

应用型本科 电子及通信工程专业“十二五”规划教材

数字信号处理

翁剑枫 编著

徐鸿鹄 主审

- 内容新颖：新知识、新技术、新工艺
- 特色鲜明：突出“应用、实践、创新”
- 定位准确：面向工程技术型人才培养
- 质量上乘：应用型本科专家全力打造



西安电子科技大学出版社
<http://www.xduph.com>

应用型本科 电子及通信工程专业“十二五”规划教材

数字信号处理

翁剑枫 编 著
徐鸿鹄 主 审

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书面向应用型高等院校通信电子类专业的本科学生,从信号的数字处理这一应用目的出发,围绕着离散时间信号通过离散时间系统这一基本问题,系统地阐述了数字信号处理的基本理论和方法,并注重各种分析方法所涉及的基本概念以及概念之间的联系与比较。为使理论与应用相结合,书中的一些实例结合了通信电子类专业的工程应用背景。

全书分为5章:第1章为离散时间信号与系统,第2章为傅里叶分析,第3章为Z变换与系统函数,第4章为离散傅里叶变换及其快速算法,第5章为数字滤波器。各章均配置有习题以及相应的MATLAB应用示例和上机练习题,以使读者进一步掌握数字信号处理的基本内容。

本书适合作为普通高等院校通信电子类专业本科生“数字信号处理”课程的教材,也可供从事数字信号处理工作的工程技术人员参考。

本书习题详解请与出版社联系获取。

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理/翁剑枫编著. —西安:西安电子科技大学出版社,2016.2

应用型本科电子及通信工程专业“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5606-3949-9

I. ① 数… II. ① 翁… III. ① 数字信号处理—高等学校—教材 IV. ① TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 014450 号

策 划 马晓娟

责任编辑 马晓娟

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

网 址 www.xduph.com 电子邮箱 xdupfxb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西大江印务有限公司

版 次 2016年2月第1版 2016年2月第1次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印张 15

字 数 352千字

印 数 1~3000册

定 价 28.00元

ISBN 978-7-5606-3949-9/TN

XDUP 4241001-1

* * * 如有印装问题可调换 * * *

本社图书封面为激光防伪覆膜,谨防盗版。

应用型本科 电子及通信工程专业系列教材

编审专家委员会名单

主任：沈卫康（南京工程学院通信工程学校 院长/教授）

副主任：张士兵（南通大学 电子信息学院 副院长/教授）

陈 岚（上海应用技术学院 电气与电子工程学院 副院长/教授）

宋依青（常州工学院 计算机科学与工程学院 副院长/教授）

张明新（常熟理工学院计算机科学与工程学院 副院长/教授）

成 员：（按姓氏拼音排列）

鲍 蓉（徐州工程学院 信电工程学院 副院长/教授）

陈美君（金陵科技学院 网络与通信工程学院 副院长/副教授）

高 尚（江苏科技大学 计算机科学与工程学院 副院长/教授）

李文举（上海应用技术学院 计算机科学学院 副院长/教授）

梁 军（三江学院 电子信息工程学院 副院长/副教授）

潘启勇（常熟理工学院 物理与电子工程学院 副院长/副教授）

任建平（苏州科技学院 电子与信息工程学院 副院长/教授）

孙霓刚（常州大学 信息科学与工程学院 副院长/副教授）

谭 敏（合肥学院 电子信息与电气工程系 系主任/教授）

王杰华（南通大学 计算机科学与技术学院 副院长/副教授）

王章权（浙江树人大学 信息科技学院 副院长/副教授）

温宏愿（泰州科技学院 电子电气工程学院 讲师/副院长）

郁汉琪（南京工程学院 创新学院 院长/教授）

严云洋（淮阴工学院 计算机工程学院 院长/教授）

杨俊杰（上海电力学院 电子与信息工程学院 副院长/教授）

杨会成（安徽工程大学 电气工程学院 副院长/教授）

于继明（金陵科技学院 智能科学与控制工程学院 副院长/副教授）

前 言

随着集成电路技术和计算机科学技术的高速发展,用数字方法处理信息思想和方法已经渗透到科学技术的各个领域,甚至渗透到社会科学的许多领域,成为与人类活动紧密相关的一门重要技术。“数字信号处理”是电子信息类专业的一门重要技术基础课程,是学生知识结构中的重要组成部分。通过本课程的学习,学生将能理解并掌握用数字方法进行信号处理的基本理论和方法,从而为后续课程及日后从事实际数字信号处理系统的应用与分析设计工作打下基础。

尽管数字信号处理技术自 20 世纪 70 年代后得到了飞速发展,但我们今天所使用的处理技术的基本原理和基本方法并没有发生变化,就本科生而言,数字信号处理的基本教学内容相对稳定。但国内外有影响力的数字信号处理教材通常以研究型大学的本科生为教学对象,因而选取的教学内容较深、较广、较难;另一方面,对于培养高等工程应用型本科人才的普通高校来说,“数字信号处理”课程的学时相对较少(仅一个学期),且需增加或加强课程的实践性教学环节,因此,直接选用这些教材就不适合了。

这样,对于高等工程应用型本科培养目标而言,就很有必要编写一本与之相适应的教材,这也就是本书的编写目的。本书是编者多年教学实践的总结,在选材上,本书精选了“数字信号处理”课程中的一些最核心的内容,适当减少了一些理论过深、难度较大的内容;在叙述上,特别注重各种分析方法所涉及的基本概念,并着重阐明了概念之间的联系与比较。同时,为使理论与应用相结合,书中的一些实例结合了电子信息类专业的工程应用背景。此外,为顺应计算机辅助教学工具普遍使用这一趋势,在每章的最后都配置了与该章主题相关的运用 MATLAB 实现数字信号处理的内容,并给出了应用示例以及配套上机练习题,以使读者通过计算机仿真实验,进一步掌握数字信号处理的基本原理及其应用。

