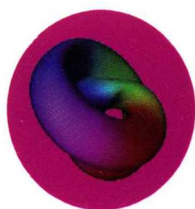

非线性延时系统的离散

FEIXIANXING YANSHI XITONG DE LISAN

张元良 著



华中科技大学出版社
<http://www.hustp.com>

淮海工学院学术著作出版基金项目

江苏省高校自然科学研究面上项目(10KJB510001)

江苏省重点建设学科“机械制造及其自动化”项目

非线性延时系统的离散

张元良 著

华中科技大学出版社

中国·武汉

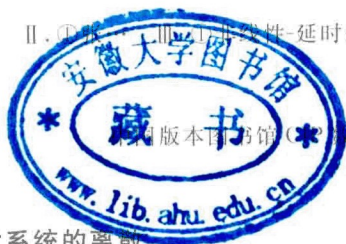
内 容 简 介

本书主要论述了基于 Taylor 级数的非线性延时系统的离散算法的设计。在分析了非线性延时系统的特点和回顾了传统的非线性连续系统的离散算法的基础上提出了一种基于 Taylor 级数和零阶保持假设的具有输入信号延时、状态参数延时和输出延时的非线性系统的离散算法。该离散算法可以为非线性延时系统提供准确的离散模型。为了提高离散模型的精度,利用一阶保持假设和二阶保持假设来代替零阶保持假设。在大采样周期的情况下将 SS(scaling and squaring)技术与基于 Taylor 级数的非线性延时系统的离散算法相结合,使得在不大幅度增加解算难度的基础上提高了系统离散模型的精度。最后利用系统仿真验证了提出的非线性延时系统离散算法的有效性。

图书在版编目(CIP)数据

非线性延时系统的离散/张元良著. —武汉:华中科技大学出版社,2015.5
ISBN 978-7-5680-0882-2

I. ①非… II. ①张… III. ①非线性-延时系统-离散数学-研究 IV. ①O158



版本图书馆(CIP)数据核字(2015)第106077号

非线性延时系统的离散

张元良 著

策划编辑:严育才

责任编辑:王 晶

封面设计:刘 卉

责任校对:张 琳

责任监印:朱 玟

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)81321913

录 排:华中科技大学惠友文印中心

印 刷:虎彩印艺股份有限公司

开 本:787mm×1092mm 1/16

印 张:8.75

字 数:206千字

版 次:2015年8月第1版第1次印刷

定 价:25.00元



本书若有印装质量问题,请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线:400-6679-118 竭诚为您服务
版权所有 侵权必究

前 言

工业过程中的系统都是带有非线性特性的。用传统的线性控制方法来控制非线性很强的系统往往得不到理想的控制效果,有时甚至无法保证控制系统的稳定性。要想设计出精确稳定的控制器,就要考虑系统的非线性特性。因此,近些年来关于非线性系统的控制器的研究得到了广泛的重视。在现代工业计算机控制系统中,由于远距离通信和计算复杂等因素,大的时间延时是无法避免的。而且随着工业生产过程的日益复杂化,时间延时出现得越来越频繁,对工业生产的控制系统的影响也越来越大。控制器的设计如果不考虑到系统的时间延时,往往很难得到很好的控制效果,而且往往会导致控制系统不稳定。

本书基于作者多年从事非线性延时系统离散算法的研究成果,并参考了国内外相关的科技文献与资料,论述了非线性延时系统的离散算法的设计。本书内容主要包括非线性系统的离散、非线性输入延时系统的离散、非线性状态参数延时系统的离散、非线性输出延时系统的离散和 SS(scaling and squaring)技术等。在本书出版之际,向本书所引用的文献与资料的原作者以及支持和帮助本书出版的专家和同仁们表示由衷的谢意。

本书共分 6 章。淮海工学院乔斌教授、赵明光教授对本书进行了审阅并提出了许多宝贵意见;淮海工学院刘青老师参加了资料收集和书稿的整理,在此深表谢意。特别感谢淮海工学院舒小平教授对本书的关心和支持!

