攀·登·科·学·的·高·峰·系·列·丛·书

PANDENGKEXUEDEGAOFENGXILIECONGSHU

SHUXUEPIAN

寻找身边的科学

XUNZHAOSHENBIANDEKEXUE

数学篇

陈 敏 编

经典数学故事

古典几何三大难题

趣味数学游戏

趣味数学推理

生活中的趣味数学

数学运算小技巧

新疆人民出版社

攀·登·科·学·的·高·峰·系·列·丛·书

寻找身边的科学·数学篇

XUNZHAOSHENBIANDEKEXUE

陈敏 编

新疆人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

寻找身边的科学·数学篇/陈敏编.—乌鲁木齐：
新疆人民出版社，2002.5
(攀登科学的高峰系列丛书)
ISBN 7-228-07137-9

Ⅰ.寻… Ⅱ.陈… Ⅲ.①科学知识—青少年读物
②数学-青少年读物 Ⅳ.Z228.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 027130 号

寻找身边的科学·数学篇

陈 敏 编

出 版	新疆人民出版社
地 址	乌鲁木齐市解放南路 348 号
邮 编	830001
发 行	新疆人民出版社
印 刷	四川省南方印务有限公司
开 本	850×1168 毫米 1/32
印 张	40
字 数	800 千字
版 次	2002 年 5 月第 1 版
印 次	2002 年 5 月第 1 次印刷
印 数	1-4 000

ISBN 7-228-07137-9/Z·245　　总定价(全套共八册)：96.00 元

前　言

现代科学的进步,最初都是从我们身边最简单的问题开始的。在我们身边,随时都可见到、听到或碰到的很多现象和疑问,其实都包含着众多的科学知识和道理。社会的进步与科技水平的提高,都是通过解决这些一个个微不足道的问题而升华和发展的。

本套书分别从天文、地理、动物、植物、人体、数学、物理、化学八个方面讲述了发生在我们身边的众多现象和谜团,内容充实,语言通俗流畅,融“科学性、知识性、通俗性、趣味性”于一体,能极大地激发青少年读者的阅读兴趣,并为读者接受和理解。

现代科学的发展越来越迅猛,人们为了认识已知世界所需要掌握的科学知识将越来越多,同时,展示在人们面前的未知世界将变得越来越广阔、越来越深邃。

编写这套科普图书,相信能使读者、特别能使青少年读者增长见识,开阔视野,启迪智慧。我们期望本套书能引导广大青少年读者走上探索未知世界之路,并在不远的将来去攀登科学的高峰。

我们的身边到处都是科学!请以科学的眼光,去寻觅去看待去探知发生在你身边的未知世界里的一切!

目　录

经典数学故事

韩信暗点兵

我国汉初军事家韩信，神机妙算，百战百胜。传说在一次战斗前为了弄清敌方兵力，韩信化装到敌营外侦察，隔着高大寨墙偷听里面敌将正在指挥练兵。只听得按 3 人一行整队时最后剩零头 1 人，按 5 人一行整队时剩零头 2 人，7 人一行整队时剩零头 3 人，11 人一行整队时剩零头 1 人。据此，韩信很快算出敌兵有 892 人。于是针对敌情调兵遣将，一举击败了敌兵。这就是流传于民间的故事《韩信暗点兵》。

"韩信暗点兵" 作为数学问题最早出现在我国的《孙子算经》中，原文是"今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何?"

用现代话来说:"今有一堆东西，不知它的数量。如果三个三个地数最后剩二个，五个五个地数最后剩三个，七个七个地数最后剩二个，问这一堆东西有多少个?"

该书给出的解法是:

$$N = 70 \times 2 + 21 \times 3 + 15 \times 2 - 2 \times 105。$$

这个解法巧妙之处在于 70，21，15 这三个数。

70 可以被 5 和 7 整除，并且是用 3 除余 1 的最小正整数，因此 2×70 被 3 除余 2;

21 可以被 3 和 7 整除，并且是用 5 除余 1 的最小正整数，因此 3×21 被 5 除余 3;