全书共 5 章,始终围绕着对信号进行数字处理这一主线。第 1 章是离散时间信号与系统,介绍了数字信号与系统的基本概念和重要性质,给出了离散时间信号通过离散时间系统的时域分析方法。第 2 章是傅里叶分析,在给出序列的离散时间傅里叶变换及反变换的定义后,着重指出了离散时间反变换的物理

意义是离散时间信号的频域分解,由此引入了系统的频率特性,给出了离散时间信号通过系统的频域分析方法。第3章是Z变换与系统函数,介绍了Z变换的定义及重要性质,引入了数字系统的系统函数定义,讨论了系统单位采样响应、系统频率特性与系统函数之间的关系,同时也讨论了系统函数、系统差分方程与系统实现结构之间的关系,给出了离散时间信号通过离散时间系统的系统分析方法。第4章是离散傅里叶变换及其快速算法,作为数字信号处理的重要内容,本章在引入了离散傅里叶变换即DFT的定义及快速傅里叶变换的算法原理后,结合工程应用背景,重点介绍了DFT的两个重要应用,即频谱分析和快速卷积。第5章是数字滤波器,首先给出了数字滤波器的基本概念、设计步骤、设计指标的给定等基本知识,随后结合工程实际应用需求,对IIR型与FIR型滤波器的几种常用设计方法进行了较为详细的介绍。

本书由翁剑枫编著,徐鸿鹄主审。另外,邱薇薇配置了第1章至第3章的MATLAB示例与上机练习题。

由于编者水平有限,书中难免存在不妥或疏漏之处,恳请读者批评指正。

编著者

2015年11月

目 录

第 1 章 离散时间信号与系统	1	2.3 信号通过 LSI 系统的频域分析	42
1.1 引言	1	2.4 离散时间傅里叶变换的重要性质	44
1.2 模拟信号与数字信号	2	2.4.1 线性性、时移与频移性质	44
1.2.1 从模拟信号到数字信号	2	2.4.2 时域卷积定理	45
1.2.2 采样及采样定理	4	2.4.3 频域卷积定理	46
1.2.3 数字信号的表示	9	2.4.4 帕斯瓦尔(Parseval)定理	46
1.3 常用的数字信号及信号的基本操作	10	2.5 序列抽取与内插后的 DTFT	47
1.3.1 常用的数字信号(序列)	10	2.5.1 抽取后所得序列的 DTFT	47
1.3.2 序列的操作	14	2.5.2 内插后所得序列的 DTFT	48
1.4 离散时间系统及重要性质	17	2.6 本章小结与习题	49
1.4.1 系统的定义	17	2.6.1 本章小结	49
1.4.2 系统的性质	17	2.6.2 本章习题	50
1.5 LSI 系统的时域分析: 单位采样响应与 卷积和	18	2.7 MATLAB 应用	52
1.5.1 单位采样响应与卷积和	18	2.7.1 MATLAB 应用示例	52
1.5.2 单位采样响应的再讨论	21	2.7.2 MATLAB 应用练习	57
1.6 用差分方程表示的 LSI 系统	22	第 3 章 Z 变换与系统函数	59
1.7 本章小结与习题	24	3.1 Z 变换	59
1.7.1 本章小结	24	3.1.1 Z 变换概念的引入	59
1.7.2 本章习题	24	3.1.2 双边 Z 变换的定义	61
1.8 MATLAB 应用	28	3.1.3 双边 Z 变换与 DTFT 的关系	66
1.8.1 MATLAB 应用示例	29	3.2 双边 Z 变换的重要性质及常用序列的 Z 变换	67
1.8.2 MATLAB 应用练习	34	3.2.1 线性性	67
第 2 章 傅里叶分析	35	3.2.2 移位性质	67
2.1 离散时间傅里叶变换与反变换	35	3.2.3 时域卷积定理	68
2.1.1 离散时间傅里叶变换(DTFT)	35	3.2.4 Z 变换的其它性质	68
2.1.2 离散时间傅里叶反变换(IDTFT)	36	3.2.5 常用 Z 变换对	69
2.2 系统频率特性	38	3.3 Z 反变换	70
2.2.1 单频复正弦信号通过 LSI 系统	38	3.3.1 围线积分法(留数法)	71
2.2.2 LSI 系统的频率特性	38	3.3.2 部分分式展开法	72
		3.3.3 幂级数展开法(长除法)	74
		3.4 单边 Z 变换	77
		3.4.1 定义	77