特别感谢淮海工学院学术著作出版基金、江苏省重点建设学科“机械制造及其自动化”项目和江苏省高校自然科学研究面上项目(10KJB510001)对本书的经费支持。

由于作者水平有限,加之时间紧迫,书中的缺点、错误和不当之处在所难免,敬请各位读者批评指正。

张元良

2015 年 3 月于连云港

目 录

第 1 章	绪论	(1)
第 2 章	非线性系统的离散	(5)
2.1	Euler 方法	(5)
2.2	Runge-Kutta 方法	(6)
2.3	线性系统的离散	(8)
2.4	非线性系统的离散	(9)
第 3 章	非线性输入延时系统的离散	(19)
3.1	单输入、单输出非线性输入延时系统的离散	(19)
3.2	多输入、多输出非线性输入延时系统的离散	(22)
3.3	非线性非仿射输入延时系统的离散	(59)
第 4 章	非线性状态参数延时系统的离散	(79)
4.1	线性状态参数延时系统的离散	(79)
4.2	非线性状态参数延时系统的离散	(80)
第 5 章	非线性输出延时系统的离散	(103)
5.1	基于零阶保持假设的非线性输出延时系统的离散	(103)
5.2	基于一阶保持假设的非线性输出延时系统的离散	(109)
第 6 章	SS(scaling and squaring)技术	(113)
6.1	SS 技术在多输入、多输出非线性延时系统离散中的应用	(114)
6.2	SS 技术在非线性非仿射延时系统离散中的应用	(121)
6.3	SS 技术在非线性状态参数延时系统离散中的应用	(125)
6.4	SS 技术在非线性输出延时系统离散中的应用	(128)
参考文献		(131)

第 1 章 绪 论

1. 概述

在工业控制系统中,延时现象经常发生。典型的延时系统包括通信网络系统、化学过程系统、远程操作系统、生物系统、水下机器人系统等。延时的现象使得对控制系统的分析和控制变得非常的复杂。在很多物理、工业和工程系统中,由于系统处理信息的能力有限和系统不同部分之间彼此大量传送数据,导致延时。延时现象也可能由内部的物理现象产生,如质量传送等。复杂的计算也可能产生延时。延时的时间可以是不变的,也可以是随时间变化而变化的;基于所应用的系统的特性可以是确定的,也可以是随机产生的。在所有的这些情况中,延时现象都会严重影响系统的性能,而且大部分情况下会对控制系统产生负面的影响。因此有延时现象的系统在过去的 30 年中得到了广泛的关注和研究。大部分的研究是基于微分方程形式的有延时的控制系统,而且关于以差分方程的形式还是以微分方程的形式进行延时系统的研究的争论也得到了广泛的关注。因此有必要去分析延时现象存在的问题,为有延时的系统设计合适的控制器。有延时的控制系统由于具有无限维数的特性,所以具有复杂的特性。甚至对于非时变的、线性的具有不变的输入延时或状态参数延时的系统来说,如果是在连续时间域表达的话,也是具有无限维数的特性的。而在过去的几十年中,已经发展成熟的控制器设计技术都是针对有限维数的控制系统的,因此很难将这些已经发展成熟的控制器设计技术应用到具有延时现象的控制系统中。因此,对于具有延时现象的控制系统来说,研究新的控制器设计算法来解决延时现象所带来的一系列问题是很有必要的。

延时现象在很多工程领域中极为常见,例如化学反应过程、液压系统、轧钢机系统等。延时现象的存在经常导致系统稳定性下降,系统出现振荡,系统的执行能力下降,从而使得系统的分析和反馈控制器的设计变得非常复杂。同时,工程领域中的控制系统的非线性特性往往非常明显。这都使非线性延时系统的控制问题成为控制领域的研究热点之一。其研究的方向之一是尝试将无延时非线性系统的控制思想和方法延伸到非线性延时系统中去。这些研究方法包括输入、输出线性化和去耦合,部分反馈线性化,李雅普诺夫(Lyapunov)函数等。Jankovic 采用主导设计公式,为延时系统建立了稳定的通用充分条件。Su 和 Huang 为线性不确定延时系统提出了一种基于延时时间的稳定条件。Wu 为存在非线性扰动的线性时变延时系统提出了一种鲁棒的稳定条件。

数字技术的出现和高速发展使得当今工业中的计算机控制系统得到了广泛的应用。由于计算机控制系统不断发展,在实践中,非线性控制算法大都在微处理器或数

字处理器上执行。最为直接的结果便是相应的控制算法都以离散的形式来执行。一般来说,计算机控制系统的设计主要有两种方法:一是根据连续的系统模型设计出一个连续的控制器,然后利用离散方法将连续的控制器离散,从而得到相应的数字控制器;二是先利用离散方法将连续系统模型进行离散处理,然后基于这个离散后的系统模型来设计相应的数字控制器。这两种方法都需要有一个能够满足要求的离散方法。而且,很明显第二种方法更具有吸引力,因为这种方法是直接处理控制系统的离散的。对于第一种方法来说,如果被控制的系统本身具有延时现象,则由于其在连续时间域中的无限维数的特性,控制算法的设计会变得非常困难。而第二种方法是先将连续的被控系统离散,得到一个有限维数的离散系统,然后再进行控制器的设计,这就方便多了。采样周期对连续系统的系统理论特性的影响非常重要,因为控制系统的特性直接影响控制的品质。