15 可以被 3 和 5 整除，并且是用 7 除余 1 的最小正整数，因此 2×15 被 7 除余 2。

这样一来，$70\times2+21\times3+15\times2$ 被 3 除余 2，被 5 除余 3，被 7 除余 2。这个数大于 100，容易算出 3，5，7 的最小公倍数是 105。从这个数中减去两倍的 105，不会影响被 3，5，7 除所得的余数。

$$N=70\times2+21\times3+15\times2-2\times105=23。$$

我国明代数学家程大位在《算法统宗》里用诗歌形式给出了以上解法，便于记忆：

"三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，

七子团圆月正半，除百零五便得知。"

"三人同行七十稀"，表示 70 是被 3 除余 1，且能被 5 和 7 整除。"五树梅花廿一枝"，与上句类似。"月正半" 就是 15。"除百零五便得知"，这里"除" 是"减" 的意思，减去 105 的整数倍就可得知结果。

仿照《孙子算经》中"物不知数" 问题的解法，来算一算"韩信暗点兵"：

$$N=385\times1+231\times2+330\times3+210\times1-1\ 155$$
$$=2\ 047-1\ 155=892。$$

"韩信暗点兵" 在中国古代数学史上有过不少有趣的别名，如"鬼谷算"、"秦王暗点兵"、"剪管术"、"隔墙算" 等。

1852 年，《孙子算经》传入欧洲，人们发现孙子的解法与欧洲著名数学家高斯的定理一致，而孙子的研究早了1 000 多年。这个定理被称为"中国剩余定理" 或"孙子剩余定理"。这个定理不仅在数学史上占有重要地位，而且还包含了近代数学中许多问题所使用的一个根本原则，在电子计算机的设计中也是不可缺少的。

数学上类似"物不知数" 的问题很多，解法各异，再看一个问题：

"有一个数，用 2 除余 1，用 3 除余 2，用 4 除余 3，用 5 除余 4，

用 6 除余 5…… 用 11 除余 10,问此数是多少?"

解答这个问题,从正面直接去算比较复杂,因为所余的数各不相同,很不容易计算。但是,若反过来考虑,把"有余"变成"不足",计算就简单多了。

实际上,用 2 除余 1,也就是用 2 除缺 1,意思是比 2 的整数倍少 1;用 3 除余 2,也就是用 3 除缺 1;用 4 除余 3,也就是用 4 除缺 1;以此类推,直到用 11 除余 10,仍然是用 11 除缺 1。总之,所求的数被从 2 到 11 的各数去除,都因为缺 1 而不能整除。如果添上 1 呢?就都是它们的整数倍了。

根据这个道理,可以先求出 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 的最小公倍数,然后再减 1 就是所求的数了。

用短除求最小公倍数得:

$$2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 2 \times 3 \times 11 = 27\ 720。$$

所求的数中最小的数是 $27\ 720 - 1 = 27\ 719$。

符合条件的数不止 27 719 这一个,满足

$n \times 27\ 720 - 1$(n 为自然数)的数都行。

神行太保追乌龟

古希腊诡辩学派哲学家芝诺构思了一场"人龟赛跑",他提出了有名的"追龟说"。芝诺说,阿基里斯(希腊神话中的神行太保)追乌龟,永远追不上。比方说,阿基里斯的速度是龟的 10 倍,龟在前面 100 米,当阿基里斯跑了 100 米到达龟的出发点时,龟已向前走了 10 米;阿基里斯再追 10 米,龟又前进了 1 米;阿基里斯再追 1 米,龟又前进了 $\frac{1}{10}$ 米,这样永远相隔一小段距离,所以总也追不上。

芝诺并不是真的认为阿氏追不上龟,问题在于他和当时很多

学者都不知道何时何地阿氏才可以追及。因为,古希腊时代的人是无法处理无限运算的,对于无限个数目相加感到困惑不解。芝诺提出追龟说是用来否认运动的真实性。

在希腊时代,追龟说违背人们的常识。希腊人明知阿基里斯一定能追上乌龟,但却无法证明追龟说错在何处,这就成为希腊数学史上有名的难题,给学术界以极大的骚动,刺激数学家们要认真研究"无限",研究运动。直到微积分时代,这问题才算初步解决。17世纪中叶,格雷戈里在他的《几何著作》(1647 年)中证明追龟怪论可以用无穷递缩几何数列的求和来解决。

事实上,假设阿氏追及龟之前,龟所爬行的米数为:

$$S = 100 + 10 + 1 + 1\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots。$$