3.4.2 单边 Z 变换的移位性质	78	4.4.1 线性卷积与周期卷积	141
3.4.3 利用单边 Z 变换解 LCCDE	78	4.4.2 利用周期卷积计算线性卷积	146
3.5 LSI 系统函数与系统结构	80	4.4.3 分段滤波简介	150
3.5.1 系统函数的定义	81	4.5 本章小结与习题	153
3.5.2 系统函数的零极点	82	4.5.1 本章小结	153
3.5.3 系统函数与单位采样响应的关系	84	4.5.2 本章习题	154
3.5.4 系统函数与系统频率特性的关系	86	4.6 MATLAB 应用	157
3.5.5 综合性的例子	88	4.6.1 MATLAB 应用示例	157
3.6 系统结构与有限精度实现简介	92	4.6.2 MATLAB 应用练习	169
3.6.1 系统结构	92	第 5 章 数字滤波器	171
3.6.2 系统的有限精度实现简介	96	5.1 基本概念	171
3.7 本章小结与习题	100	5.1.1 引言	171
3.7.1 本章小结	100	5.1.2 数字滤波器的设计步骤	173
3.7.2 本章习题	100	5.1.3 数字滤波器的指标给定	173
3.8 MATLAB 应用	104	5.2 模拟滤波器设计简介	176
3.8.1 MATLAB 应用示例	104	5.2.1 引言	176
3.8.2 MATLAB 应用练习	110	5.2.2 设计指标给定	177
第 4 章 离散傅里叶变换及其快速算法	112	5.2.3 三种常用的模拟滤波器	179
4.1 离散傅里叶变换与反变换的定义	112	5.2.4 滤波器系统函数的求取	182
4.1.1 离散傅里叶变换的引入	112	5.3 无限冲激响应滤波器的设计	186
4.1.2 关于 DFT 的进一步说明	114	5.3.1 冲激响应不变设计	187
4.1.3 DFT 与频率采样结构	120	5.3.2 双线性变换	192
4.2 离散傅里叶变换的快速算法	123	5.4 有限冲激响应滤波器的设计	198
4.2.1 引言	123	5.4.1 FIR 滤波器的线性相位性质	198
4.2.2 基 2 时间抽取 FFT 算法原理	123	5.4.2 线性相位 FIR 滤波器及其 $h(n)$ 的对称性	199
4.2.3 基 2 时间抽取 FFT 算法的进 一步说明	127	5.4.3 四种对称性下的频率特性	200
4.2.4 IDFT 的快速算法	129	5.4.4 FIR 滤波器的傅里叶级数展 开加窗法设计	204
4.3 离散傅里叶变换的应用——频谱分析	130	5.4.5 FIR 滤波器的频率采样设计	210
4.3.1 频谱分析与时窗	131	5.5 本章小结与习题	216
4.3.2 频谱分析涉及的几个重要因素	136	5.5.1 本章小结	216
4.4 离散傅里叶变换的应用——快速卷积	141	5.5.2 本章习题	216
		5.6 MATLAB 应用	217
		5.6.1 MATLAB 应用示例	218
		5.6.2 MATLAB 应用练习	231
		参考文献	232

第1章 离散时间信号与系统

本章要求:

1. 掌握从模拟信号转换为数字信号的基本概念,对采样与采样定理有深刻的理解。
2. 掌握数字信号的表达与基本运算,理解任意数字信号的时域分解表达式及其物理意义。
3. 理解系统的线性性、移不变性、因果性和稳定性;掌握线性时不变系统与因果稳定系统的概念。
4. 掌握线性时不变系统的单位采样响应与卷积和;基本掌握求解卷积和的解析方法和图解方法。
5. 对于用常系数线性差分方程表示的系统,基本掌握信号通过系统的时域响应求解方法。

1.1 引言

什么是信号?这是在“信号与系统”课程中已经学习过的一个概念,这里再回顾一下。

广义而言,任何携带信息的物理量都可以称为信号,也即信号是信息的物理载体。在科学与工程中,信号通常以连续时间函数或波形的形式出现,如电路中元件两端的电压信号或流过元件的电流信号等,这种可以表达为连续时间函数形式的信号称为连续时间信号,也称为模拟信号(Analog signal)。信号也可以是以空间位置等其它量作为自变量的函数,甚至还可以是同时以空间位置与时间作为自变量的函数。但由于在大多数应用中,使用最为广泛的是时间变量,同时为便于初学者学习,本书讨论的信号只涉及以时间为自变量的函数。以时间为自变量的信号中,根据时间变量是连续的或离散的,又可以将信号分为连续时间信号和离散时间信号两大类。即:自变量在整个时间连续区间都有定义的信号称为连续时间信号(Continuous time signal),而仅在一些离散点上才有定义的信号称为离散时间信号(Discrete time signal)。

20世纪70年代之前,由于技术的限制,除了少数需要进行复杂信号处理的应用(如地球物理数据的分析已经使用数字计算机)外,在绝大多数应用中,仍是用模拟设备直接在连续时间域内对信号进行处理。近四十多年来,随着集成电路技术的发展,更小更快更便宜而功能强大的电子计算机和专用数字硬件得到了充分发展,基于这些数字器件构成的数字系统能够以数字方式完成复杂的信号处理任务,而且具有成本低廉、性能稳定、一致性好的优点,尤其是可编程器件的出现,更使这一处理手段具有了灵活性高的优点。因此,现在除了带宽极大的信号实时处理仍须使用模拟信号处理或光信号处理技术外,凡在能够使用数字信号处理技术且处理速度足敷应用的场合,用数字方式进行信号处理已成为首选。

用数字方式处理信号时,所涉及的信号是离散时间信号,相对应的信号处理系统称为离散时间系统。为此,本章从信号的数字处理这一应用目的出发,对离散时间信号与系统的基础知识做以介绍。

1.2 模拟信号与数字信号

1.2.1 从模拟信号到数字信号

现实世界中遇到的绝大多数信号(如语音、图像、视频等)都是模拟信号,信号在时间和幅度上都是连续的,所以模拟信号与连续时间信号这两个名称通常不加以区分,可以混用。

为了使用数字方式对这些模拟信号进行处理,首先需要把信号变换成为能为计算机及数字硬件识别和操作的信号形式,也即转换成用二进制数来表示信号幅值的信号形式。在离散的时间点上存在而其幅值以二进制数出现的信号称为数字信号(Digital signal)。由于用确定字长的二进制数所能表示的信号个数是有限的,因此,数字信号在信号幅度上不再是连续的。这里要提醒读者注意的是数字信号与离散时间信号之间的区别:离散时间信号也是只存在于离散的时间点上,但其幅值从理论上而言存在于整个实数域。