传统的数学方法,如 Euler 法和 Runge-Kutta 方法,已经应用于无延时现象的连续控制系统的离散模型。但是在应用这些离散方法时,为了得到满意的系统离散模型,采样周期必须取得足够的小才可以。但是对于大部分的控制系统来说,这个要求有时是无法达到的。由于物理上或技术上的限制,大的采样周期有时候是不可避免的。因此,设计出一种能够适应大采样周期的离散方法势在必行。Kazantzis 以著名的线性延时系统的离散方法为基础,提出了一种适用于非线性连续延时系统的离散方法,可以有效地解决大采样周期的问题。该方法也可以应用到非线性多输入、多输出延时系统 and 非线性非仿射延时系统的离散模型的求取。该离散方法对原非线性系统特性的影响(如平衡点特性、稳定性等)也得到了研究。对于这种离散方法,有如下要求:①该离散方法可以离散非线性具有延时现象的连续系统;②该离散方法在大采样周期的情况下依然可以得到满意的系统离散模型;③该离散方法可以不改变原连续系统的系统特性;④该离散方法计算不复杂,但加重了计算的负担。

2. 研究背景

工业过程中的系统都是带有非线性特性的。用传统的线性控制方法来控制非线性很强的系统往往得不到理想的控制效果,有时甚至无法保证控制系统的稳定性。要想设计出精确稳定的控制器,就要考虑到系统的非线性特性。因此,近些年来关于非线性系统的控制器的研究得到了广泛的重视。在现代工业计算机控制系统中,由于远距离通信和计算复杂等因素,大的延时的引入是无法避免的。而且随着工业生产过程日益复杂化,延时现象出现得越来越频繁,对工业生产控制系统的影响也越来越大。控制器在设计时,如果不考虑系统的延时现象,往往很难得到好的控制效果。

传统的非线性系统的离散方法,如 Euler 法和 Runge-Kutta 方法,往往需要很小的采样周期,以便得到精确的系统离散模型。但是由于工业生产上的物理限制,有时候大的采样周期是在所难免的。于是在大的采样周期的条件下,利用传统的非线性系统离散方法得不到精确的系统离散模型。这使得基于该系统离散模型所设计的数字控制器不能够很好地控制生产过程,有些时候甚至会影响生产。因此,如何在大的

采样周期的条件下得到精确的系统离散模型,成为了有延时现象的非线性系统离散化研究的方向。而且,该有延时现象的非线性连续系统的离散方法还应该满足以下几个要求:首先,在得到精确的系统离散模型的同时应该保持原来连续系统的一些特性,如平衡点和收敛性等;其次,在大的采样周期下,该离散方法通过自身参数的调整应该能够提供精确的系统离散模型;最后,利用该离散方法对有延时现象的非线性系统进行离散处理所需的计算负担应该不是很大,否则会因需要的计算时间很长而无法应用到工业生产中。

3. 研究现状

工程方面关于处理有延时现象的系统的论著非常广泛。Suh 和 Lee 通过研究 Lyapunov 函数讨论了状态参数延时系统的稳定性问题。Niu 等基于神经网络模拟特性和 Lyapunov 理论为延时系统提出了一种基于神经网络的滑膜控制算法。该算法利用神经网络解决了具有不确定参数、未知非线性特性和外部扰动等不利因素的状态参数延时系统的鲁棒控制问题。Gao 和 Wang 为线性状态参数延时系统提出了一种基于延时时间的鲁棒 H_∞ 控制器。Xia 等为线性输入和状态参数延时系统提出了一种滑膜控制算法。Xu 等研究了不确定状态参数延时系统的鲁棒稳定性问题。Chen 等研究了一系列的线性输入和状态参数延时不确定系统的成本控制问题,通过以广义系统形式来表达延时系统和基于矢量叉积理论,得到了以线性矩阵不等式的形式的成本控制器的稳定充分条件。Liu 和 Zhao 针对线性时变输入延时系统的可控性问题,进行了研究,他们提出了这类系统的可控性的充分必要条件。

