11}XX'+a_{12}(XY'+X'Y)+a_{22}YY'=0$

再记$k'=\dfrac{Y'}{X'}$，　　则得：

$a_{11}+a_{12}(k+k')+a_{22}kk'=0$。

（2）如果二次曲线的两条直径的方向（斜率）k及k'，满足关系式$a_{11}+a_{12}(k+k')+a_{22}kk'=0$，则称这一对直径为共轭直径。

（3）如果二次曲线的两个共轭方向互相垂直，称这种方向为二次曲线的主方向；具有主方向的直径称为二次曲线的主直径（简称主径）。

中心二次曲线至少有两条主径，非中心曲线只有一条主径。故椭圆和双曲线都有一对主径，抛物线虽有两个主方向，但只有一条主径。主径也是曲线的对称轴。对称轴与曲线的交点称为曲线的顶点。

二次曲线主方向的确定：

设$X:Y$是主方向，其共轭方向为$X':Y'$，由定义知：$X':Y'=-Y:X$，即存在不等于零的数λ，满足方程组

$$\begin{cases} a_{11}X+a_{12}Y=\lambda X \\ a_{21}X+a_{22}Y=\lambda Y \end{cases} \quad \text{亦即} \quad \begin{cases} (a_{11}-\lambda)X+a_{12}Y=0 \\ a_{21}X_1+(a_{22}-\lambda)Y=0 \end{cases}$$

此齐次线性方程组有非零解的条件是：

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \text{即} \lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$$（其中

$I_1=a_{11}+a_{22}$），方程$\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$叫做二次曲线的特征方程，它的根$\lambda$叫做特征根；把特征根代回到方程组便可求得相应于特征根的主方向：

$X:Y=(\lambda-a_{22}):a_{12}=a_{12}:(\lambda-a_{11})$。

令$\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{Y}{X}$，　　　　立即推出

$$\text{ctg}2\alpha = \frac{1-\text{tg}^2\alpha}{2\text{tg}\alpha} = \frac{1-\left(\frac{a_{12}}{\lambda - a_{22}}\right)^2}{2\cdot\left(\frac{a_{12}}{\lambda - a_{22}}\right)}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{a_{12}}{\lambda - a_{22}}\right)\left(\frac{\lambda - a_{11}}{a_{12}}\right)}{\frac{2a_{12}}{\lambda - a_{22}}} = \frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}.$$

因此，后面介绍的通过转轴与移轴来化简二次曲线方程，实际上就是要把坐标轴变换到二次曲线的主直径的位置。

4、**二次曲线的切线**

直线$lx+my+n=0$与二次曲线$F(x,y)=0$的交点一般有两个，如果两个交点重合为一个点时，则称这条直线为二次曲线的切线，这个重合的点称为切点。如果直线全部在二次曲线上，也称它为曲线的切线，直线上的每一点都可以看作切点。

（1）二次曲线$F(x,y)=0$上满足$F_1(x_1,y_1)=F_2(x_1,y_1)=0$的点$(x_1,y_1)$叫做二次曲线的奇异点，非奇异点称为二次曲线的正常点。

（2）设点$M_1(x_1,y_1)$是二次曲线$F(x,y)=0$的正常点，则点M_1处的切线方程为：

$$(x-x_1)F_1(x_1,y_1)+(y-y_1)F_2(x_1,y_1)=0$$

或 $$xF_1(x_1,y_1)+yF_2(x_1,y_1)+F_3(x_1,y_1)=0$$

即 $$(a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13})x+(a_{21}x_1+a_{22}y_1+a_{23})y+(a_{31}x_1+a_{32}y_1+a_{33})=0$$

为便于记忆，还可写成：

$$a_{11}x_1x+a_{12}(y_1x+x_1y)+a_{22}y_1y+a_{13}(x_1+x)+a_{23}(y_1+y)+a_{33}=0。$$

（3）如果点$M_1(x_1,y_1)$是二次曲线$F(x,y)=0$的奇

异点，由 $F_1(x_1,y_1)=F_2(x_1, y_1)=0$ 可知，这时过 M_1 的每条直线都和二次曲线交于重合二点，故都是二次曲线的切线。

（4）已知直线 $lx+my+n=0$ 是二次曲线 $F(x, y)=0$ 的切线，则切点 M_1 的坐标 (x_1, y_1) 可由下式决定：

$$\frac{a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13}}{l}=\frac{a_{21}x_1+a_{22}y_1+a_{23}}{m}=\frac{a_{31}x_1+a_{32}y_1+a_{33}}{n},$$

即 $\dfrac{F_1(x_1, y_1)}{l}=\dfrac{F_2(x_1, y_1)}{m}=\dfrac{F_3(x_1, y_1)}{n}$。

5、直角坐标系的坐标变换

（1）直角坐标系的平移

将直角坐标系Oxy运动，使原点O移到另一个点O′，但不改变坐标轴的方向，得到新坐标系O′x′y′，称为坐标系的平移变换（简称移轴）。

如果关于旧坐标系 Oxy，点O′的坐标是 (x_0, y_0)，任一点M的坐标是（x，y）；关于新坐标系 $O'x'y'$，点M的坐标是（x′，y′），则得移轴下的坐标变换公式：

$$\begin{cases} x=x'+x_0 \\ y=y'+y_0 \end{cases}$$（旧坐标用新坐标表示）；

其逆变换公式为：$$\begin{cases} x'=x-x_0 \\ y'=y-y_0 \end{cases}$$（新坐标用旧坐标表示）。

（2）直角坐标系的旋转。

将直角坐标系 Oxy 运动，使原点位置不变，但坐标轴的方向改变，得到新坐标系 $Ox'y'$，称为坐标系的旋转变换（简称转轴）。

如果 x' 轴与 x 轴的交角为 α，则点M关于 Oxy 系的坐标（x，y）与 $Ox'y'$ 系的坐标（x′，y′）间有如下关系：

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$（旧坐标用新坐标表示的公式）

或 $$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$（新坐标用旧坐标表示的公式）

（3）直角坐标系的一般坐标变换。

将一个直角坐标系 Oxy 运动，使原点位置改变，坐标轴的方向也改变，得到新的直角坐标系 $O'x'y'$，则称为坐标系的一般坐标变换。

如果 O' 关于 Oxy 系的坐标是（x_0，y_0），x' 轴与 x 轴的交角是 α，则点M关于新旧坐标系的坐标(x，y)与（x′ y′）之间有如下关系：

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + x_0 \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + y_0 \end{cases}$$

或 $$\begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\sin\alpha \\ y' = -(x - x_0)\sin\alpha + (y - y_c)\cos\alpha \end{cases}$$

6、二次曲线的一般方程利用坐标变换进行化简

（1）中心二次曲线方程的化简

二次曲线F（x，y）＝0，当 $I_2 \neq 0$，则曲线的中心坐标（x_0，y_0）是：

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{I_2}$$

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}}{I_2}$$

(i) 首先移轴：将坐标原点移到中心，即作坐标变换，