加数的个数虽无止境,但其总和是一个有限数。读者利用无穷递缩几何数列求和公式可求得 $S = 111\frac{1}{9}$。可见,在 $111\frac{1}{9}$ 米处,阿氏就可追及乌龟。

乌龟是不是服输呢?不少人认为乌龟有"灵气"。假如乌龟果真有灵气,它也许会提出异议:"究竟什么叫无穷个数的和?" 如果这问题未搞清,这是不会服输的。在微积分时代,人们确确实实没有彻底弄清这问题。当时,无穷多项相加,被看做是多项式的推广,也就是当做多项式来处理。没有注意到由于求和推广到无穷多项,已经引进新问题。正是因为这问题,一位数学家短文中出现的式子

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1\cdots \tag{1}$$

引起了人们激烈的争论。

如果把(1) 式写成:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots,$$

它的和似乎应该为 0;可是,如果把(1) 式写成:

$$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1)\cdots,$$

它的和又似乎是 1;如果把(1) 式的和记为 S,则可得 $S = 1 - S$,

从而 $S = \frac{1}{2}$。

究竟(1)式的和为多少呢?微积分时代的数学家们几乎都卷进了这场争论之中。

比萨大学的格兰迪教授认为(1)式的和应该是$\frac{1}{2}$。其理由是在等式

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

中令 $x = 1$,于是就得到

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots。$$

格兰迪对此结果还作了有趣的解释:某人遗留给他的两个儿子一块宝石,让他们每人轮流保存一年。这等于每个儿子分得一半。

格兰迪身兼修道士,他把上式改写成

$$\frac{1}{2} = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots = 0。$$

他说,这象征着"世界是能从空无一物创造出来的"。这纯粹是出于宗教的需要。

莱布尼茨、贝努里、拉格朗日等人也认为(1)式的和为$\frac{1}{2}$。他们的理由是:

第1项	前两项和	前三项和	前四项和	…
1	0	1	0	

在这无限过程中,出现1和0的机会是相同的,可见(1)式的和应取它们的平均值。

赫赫有名的大数学家欧拉,也认为(1)式的和为$\frac{1}{2}$。

经过100多年的争论,到了19世纪,人们才把问题彻底搞清。上述种种答案都是错误的,无穷项的和与有限项的和有本质的不

同。无穷项的和,本质上是一个极限过程,已经不是代数和。(1) 式的和是不存在的,而“人龟赛跑”中的和数 S 确为有限数。

奇妙的数字三角形

17 世纪法国数学家、物理学家、文学家巴斯卡被誉为具有“火山般天才”。

巴斯卡三岁时母亲去世了,由于从小缺少应有的照顾,巴斯卡体弱多病。巴斯卡在回忆自己童年生活时说:“从十岁起,我每日在苦痛之中。”不幸和病魔并没有压倒巴斯卡,他满腔热情投身于科学事业。

巴斯卡 13 岁时,有一天他信手在纸上横着、竖着各写了 10 个 1。然后在第二行第二列的地方写上一个 2,这个 2 是它上面的 1 和左边的 1 的和,$1+1=2$;第二行第三列的地方写上一个 3,这个 3 是它上面的 1 和左边的 2 的和,$1+2=3$;他就用上面的数和左边的数相加的方法,填出一个斜放着的等腰直角三角形。

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1
\end{array}
$$

巴斯卡把这个三角形向右旋转 45°,进一步发现从第三行开始,中间的每一个数都等于它肩上两个数之和。这些数字的排法好面熟啊!像在哪儿见过。巴斯卡反复回忆,啊!想起来了,他在纸上写出一串等式:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5。$$

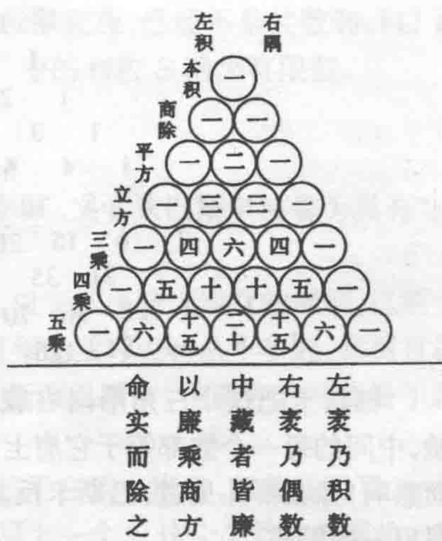
这里每一个二项式展开式的系数,不正好是这个三角形一行的数吗?不用问,这最下面的一行数必定是$(a+b)^9$ 展开式各项的系数。