迄今为止,上述大部分的文献处理的都是线性的有延时现象的控制系统。其中,不少学者还关注了对于有恒定的延时时间或不确定的延时时间的系统的性能和稳定性的分析。然而众所周知,利用在控制领域中常用的一阶线性技术对诸如化学反应系统、计算机网络、生物系统等具有复杂动态特性的系统进行线性化处理是不适合的。最近,也有不少学者关注存在传感器或执行器时间延时现象的非线性控制系统的控制器的分析和设计。Xie 等研究了非线性状态参数延时不确定系统的鲁棒控制问题。Forouzentabar 等为在通信过程中具有延时的非线性主从式机器人系统提出了一种远程遥控控制器,该控制器能够使用远程遥控系统来补偿由于人和环境而产生的干扰。Du 和 Lin 为不确定多变量非线性延时系统设计了一种自适应模糊控制器。Yao 等研究了具有随机的网络产生的延时和数据包丢失情况的不确定网络控制系统的指数均方稳定控制问题。Huang 等基于 Takagi-Sugeno 模糊模型方法为非线性延时系统提出了一种滤波器设计技术。Salim 为有状态边界的非线性状态延时系统设计了一种具有动态增益的非线性观测器。Zhang 等研究了连续非线性延时系统的绝对指数稳定性分析问题。Hua 等研究了不确定延时系统的鲁棒控制问题。这些系统具有多个延时和不确定的非线性特性。

在离散领域当中,不少学者做出了相应的研究。Chen 为具有对称状态参数延时系统建立了离散状态空间模型。基于该方法可以在较大的采样周期的情况下进行离

散模型的结算。Xu 等研究了一系列的具有不确定参数的离散 Lipschitz 非线性状态参数延时系统的控制算法设计问题,在系统中的状态参数和输出测量方程中存在非线性因素。Guo 等为两自由度的模拟控制器和状态参数、输入和输出延时系统提出了一种差值方法来获得其离散模型。Lam 和 Leung 针对基于离散模糊模型的延时控制系统进行了稳定性分析。为了更好地进行稳定性分析,采用了 T-S 模糊模型来表达非线性系统的离散模型。Ma 等讨论了不确定延时离散奇异系统的鲁棒无记忆状态反馈 H_∞ 控制问题。基于一系列的等效变换,分析了标准状态空间不确定延时离散系统的鲁棒状态反馈 H_∞ 控制问题。Wu 等研究了具有混合延时的离散 Markov 跳变神经网络的延时相关稳定性分析问题。Wu 基于模糊 Lyapunov-Krasovskii 函数方法研究了离散非线性状态延时系统的 H_∞ 模糊控制问题。Zhang 等针对离散延时系统脉冲控制问题进行了讨论,他们采用 Lyapunov 函数和 Razumikhin 技术来获得有脉冲影响的离散延时系统的稳定性判据。Wu 等针对离散 Takagi-Sugeno 模糊延时系统的 H_∞ 模型逼近问题进行了讨论,他们通过使用投影方法,将逼近模型投射到一个属于线性矩阵不等式约束的连续最小化问题来解决 H_∞ 模型逼近问题。

第 2 章 非线性系统的离散

由于数字技术在全球市场中的广泛发展和应用,先进的计算机控制和状态监测系统已经渗入到几乎所有的工业和商业部门中。尤其是最近的数字微处理器技术的发展,已经为数字计算机控制盒监测系统带来了诸如运行成本低、操作多样灵活、功能复杂等优良特性。这些都促进直接数字控制系统和监测方法进一步发展。在当前的实际应用中,复杂系统动态行为的处理,往往采用先进的控制策略,并在微控制器或数字信号处理器上实现。也就是说,所使用的控制算法是在离散域中开发和应用的。因此,离散算法,特别是针对复杂的非线性系统的离散算法的研究得到了广泛的关注。

传统的非线性系统的离散方法,如 Euler 和 Runge-Kutta 方法,往往需要很小的采样周期,以便得到精确的非线性系统离散模型。这里先简要介绍传统的非线性系统离散算法:Euler 方法和 Runge-Kutta 方法。

2.1 Euler 方法

一个一阶常微分方程可用式(2.1)表示。

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

记 $x_n = a + nh (n=0, 1, 2, \dots)$, $h > 0$ 为步长,一般假定为常数。该式的数值解是指通过某种方法获得解 $y(x)$ 在点 x_n 上的近似解 y_n , 即 $y(x_n) \approx y_n (n=0, 1, 2, \dots)$ 。为实现这一目标, Euler 方法首先将微分算子离散,并用 x_n 代替 x_0 , 于是式(2.1)可写成式(2.2)所示的离散形式。

$$\frac{y(x_n + h) - y(x_n)}{h} \approx f(x_n, y(x_n)) \quad (2.2)$$

以 y_n 表示 $y(x_n)$ 的近似值,则式(2.2)可以写成式(2.3)的形式。

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.3)$$

式(2.3)就是显式的 Euler 公式,它可以从 y_0 出发,逐次算出 $y_1, y_2, y_3, \dots$ 。

如果用 x_{n+1} 代替 x_0 于是式(2.1)就可写成式(2.4)所示的离散形式。

$$\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} \approx f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) \quad (2.4)$$