将模拟信号即连续时间信号变换成二进制形式的数字信号的过程称为采样与量化。采样将模拟信号变换成了离散时间信号,而量化则将离散时间信号转换为数字信号。这两个步骤通常用模/数转换器(A/D, Analog/Digital)一并完成。由此转换得到的数字信号通过滤波、频谱分析等各种数字处理后,可能还需要还原为模拟信号,因此,典型的数字信号处理系统框图如图 1.2-1 所示。

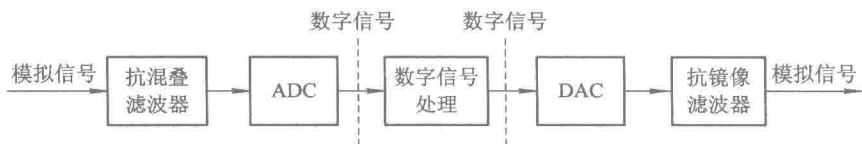


图 1.2-1 典型的数字信号处理系统框图

图 1.2-1 中的 ADC(Analog to Digital Converter)就是模/数转换器,而 DAC(Digital to Analog Converter)是数/模转换器(D/A, Digital/Analog),后者将处理好的数字信号还原成模拟信号。图中抗混叠滤波器和抗镜像滤波器的概念留待 1.2.2 节引入采样定理后再做以说明。这里先对采样和量化这两个概念做以介绍。

所谓采样,通常是指将模拟信号 $x(t)$ 以等间隔 T 对信号样本点取值,这称为均匀采样。也有非均匀采样,即采样后的各个样本点之间的间隔不相同的情况,但本书中不涉及。经过采样后所得到的是时间上不连续但幅度上仍然连续的离散时间信号 $x(nT)$ ($-\infty < n < +\infty$),也即采样后的信号已经成为了一个离散时间信号。显然,只要默认各个样本点之间的时间间隔等于 T , $x(nT)$ 就可以进一步简化表示为一个序列 $x(n)$ ($-\infty < n < +\infty$)。 $x(n)$ 的定义域为整数集(即在整数 n 上有定义, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$),而其值域为 $x(t)$ 动态范围内的任意值。这样表示后,时间变量 n 就是一个无量纲的量,这与连续时间信号的时间变量 t (秒)不同。

为了要用计算机或数字硬件对 $x(n)$ 进行操作处理, $x(n)$ 的幅值必须用二进制数来表达,也即须对序列 $x(n)$ 的每一个值按一定的规则分配一个二进制数。在存储器为 N 位也即字长为 N 时,可供使用的二进制数共有 2^N 个,因此,将 $x(n)$ 的取值转换成二进制数时,只能按规则选取这 2^N 个二进制数中的一个。例如,字长为 4 位的二进制数只能表示 16 个

二进制数, 它们是 0000, 0001, 0010, 0011, ..., 1111。因此, 经过量化后, $x(n)$ 的取值就不再是连续的, 而只能取 2^N 个二进制数中的某一个。

通常使用的转换规则有“舍入”和“截尾”两种。所谓“舍入”, 是指若 $x(n)$ 转换成二进制数后剩余的尾数大于存储器最小单位的一半, 则予以进位, 否则舍弃; 所谓“截尾”, 是指 $x(n)$ 转换成二进制数后的剩余尾数一律舍弃。

上述对离散时间信号序列分配二进制数的操作称为量化编码, 简称为量化。量化得到的信号才能称为数字信号。数字信号与离散时间信号具有相同的定义域, 但前者的值域是一个有限的离散集, 而后的取值范围是连续的。这样, 量化得到的数字信号的取值 $x(n)$ 将不可能完全与 $x(nT)$ 相同, 而是在其基础上引入了一个由量化引入的随机误差, 即

$$Q[x(nT)] = x(nT) + \sigma(nT) \quad (1.2-1)$$

式中: $Q[x(n)]$ 是 $x(nT)$ 量化后的值 $x(n)$; $\sigma(nT)$ 是量化引入的随机误差, 通常称为量化噪声。显然, 存储器位数越多, 量化噪声越小, 表数精度就越高, 但其代价是增加了数据长度, 因而会增大处理和传输的负担。

图 1.2-2 是采样与量化的原理说明。实际应用中, 采样与量化过程通常一并由 A/D 转换器完成。A/D 转换器的构成与工作原理这里不作展开介绍。

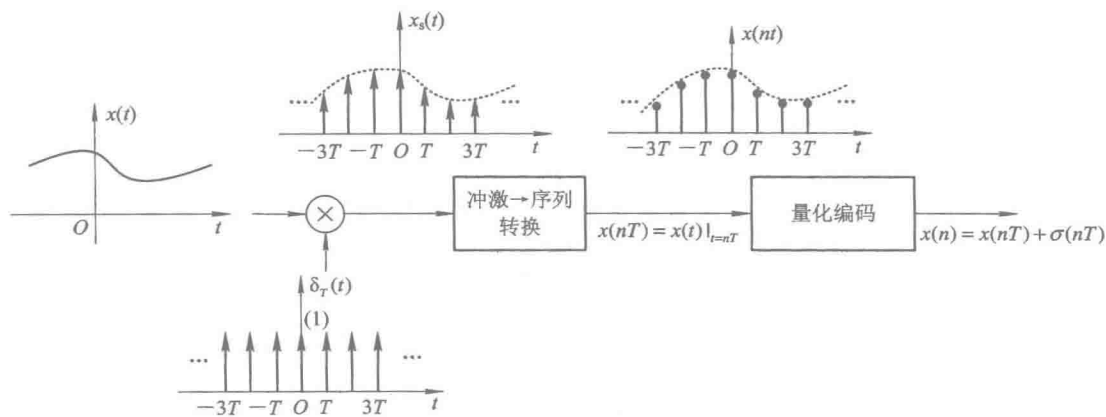


图 1.2-2 模拟信号到数字信号转换原理示意图

图 1.2-2 中, $x(nT)$ 是离散时间信号, 在 $t=nT$ 时取值 $x(t)|_{t=nT}$, 其值可以是 $x(t)$ 取值范围内的任意值。量化编码后的输出是数字信号 $x(n)$, 其中包含了量化误差 $\sigma(nT)$, 即 $x(n) = x(nT) + \sigma(nT)$ 。假设存储器位长足够大, 以致量化精度可视为无限, 则量化编码器输出的数字信号为

