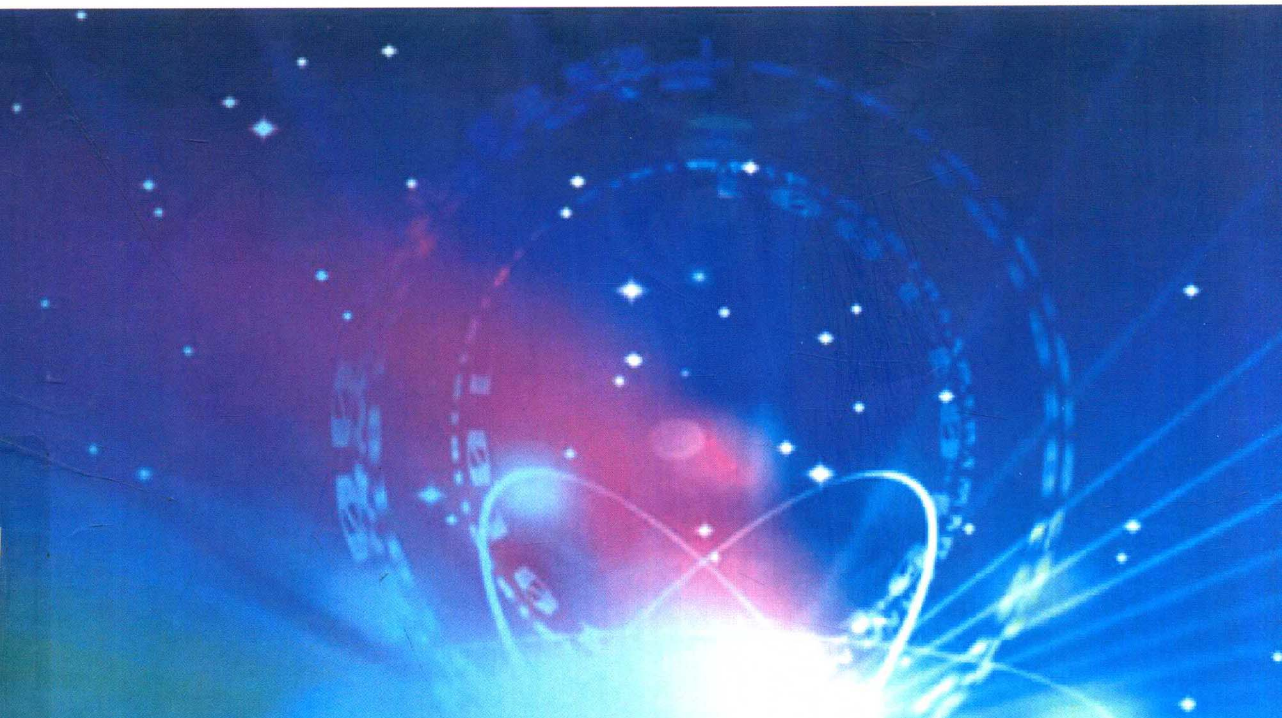
21世纪高等教育规划教材

大学物理

（下册）

张元敏 王红玲 主编



DAXUEWULI

SWJUP 西南交通大學出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

21世纪高等教育规划教材

大学物理（下册）

张元敏　王红玲　主编

西南交通大学出版社
·成　都·

内 容 提 要

本书系作者在多年“大学物理”课程教学及大学物理系列课程教学改革实践经验基础上编写而成。全书分为上、下两册共16章内容。编写中贯彻少而精的原则，紧扣教学大纲，既注重基础理论的阐述，同时也加强了近代物理学观点及知识点的介绍。

经审定，本书可作为高等院校非物理专业本、专科学生物理课程教材，同时也可作为函授大学、广播电视大学、夜大学物理课程教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理(上、下) / 张元敏，王红玲主编. 一成都：西南交通大学出版社，2006.12

21世纪高等教育规划教材

ISBN 7-81104-450-1

Ⅰ.大… Ⅱ.①张… ②王… Ⅲ.物理学一高等学校一教材 Ⅳ.04

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第110670号

21世纪高等教育规划教材

大 学 物 理(上、下册)

Daxue Wuli

张元敏 王红玲 主编

*

责任编辑 孟苏成

封面设计 水木时代

西南交通大学出版社出版发行

(成都市二环路北一段111号 邮政编码：610031 发行部电话：028-87600564)

http://press.swjtu.edu.cn

北京广达印务有限公司印刷

*

成品尺寸：185mm×260mm 总印张：32

总字数：853千字

2006年12月第1版 2006年12月第1次印刷

ISBN 7-81104-450-1

套价：**58.00**元

目　录

第 9 章　振动学基础

通常情况下，人们总习惯于把经典物理学划分为力、热、电、光等子学科，而振动与波动却是横跨物理学不同领域的一种非常普遍而重要的运动形式。振动和波动的关系十分密切，振动是产生波动的根源，波动是振动的传播。不同形式振动的传播，构成不同形式的波动。振动和波动的基本原理是声学、地震学、建筑力学、机械原理、造船学等所必需的基础知识，也是光学、电学、交流电工学、无线电技术以及原子物理学所不可缺少的基础。本章主要讨论简谐振动的特征和规律，并简要介绍阻尼振动和受迫振动。