与前述内容相似,以 y_n 表示 $y(x_n)$ 的近似值,则式(2.4)可以写成式(2.5)的形式。

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.5)$$

式(2.5)就是隐式的 Euler 公式或者称为向后 Euler 方法,它与显式的 Euler 公式的不同之处在于,向后 Euler 方法每计算一步都要解函数方程(2.5)才能得到 y_{n+1} 。

如果取上述隐式的 Euler 公式和显式 Euler 公式的算术平均值的结果,则可以得到式(2.6)。

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.6)$$

式(2.6)称为梯形公式。

实际应用中,常用迭代式(2.7)来计算 y_n 。

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + h(f(x_n, y_n)) \\ y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)})) \\ (k = 0, 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (2.7)$$

在式(2.7)中,当 $|y_{n+1}^{(k+1)} - y_{n+1}^{(k)}| < \epsilon$ (ϵ 为设置的正数上限)时,取 $y_{n+1} \approx y_{n+1}^{(k+1)}$ 。

由式(2.5)可以看出,在计算 y_{n+1} 时由于迭代工作量较大,所以一般只迭代一次,构成一类预估-校正算法,即

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(p)} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1}^{(c)} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(p)})) \end{cases} \quad (2.8)$$

并取 $y_{n+1} = y_{n+1}^{(c)}$ 。

式(2.8)还可以写成式(2.9)的形式。

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}f(k_1 + k_2) \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1) \\ (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (2.9)$$

式(2.9)称为改进 Euler 方法,在实际应用中也经常写成式(2.10)的形式。

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))) \quad (2.10)$$

2.2 Runge-Kutta 方法

受前述的改进 Euler 方法启发,更一般的算式可用式(2.11)来表达。

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \omega_1 k_1 + \omega_2 k_2 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + \alpha h, y_n + \beta k_1) \\ (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (2.11)$$

适当选择参数 $\omega_1, \omega_2, \alpha, \beta$ 使局部截断误差 $T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3)$, 其中仍假定 $y_n = y(x_n)$ 。

由二元函数 Taylor 展开式可以得到式(2.12)。

$$\begin{aligned} k_2 &= hf(x_n, y_n) + \alpha h^2 f'_x(x_n, y_n) + \beta h k_1 f'_y(x_n, y_n) + O(h^3) \\ &= hy'(x_n) + h^2 [\alpha f'_x(x_n, y_n) + \beta f(x_n, y_n) f'_y(x_n, y_n)] + O(h^3) \end{aligned} \quad (2.12)$$

于是 y_{n+1} 可以写成式(2.13)的形式。

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y(x_n) + (\omega_1 + \omega_2) h y'(x_n) \\ &\quad + (\alpha \omega_2 f'_x(x_n, y_n) + \beta \omega_2 f(x_n, y_n) f'_y(x_n, y_n)) h^2 + O(h^3) \end{aligned} \quad (2.13)$$

式(2.13)与 Taylor 展开式相比较可以得出相应的参数 $\omega_1, \omega_2, \alpha, \beta$ 之间的关系, 如式(2.14)所示。

$$\begin{cases} \omega_1 + \omega_2 = 1 \\ \alpha \omega_2 = \frac{1}{2} \\ \beta \omega_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.14)$$

由式(2.14)可见, 该式有 4 个参数 $\omega_1, \omega_2, \alpha, \beta$, 而只有三个方程, 因此式(2.14)有一个自由参数, 其解不唯一。

(1) 第一种情况, 取 $\omega_1 = \frac{1}{2}$ 并代入式(2.14)中, 可得 $\omega_2 = \frac{1}{2}, \alpha = \beta = 1$ 。这种情况下式(2.11)可写为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1) \end{cases} \quad (2.15)$$

式(2.15)就是前述的改进 Euler 算法。

(2) 第二种情况, 取 $\omega_1 = 0$ 并代入式(2.14)中, 可得 $\omega_2 = 1, \alpha = \beta = \frac{1}{2}$ 。这种情况下式(2.11)可写为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + k_2 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \end{cases} \quad (2.16)$$

式(2.16)是二阶 Runge-Kutta 方法。

(3) 第三种情况, 取 $\omega_1 = \frac{1}{4}$ 并代入式(2.14)中, 可得 $\omega_2 = \frac{3}{4}, \alpha = \beta = \frac{2}{3}$ 。这种情况下式(2.11)可写为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_2) \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}k_1) \\ (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (2.17)$$