$$x(n) = x(nT) = x(t)|_{t=nT} \quad (1.2-2)$$

进行理论分析时, 数字信号都是在式(1.2-2)这一假设条件下进行的, 但在实际的数字信号处理过程中, 无论是信号本身还是系统对信号所进行的操作运算, 所用数据长度和所进行的数字操作精度都只能是有限的, 这就引起了所谓的“有限字长效应”问题。第 3 章会对这一问题做一简介。

除了量化误差外, 连续时间信号采样时可能发生的频谱混叠是另外一个误差源, 1.2.2 节将针对这一问题进行分析。

1.2.2 采样及采样定理

实际使用中的采样可以通过定时控制的电子开关来实现,即让模拟信号 $x(t)$ 通过一个快速闭合和断开的电子开关 S,如图 1.2-3 所示。

假设电子开关 S 每隔时间 T 秒闭合一次,闭合时间 $\tau \rightarrow 0$,则此时电子开关的输出为 $x(nT) = x(t)|_{t=nT}$, T 是采样间隔,也称为采样周期。经此操作后,连续时间信号成为了离散时间信号,也就是,信号只在离散的时间点上才有值,而各个离散点之间的值被丢弃了。现在的问题是,这一操作是否会使原信号 $x(t)$ 中的信息受损?换言之,能否从这些采样后的离散样本点 $x(nT) = x(t)|_{t=nT}$ 中还原出原来的模拟信号 $x(t)$?

图 1.2-4(a)中,原信号 $x(t)$ 是一个单频正弦信号,如果按照图 1.2-4(b)所示间隔进行采样,那么根据图 1.2-4(b)的离散样本点重建信号,就出现了图 1.2-4(c)所示的情况,也即恢复出来的信号可以是原信号(曲线 1),但也可以是与原信号完全不同的信号(曲线 2)。这就是通常所称的采样过程中的频谱混叠(aliasing)现象。

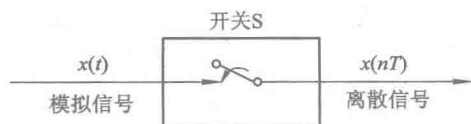


图 1.2-3 采样的电子开关

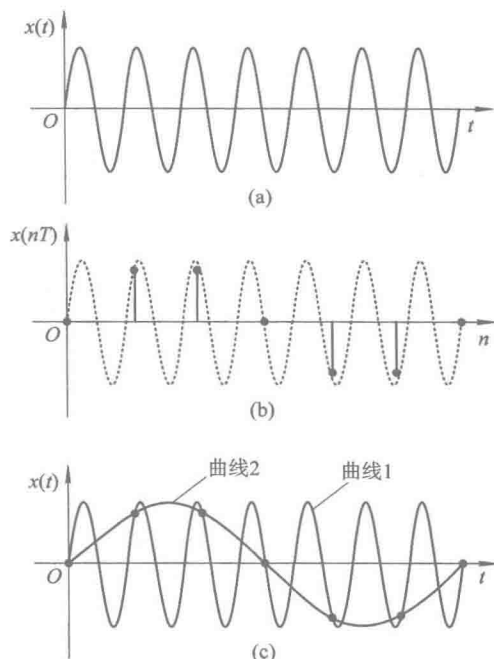


图 1.2-4 单频正弦信号采样与重建

直观上,造成这种现象的原因是样本点不够密集,也即采样间隔过大。如果采样间隔足够小,也即采样频率足够高,则应该能够从采样后的离散样本点恢复出原信号。这样,图 1.2-4 以单频正弦信号的采样提示了频谱混叠现象及其克服方法。虽然实际应用中信号要复杂得多,但由傅里叶分析可知,任何实际存在的信号均可分解为无数个不同频率的正弦信号的线性叠加。只要最高频率不是无穷大,信号的最高频率分量与最低频率分量之差(也即信号的带宽)就是一个有限值。由图 1.2-4 的分析可推知,对于带宽有限的信号而言,只要采样时能够保证信号中最高频率成分不产生频谱混叠,就可以保证在采样后不产生频谱混叠。

下面对有限带宽信号的采样过程做进一步分析。

如图 1.2-5 所示(同时参看图 1.2-2), 在采样间隔为 T 时, 输入模拟信号 $x_a(t)$ 经理想冲激采样后的采样数据信号 $x_s(t)$ 可表示为

$$\begin{aligned} x_s(t) &= x_a(t) \cdot \delta_T(t) \\ &= x_a(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT) \end{aligned} \quad (1.2-3)$$

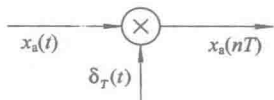


图 1.2-5 信号采样过程的等效数学运算

式中, $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ 是理想单位冲激信号脉冲串。从式(1.2-3)的右端可见, 经过理想冲激采样后, 原信号 $x_a(t)$ 所含信息应该由其样本点的数值 $x_a(nT)$ 所携带, 而与样本点之间的信号取值无关。因此, 只要能够从 $x_s(t)$ 中恢复出 $x_a(t)$, 则 $x_a(t)$ 所携带的信息就不会受损。