有了这个三角形,写以自然数为指数的二项式展开式就方便多了。比如求$(a+b)^6$ 的展开式,只要从三角形的顶尖往下数到第七行,就得到各项的系数,a 的指数从 6 开始降幂排列;b 的指数从 1 开始升幂排列,可以写出:

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6。$$

后来人们就把这个三角形叫做“巴斯卡三角形”。这个三角形给出了二项式展开式系数的规律,对研究二项式非常有用。

其实,这个三角形并不是巴斯卡最早发现的,早在巴斯卡前五六百年,11 世纪我国北宋数学家贾宪曾给出类似的三角形。



贾宪曾在北宋朝廷里做过左班殿直(低级武官)。贾宪对数学颇有研究,著有三本数学书,《算法斆(*xiào*,学)古集》、《黄帝九章细草》和《释锁》,可惜都已失传。贾宪对数学最重要的贡献是建立了一种开高次方的新方法——“增乘开方法”。用这种方法可以开三次或三次以上的任意次方。

贾宪解方程时,反复遇到二数和的任意次方的展开问题。他发现了展开式中系数的规律,并造了一张数表,叫做“开方作法本源”,包括相当于 0 次到 6 次的二项式展开式的全部系数。

由于贾宪的著作都已失传,因此贾宪所作“开方作法本源”载于南宋数学家杨辉所作的《详解九章算法》一书中。杨辉部分数学著作被收入明初编写的巨篇《永乐大典》中。清末,英国侵略者把《永乐大典》掠夺去许多册,其中恰好包括“开方作法本源”图的那一册,此书现藏于剑桥大学图书馆,我国国内已没有了。

从制作此图时间的早晚来看,此三角形应叫“贾宪三角形”更合适。比巴斯卡早的还有中亚数学家阿尔·卡西,他于 1427 年发表类似三角形。16 世纪德国的阿披亚奴斯也曾造出此三角形。

《算盘书》和兔子问题

13 世纪,欧洲普鲁士王国的腓特烈二世,听说意大利有个解题能手叫斐波纳契,此人聪明过人。腓特烈二世邀请斐波纳契参加王宫的科学竞赛。参加科学竞赛的还有来自欧洲各国的才子和数

学家。

腓特烈二世出的第一道题是：

“求一个数 x，使 x^2+5 与 x^2-5 都是平方数。”

参加竞赛的人都在紧皱双眉冥思苦想，而斐波纳契用他独创的方法得出答案 $3\frac{5}{12}$。有人不相信他能算得这样快，做了一下验算：

$$\left(3\frac{5}{12}\right)^2+5=\frac{1\ 681}{144}+\frac{720}{144}=\frac{2\ 401}{144}=\left(\frac{49}{12}\right)^2;$$

$$\left(3\frac{5}{12}\right)^2-5=\frac{1\ 681}{144}-\frac{720}{144}=\frac{961}{144}=\left(\frac{31}{12}\right)^2。$$

完全正确！

用代数的方法，设：

$$x^2+5=t_1^2,x^2-5=t_2^2,$$

得 $t_1^2-t_2^2=10$。

即 $(t_1-t_2)(t_1+t_2)=10$。

令 $t_1-t_2=t$，则 $t_1+t_2=\frac{10}{t}$，

于是得 $t_1=\frac{1}{2}\left(t+\frac{10}{t}\right)$。

$\therefore\ x^2=\frac{1}{4}\left(t+\frac{10}{t}\right)^2-5=\frac{1}{4}\left(t^2+\frac{100}{t^2}\right)$。

令 $t=\frac{3}{2}$，就得 $x=3\frac{5}{12}$。

腓特烈二世又出了一道题：

“有一笔款，甲、乙、丙三人各占$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$。现各从中取款若干，直到取完为止。然后，三人分别放回自己所取款的$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$，再将放回的钱平均分给三人，这时各人所得恰好是他们应有的。问原有钱若干？第一次各取若干？”