式(2.17)也是二阶 Runge-Kutta 方法。

与二阶 Runge-Kutta 方法相类似, 对于如式(2.18)所示的算式, 约定 $\alpha_2 = \beta_{21}, \alpha_3 = \beta_{31} + \beta_{32}, \alpha_4 = \beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43}$ 。类似前述的推导过程, 可以得到经典的四阶 Runge-Kutta 方法, 如式(2.19)所示。

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \omega_1 k_1 + \omega_2 k_2 + \omega_3 k_3 + \omega_4 k_4 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_{21} k_1) \\ k_3 = hf(x_n + \alpha_3 h, y_n + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2) \\ k_4 = hf(x_n + \alpha_4 h, y_n + \beta_{41} k_1 + \beta_{42} k_2 + \beta_{43} k_3) \\ (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3) \\ (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (2.19)$$

2.3 线性系统的离散

在进行非线性系统的离散方法阐述之前, 先讨论一下线性系统的离散过程。后续所述的非线性系统离散方法有着与线性系统离散方法相类似的地方。一个线性系统可以用如下的状态空间形式表达。

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = a_l x(t) + b_l u(t) \\ y(t) = c_l x(t) \end{cases} \quad (2.20)$$

式中, a_l, b_l, c_l 是相应的参数。在进行如式(2.20)所示的线性连续系统的离散时, 考虑使用零阶保持假设。零阶保持假设是指在一个采样周期内, 假设输入信号保持不变。对于系统(2.20)来说, 零阶保持假设是指输入信号 $u(t)$ 在一个采样周期内是不变的, 也就是说式(2.21)成立。

$$\begin{cases} u_Z(t) = u(k) = \text{常数} \\ kT \leq t < kT + T \end{cases} \quad (2.21)$$

式中, T 是系统的采样周期, 下标 Z 表示当前的输入信号的值是基于零阶保持假设的输入信号, 同时设 $u(k) := u(kT+0)$ 。

基于零阶保持假设, 及每个采样间隔中积分的式(2.20), 可以得到式(2.22)。

$$\begin{cases} x(k+1) = \bar{a}_l x(k) + \bar{b}_l u(k) = \exp(a_l T) x(k) + \left(\int_0^T \exp(a_l t) b_l dt \right) u(k) \\ y(k) = c_l x(k) \end{cases} \quad (2.22)$$

其中, $x(k)$ 和 $y(k)$ 分别是状态参数 $x(t)$ 和系统输出 $y(t)$ 在时刻 $t = t_k = kT$ 时的值, $\bar{a}_l = \exp(a_l T)$ 、 $\bar{b}_l = \int_0^T \exp(a_l t) b_l dt$ 。式(2.22)中的指数矩阵 $\exp(a_l t)$ 可以通过式(2.23)所示的单一收敛的乘方阵列来定义。

$$\exp(a_l t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_l^l t^l}{l!} \quad (2.23)$$

指数矩阵的使用使得式(2.23)有了一个相对于原始的线性连续系统的简洁而精确的离散形式的表达式。而且, 指数矩阵指出了式(2.23)是基于采样周期 T 而得到的离散形式。式(2.22)也可以用式(2.24)来表达。

$$\begin{cases} x(k+1) = \bar{a}_l x(k) + \bar{b}_l u(k) = x(k) + \sum_{l=1}^{\infty} (a_l^{l-1} (a_l x(k) + b_l u(k))) \frac{T^l}{l!} \\ y(k) = c_l x(k) \end{cases} \quad (2.24)$$

也就是说, 式(2.24)给出了线性系统(2.20)的离散模型。

2.4 非线性系统的离散

在分析了线性连续系统的离散方法后, 下一步讨论针对非线性连续系统的离散方法。通过对非线性连续系统的离散方法的分析, 可以发现, 基于 Taylor 级数的非线性离散方法是线性系统离散方法的类比和扩展。

非线性连续控制系统可以用如下的状态变量形式来表示。

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) + u(t)g(x(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (2.25)$$

式中, $x \in \mathbf{X} \subset \mathbf{R}$ 是系统的状态参数, $u \in \mathbf{R}$ 是输入信号。系统的输出 $y(t) \in \mathbf{R}$ 是状态

参数 x 的函数。

根据 Taylor 级数, 状态参数 x 可以用 Taylor 级数展开成式(2.26)所示的形式。

$$x(t) = x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) + \frac{x''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \frac{x'''(t_0)}{3!}(t - t_0)^3 + \dots \quad (2.26)$$