图 1.2-6 是有限带宽信号 $x_a(t)$ 经过采样后所输出的理想采样数据信号 $x_s(t)$ 的频谱。鉴于这一内容已在“信号与系统”课程中学过, 这里省略其推导过程, 读者可自行查阅相关内容。

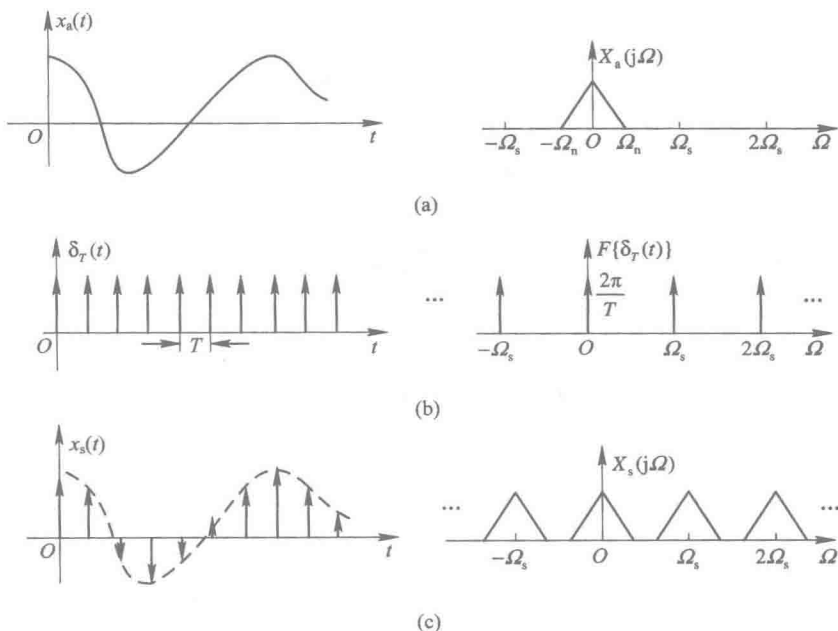


图 1.2-6 有限带宽信号经过采样过程后的频谱变化

由图 1.2-6 可知, 采样数据信号的频谱是原信号频谱以 $\Omega_s = 2\pi/T$ 为周期的周期延拓。根据 Ω_s 的不同, 周期延拓后的频谱有可能会出现三种情况, 如图 1.2-7 所示。

从图 1.2-7 可见, 为使采样后不产生频谱混叠, 也即能够从 $x_s(t)$ 的频谱中得到 $x_a(t)$ 的频谱, 从而在时域中可以从 $x_s(t)$ 恢复得到 $x_a(t)$, 采样频率必须满足 $\Omega_s \geq 2\Omega_{\max}$, 即 $f_s \geq 2f_{\max}$ 。这就是采样定理的基本内容。尽管以上推断是就理想冲激采样情况得出的, 但对于实际采样而言, 这一结论仍然成立。对于实际采样的分析, 在“信号与系统”课程中已经学过, 这里不予重述, 有兴趣的读者可查阅相关书籍。

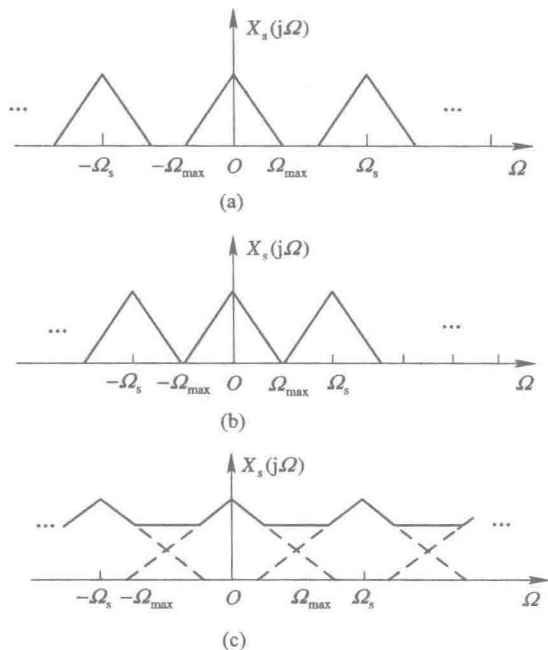


图 1.2-7 周期延拓后的频谱的三种情况

采样定理：对于一个有限带宽的模拟信号 $x_a(t)$ ，若其频谱的最高频率为 $f_{\max}$ ，采样间隔为 T ，则对 $x_a(t)$ 采样时，应保证采样频率至少是信号最高频率的两倍，也即 $f_s \geq 2f_{\max}$ 。在满足这个条件时， $x_a(t)$ 的频谱将无损地包含在 $x_s(t)$ 的频谱之中，因此可由采样数据信号 $x_s(t)$ 完全恢复出原始信号 $x_a(t)$ 。这就意味着，对 $x_a(t)$ 采样所得的样本 $x_a(nT)$ 保留了 $x_a(t)$ 的全部信息。而最小的采样频率 $f_{sN} = 2f_{\max}$ 通常称为奈奎斯特率(Nyquist Rate)或奈奎斯特采样率。

从采样数据信号中恢复原模拟信号的系统框图如图 1.2-8 所示。

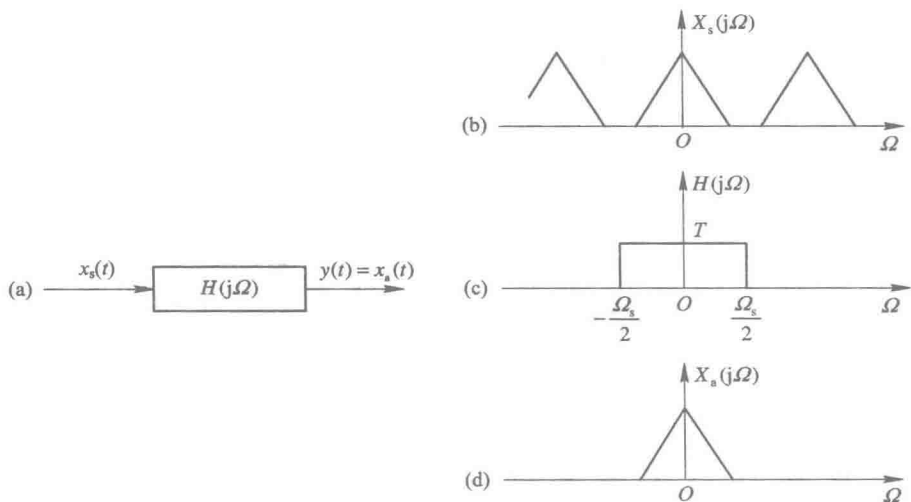


图 1.2-8 从采样数据信号中恢复原模拟信号的系统框图

图 1.2-8 中, $H(j\Omega)$ 是在“信号与系统”课程中已熟识的理想低通滤波器的频率特性, 可表示为

$$H(j\Omega) = \begin{cases} T & |\Omega| < \frac{\Omega_s}{2} \\ 0 & |\Omega| \geq \frac{\Omega_s}{2} \end{cases} \quad (1.2-4)$$

相应的单位冲激响应 $h(t)$ 为

$$h(t) = \frac{\sin\left(\frac{\Omega_s t}{2}\right)}{\frac{\Omega_s}{2}t} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)}{\frac{\pi}{T}t} \quad (1.2-5)$$

由图 1.2-8 可知, 经 $H(j\Omega)$ 恢复出原模拟信号 $x_a(t)$ 的频谱后, $x_a(t)$ 可表示为

$$x_a(t) = x_s(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_s(nT) \delta(t-nT) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_s(nT) h(t-nT) \quad (1.2-6)$$

根据式(1.2-5), 有

$$h(t-nT) = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T}(t-nT)\right]}{\frac{\pi}{T}(t-nT)} \quad (1.2-7)$$

这是信号处理领域内常遇到的一种内插函数, 其波形如图 1.2-9 所示。波形特点为: 在采样点 nT 上函数值为 1, 其余采样点上函数值为零。

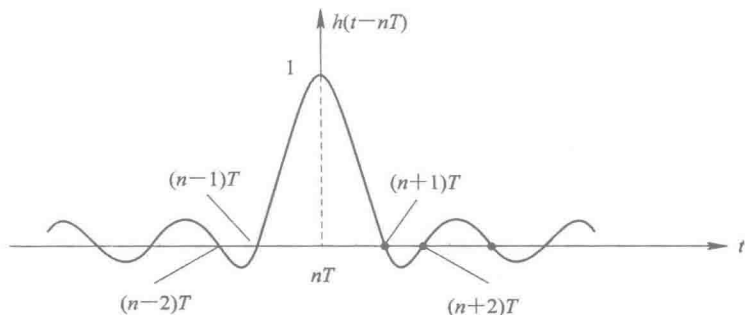


图 1.2-9 内插函数

引入此内插函数后, 原模拟信号 $x_a(t)$ 可表示为

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_s(nT) \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T}(t-nT)\right]}{\frac{\pi}{T}(t-nT)} \quad (1.2-8)$$

式(1.2-8)表明, 模拟信号 $x_a(t)$ 可由采样后的样本点 $x_s(nT)$ 经由内插函数内插得到。这说明, 采样时只要满足采样定理的要求, 则原模拟信号所包含的全部信息已由其样本点 $x_s(nT)$ 所携带。

【例 1.2-1】 有一采样系统, 采样频率为 $\Omega_s = 6\pi$, 信号采样后通过理想低通滤波器恢复, 低通滤波器频率特性为

$$H(j\Omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |\Omega| < 3\pi \\ 0 & |\Omega| \geq 3\pi \end{cases}$$

今有两个输入信号, $x_{a1}(t) = \cos 2\pi t$, $x_{a2}(t) = \cos 5\pi t$, 问它们在理想冲激采样后经过此低通滤波器进行恢复后的输出 $y_{a1}(t)$ 、 $y_{a2}(t)$ 是否有失真?

【解】 题目给出系统的采样频率为 $\Omega_s = 6\pi$, 所以 $x_{a1}(t)$ 在采样时不会发生频谱混叠, 而相应的信号频率成分位于理想低通滤波器的通带内, 因此通过此低通滤波器进行恢复时, 信号不失真; 对 $x_{a2}(t)$ 而言, 则由于采样频率小于信号频率的 2 倍, 因此采样后一定会产生频谱混叠。在本例中, 频率为 $\pm 5\pi$ 的谱线会由于周期延拓而折叠生成频率等于 $\pm \pi$ 的谱线。这样, 相应的采样数据信号经过低通滤波器试图恢复出原模拟信号时, 得到的不是频率为 5π 的正弦信号, 而是频率为 π 的正弦信号, 也即信号产生了失真。

【例 1.2-2】 考虑如下信号:

$$x_a(t) = 3\cos 50\pi t + 10\sin 300\pi t - \cos 100\pi t$$

问: (1) 该信号的奈奎斯特采样率为多少?

(2) 如果对此信号用 $f_s = 2f_{\max}$ 进行采样, 会出现什么问题?