基于式(2.26), 可以得到在采样间隔 $[t_k, t_{k+1}) = [kT, (k+1)T)$ 中系统状态参数 x 在时刻 $t = kT + T$ 的值。

$$x(kT + T) = x(kT) + x'(kT)T + \frac{x''(kT)}{2!}T^2 + \frac{x'''(kT)}{3!}T^3 + \dots \quad (2.27)$$

为简便起见, 在不影响理解的情况下, 将式(2.27)中的采样周期 T 省略, 则式(2.27)可以简写为式(2.28)。

$$x(k+1) = x(k) + x'(k)T + \frac{x''(k)}{2!}T^2 + \frac{x'''(k)}{3!}T^3 + \dots \quad (2.28)$$

根据式(2.25)可以得到系统状态参数 x 的导数的表达式(2.29)。

$$x'(t) = f(x(t)) + u(t)g(x(t)) \quad (2.29)$$

则可以得到系统状态参数 x 在时刻 $t = kT$ 的导数表达式(2.30)。

$$x'(k) = f(x(k)) + u(k)g(x(k)) \quad (2.30)$$

同样, 根据式(2.25)可以得到系统状态参数 x 的二阶导数的表达式(2.31)。

$$\begin{aligned} x''(t) &= \frac{d(x'(t))}{dt} = \frac{d(f(x(t)) + u(t)g(x(t)))}{dt} = \frac{df(x(t)) + d(u(t)g(x(t)))}{dt} \\ &= \frac{df(x(t))}{dx} \frac{dx(t)}{dt} + u(t) \frac{dg(x(t))}{dx} \frac{dx(t)}{dt} + g(x(t)) \frac{du(t)}{dt} \\ &= \left(\frac{df(x(t))}{dx} + u(t) \frac{dg(x(t))}{dx} \right) \frac{dx(t)}{dt} + g(x(t)) \frac{du(t)}{dt} \end{aligned} \quad (2.31)$$

设输入信号 $u(t)$ 与系统状态参数 x 无关, 也就是说, 输入信号 $u(t)$ 对系统状态参数 x 的导数为零。

$$\frac{du(t)}{dx} = 0 \quad (2.32)$$

将式(2.32)代入式(2.31)中, 则式(2.31)可写成式(2.33)的形式。

$$\begin{aligned} x''(t) &= \left(\frac{df(x(t))}{dx} + u(t) \frac{dg(x(t))}{dx} \right) \frac{dx(t)}{dt} + g(x(t)) \frac{du(t)}{dt} \\ &= \left(\frac{df(x(t))}{dx} + u(t) \frac{dg(x(t))}{dx} + g(x(t)) \frac{du(t)}{dx} \right) \frac{dx(t)}{dt} + g(x(t)) \frac{du(t)}{dt} \\ &= \frac{\partial(f(x(t)) + u(t)g(x(t)))}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} + g(x(t)) \frac{du(t)}{dt} \\ &= \frac{\partial(f(x(t)) + u(t)g(x(t)))}{\partial x} (f(x(t)) + u(t)g(x(t))) \\ &\quad + g(x(t)) \frac{du(t)}{dt} \end{aligned} \quad (2.33)$$

经过整理,在采样间隔 $[t_k, t_{k+1}) = [kT, (k+1)T)$ 中可以得到系统状态参数 x 在时刻 $t = kT$ 二阶导数的表达式(2.34)。

$$x''(k) = \frac{\partial(f(x(k)) + u(k)g(x(k)))}{\partial x}(f(x(k)) + u(k)g(x(k))) + g(x(k)) \frac{du(k)}{dt} \quad (2.34)$$

在讨论线性系统离散方法时采用的是零阶保持假设,也就是说,输入信号在一个采样间隔 $[t_k, t_{k+1}) = [kT, (k+1)T)$ 内保持不变。同样,在讨论非线性系统离散方法时依然采用零阶保持假设。所以在一个采样周期中,输入信号 $u(t)$ 对时间的一阶导数为零,也就是说式(2.35)成立。

$$\frac{du(k)}{dt} = 0 \quad (2.35)$$

将式(2.35)代入到式(2.34)中,可以得到式(2.36)。

$$x''(k) = \frac{\partial(f(x(k)) + u(k)g(x(k)))}{\partial x}(f(x(k)) + u(k)g(x(k))) \quad (2.36)$$

针对上述内容做如下假设。

$$\begin{cases} A^{[1]}(x, u) = f(x) + ug(x) \\ A^{[2]}(x, u) = \frac{\partial A^{[1]}(x, u)}{\partial x}(f(x) + ug(x)) \\ \vdots \\ A^{[l+1]}(x, u) = \frac{\partial A^{[l]}(x, u)}{\partial x}(f(x) + ug(x)) \\ (l = 1, 2, 3, \dots) \end{cases} \quad (2.37)$$

基于式(2.37)的假设,式(2.36)可写成式(2.38)的形式。

$$\begin{aligned} x''(k) &= \frac{\partial(f(x(k)) + u(k)g(x(k)))}{\partial x}(f(x(k)) + u(k)g(x(k))) \\ &= A^{[2]}(x(k), u(k)) \end{aligned} \quad (2.38)$$

同理可以推导出: $x'''(k) = A^{[3]}(x(k), u(k)) \dots$ 。

将上述所得到的系统状态参数 x 在采样时刻 $t = kT$ 的导数表达式代入式(2.27)中可以得到式(2.39)。

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{T^l}{l!} \left. \frac{d^l x}{dt^l} \right|_{t_k} = x(k) + \sum_{l=1}^{\infty} A^{[l]}(x(k), u(k)) \frac{T^l}{l!} \\ y(k) = h(x(k)) \end{cases} \quad (2.39)$$

式中, $x(k)$ 是系统状态参数 x 在时刻 $t = t_k = kT$ 的值, $A^{[l]}$ 可以用式(2.40)来进行计算得到。

$$\begin{cases} A^{[1]}(x, u) = f(x) + ug(x) \\ A^{[l+1]}(x, u) = \frac{\partial A^{[l]}(x, u)}{\partial x}(f(x) + ug(x)) \\ (l = 1, 2, 3, \dots) \end{cases} \quad (2.40)$$

式(2.39)通过保留全部的 Taylor 级数的阶数,为非线性连续系统(2.25)提供了精确的离散结果,如式(2.41)所示。

$$\begin{cases} x(k+1) = \Phi_T(x(k), u(k)) = x(k) + \sum_{l=1}^{\infty} A^{[l]}(x(k), u(k)) \frac{T^l}{l!} \\ y(k) = h(x(k)) \end{cases} \quad (2.41)$$

式(2.41)所示的非线性系统精确的离散模型是无限维数的,在实际应用中通常通过保留一部分的 Taylor 级数的阶数 N 来对非线性系统(2.25)提供近似的非线性系统离散结果,如式(2.42)所示。

$$\begin{cases} x(k+1) = \Phi_T^N(x(k), u(k)) = x(k) + \sum_{l=1}^N A^{[l]}(x(k), u(k)) \frac{T^l}{l!} \\ y(k) = h(x(k)) \end{cases} \quad (2.42)$$

式中, Φ_T^N 的下标表示以上所得到的离散模型是基于采样周期 T 的,上标 N 表示所得到的非线性系统离散模型保留了有限的 Taylor 级数的阶数 N ,从而得到的是近似的非线性系统离散模型。具体 Taylor 级数的阶数 N 的选取与相应的非线性系统的特性、采样周期大小和离散结果精确程度的要求有关系。如果要求离散精度比较高的话,则应该选取较大的 Taylor 级数的阶数 N 。但是大的 Taylor 级数的阶数 N 会大幅度地增加系统解算的难度。与此相反,如果 Taylor 级数的阶数 N 选得比较小,则会影响非线性系统离散模型的精度,同时计算量会大大减小。因此,在选取 Taylor 级数的阶数 N 时要在保证需要的离散模型精度的基础上,尽量选择小的值,这样就可以在得到满意的非线性系统离散模型的基础上,尽可能地减轻系统的解算负担。

再进一步地观察精确的离散模型公式(2.41)可以发现,该非线性连续系统精确的离散模型在形式上可以与前面提到的线性连续系统精确的离散模型进行类比。

如果将式(2.37)应用到前面所提到的线性连续系统,其中, $f(x) = a_1x$ 和 $g(x) = b_1$,那么,容易得出 $A^{[l]}(x, u) = a_1^l x + a_1^{l-1} b_1 u$ 。将其代入式(2.41)中就可以得到前面对线性连续系统进行离散后的精确离散模型式(2.24)。因此,可以看出,基于 Taylor 级数的非线性连续系统离散方法得到的离散模型在形式上可以类比于前面提到的线性连续系统精确的离散模型。

定义 1 给定 $\mathbf{R}$ 域上的分析量 f 和分析量 h ,在局部坐标系中定义分析量 h 相对于分析量 f 的李导数为

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x_1} f_1 + \cdots + \frac{\partial h}{\partial x_n} f_n \quad (2.43)$$

基于定义 1 所做的关于李导数的定义,式(2.40)的递归关系可以用高阶的李导数表示,如式(2.44)所示。

$$A_i^{[l]}(x, u) = (L_f + uL_g)^l x_i \quad (2.44)$$