【解】 (1) 根据题意, 信号中存在着三个频率成分, 它们是 $f_1 = 25$ Hz, $f_2 = 150$ Hz, $f_3 = 50$ Hz, 最高频率为

$$f_{\max} = 150 \text{ Hz}$$

所以该信号的奈奎斯特采样率为

$$f_{sN} = 2f_{\max} = 300 \text{ Hz}$$

(2) 当我们用 $f_s = 2f_{\max} = 300$ Hz 对题目给出的信号进行采样时, 可以发现, 由于采样周期 $T = 1/f_s = 1/300$, 因此在采样后, 信号中频率为 150 Hz 的这一部分(也即 $10\sin 300\pi t$ 的样本值)在理论上会等于 $10\sin \pi n$, 这就意味着每次采样所采到的样本点都是 $10\sin 300\pi t$ 的零点。也即, 采样后频率成分为 150 Hz 的这部分信号消失了, 导致采样出现了错误。

虽然在实际应用中, 出现上面这种情况属小概率事件, 但仍应防止其发生。这样, 此例提示了, 尽管采样定理要求的采样频率为不低于信号最高频率的两倍, 但是在实际应用中, 通常应选择高于奈奎斯特率的采样频率。

为了尽可能地消除采样时可能产生的混叠误差, 实际应用中通常采用的办法是让信号通过一个抗混叠保护滤波器(Anti-aliasing Guard Filter)来阻止不必要的高频分量通过, 再用过采样(Over Sampling)技术(也即提高采样率方法)来进一步减小频谱混叠。例如, 在数字电话中, 抗混叠滤波器将允许 300~3000 Hz 的语音频率分量通过, 而滤除 3000 Hz 以上的频率分量, 采样率则取为 8 kHz。至于图 1.2-1 中的抗镜像滤波器(Image-reject Filter), 这是在采样时有时域内插, 也即有频域压缩时使用的一种滤波器。时域内插与频域压缩的内容已超出了普通高校的本科教学要求, 但第 2 章中我们仍会对此做以简介。在这里只需理解这个滤波器也是一个低通滤波器, 用于滤除多余的频谱, 其目的是为了从数/模转换器的输出中正确地恢复得到(经过数字处理后的)模拟信号即可。

最后要说明的是, 很多文献和书籍中, 将采样间隔也即采样周期用符号 T_s 表示, 为便于读者参阅其它书籍, 本书将同时使用 T 和 T_s 这两个符号。在需要特别强调对模拟信号进行采样的时候, 使用带有下标 s(用以强调表示 Sampling)的符号 T_s ; 而在绝大部分情况下, 使用不带下标的符号 T 。

1.2.3 数字信号的表示

如前所述,数字信号是指时间和幅值都是离散的一个序列,其自变量是整数 n ,表示数字信号的存在时间是 nT_s ,序列的数值则是一个有限位二进制数。但由于在对数字信号进行理论分析时,用字长为 N 位的二进制数表示信号幅值很不方便,因此仍用十进制数来表达。同时,为突出问题的主要方面,进行理论分析时也不考虑其量化误差。也即,在理论分析时,认定量化器具有无限字长,因而信号的表数精度为无限。在这样的前提条件下,数字信号与离散时间信号就可视为无区别了。这也是一些书籍中对数字信号与离散时间信号不加以区分的原因。基于这一前提,以下不再对数字信号与离散时间信号这两个名称加以区分。

综上所述,数字信号可写为

$$x(n) = x_a(nT_s) = x_a(t) \big|_{t=nT_s} \quad (1.2-9)$$

式中, T_s 为采样周期, n 为整数,下标 a 表示模拟信号。请初学者注意此式与式(1.2-2)的同一性。

数字信号 $x(n)$ 的时域表示方法有解析表达式、序列和图形法三种。

例如,若 $x(n)$ 的解析表达式为

$$x(n) = 5 - |n| \quad -5 \leq n \leq 5 \quad (1.2-10)$$

由式可知,这个数字信号是一个长度为11点的序列,因此,离散时间信号通常也称序列。在本书中,凡涉及数字信号的,信号与序列这两个名称不加以区分。

如果直接用序列表示,也即直接表示成按一定次序排列的数值的集合,则 $x(n)$ 可写为

$$x(n) = \{0, 1, 2, 3, 4, \underset{\uparrow}{5}, 4, 3, 2, 1, 0\} \quad (1.2-11)$$

式(1.2-11)中,箭头所指的值表示 $n=0$ 时的 $x(n)$ 的值,此处 $x(0)=5$; n 值规定为自左向右逐一递增。这种表示方式常用于无法用解析式表达的 $x(n)$ 。

离散时间信号最直观的表示是图示法,图1.2-10是式(1.2-10)和式(1.2-11)所示的 $x(n)$ 的图示表示。

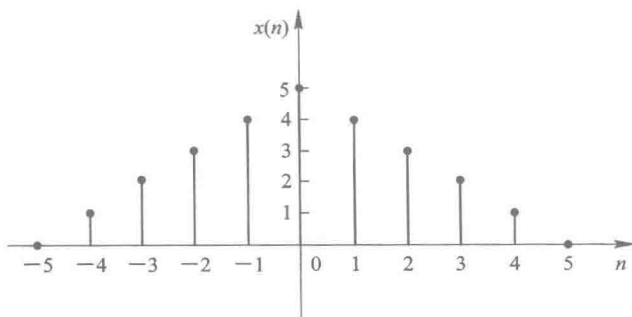


图 1.2-10 离散时间信号的图示法

图1.2-10中,横坐标为 n ,纵坐标为 $x(n)$ 的值。这里要强调的是,虽然横坐标仍然用直线数轴表示,但 $x(n)$ 在数轴上只在 n 是整数的点上才有定义,对非整数 n 值, $x(n)$ 无定义,而不是等于零。