9.1　简谐振动

物体在一定位置附近所做的来回往复的运动称为机械振动，机械振动普遍存在于现实生活之中。例如，机器开动时各部分的微小振动，钟摆的振动，管弦乐器的气柱和琴弦的振动，桥梁上行驶的车辆造成的振动，等等。在不同的振动现象中，最基本、最简单的振动是简谐振动，一切复杂的振动都可分解为若干个简谐振动，也就是说，可以把复杂的振动看成是若干个简谐振动的合成。

9.1.1　简谐振动的动力学方程

1. 弹簧振子

如图 9-1(a) 所示，一劲度系数为 k 的轻弹簧水平放置，一端固定，另一端与质量为 m 的物体相连，物体放在水平光滑桌面上。使弹簧自由伸张，物体 m 所在位置 O 即受力为零的位置叫做平衡位置。将物体拉离平衡位置至 A 点，如图 9-1(b) 所示，然后放手，物体便在弹簧弹性力的作用下围绕平衡位置 O 做往复运动，如图 9-1 所示。当物体可视为质点，而且弹簧质量和摩擦阻力可以忽略不计时，这种由物体和轻弹簧组成的振动系统称为弹簧振子。

取平衡位置 O 为坐标原点，建立如图 9-1 所示的坐标系，则 x 既表示物体 m 的位置坐标，又表示物体 m 相对于原点的位移，其绝对值就是弹簧的伸长(压缩)量。由中学所学知识可知，在弹簧弹性限度内弹簧弹性力与 x 成正比，其方向总是指向平衡位置。若用 f 表示 Ox 方向的弹性力，则此性质可用

$$f = -kx \tag{9-1}$$

来表示。因为在 Ox 方向上物体仅受弹性力作用，根据牛顿第二定律可得

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad 即 \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{9-2}$$

此式即为弹簧振子的动力学方程。

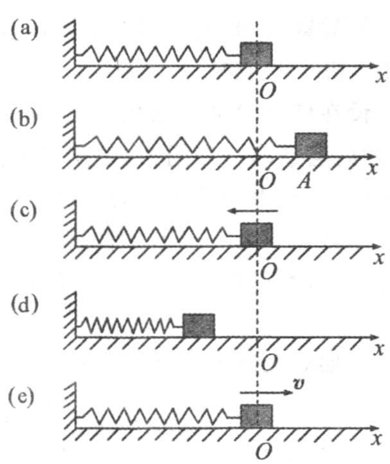


图 9-1　弹簧振子

2. 单摆

将不可伸长的轻线上端固定,下端悬挂一线度远小于线长的小球,如图 9-2 所示。轻线在竖直位置时,小球在平衡位置。将小球移至旁边,使悬线仍保持张紧状态,然后将小球释放,则小球将在一竖直平面内沿一圆弧作往复摆动,这样的振动系统叫做单摆。我们的讨论仅限于摆角 θ 极小的情况。

当摆线与竖直方向成 θ 角时,若忽略摩擦力,则小球只受到重力 $\boldsymbol{G}$ 和线的拉力 $\boldsymbol{T}$ 两个不共线力的作用,重力的切向分量为 $mg\sin\theta$,它决定小球沿圆周的切向运动。设摆线长为 l,则小球的切向加速度为 $a_t = l\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$,考虑到角位移 θ 是从竖直位置算起,并规定沿逆时针方向为正,则重力的切向分力 $mg\sin\theta$ 与 θ 反向,根据牛顿第二定律,可得

$$-mg\sin\theta = ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

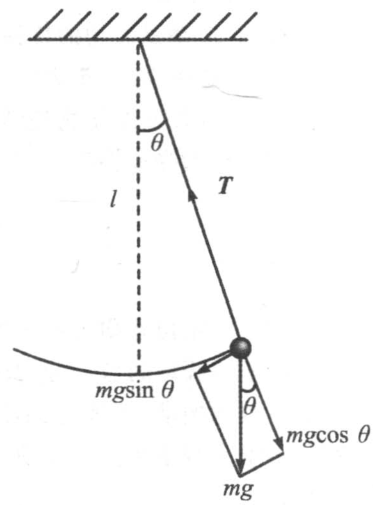


图 9-2 单摆

因为 $\sin\theta$ 展开成级数为

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

当 θ 很小时,$\sin\theta \approx \theta$,所以

$$-mg\theta = ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \quad 即 \quad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{9-3}$$

此式即为单摆的动力学方程。

3. 复摆

一个可绕水平固定轴自由摆动的刚体称为复摆,或称物理摆,如图 9-3 所示。设 C 为刚体的重心,C 到转轴的垂直距离为 h,刚体对 O 轴的转动惯量为 J。平衡时,摆的重心在轴的正下方。若将刚体拉开后释放,则复摆将在平衡位置附近做往复的运动。我们的讨论仍限于 θ 极小的情况。

设在任意时刻 t,摆角为 θ,θ 既是角坐标,又是相对于平衡位置的角位移。若忽略一切阻力,复摆自由摆动时只受重力 $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}$ 对 O 轴的力矩作用,此力矩的大小为 $mgh\sin\theta$,因 θ 极小,即 $\sin\theta \approx \theta$,所以力矩的大小可表示为 $mgh\theta$,由图不难看出,此力矩的符号总与角位移 θ 的符号相反,所以重力对 O 轴的力矩可表示为

$$M = -mgh\theta$$

根据刚体绕固定轴的转动定律可得

$$-mgh\theta = J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \quad 即 \quad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{mgh}{J}\theta$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{mgh}{J}\theta = 0 \tag{9-4}$$

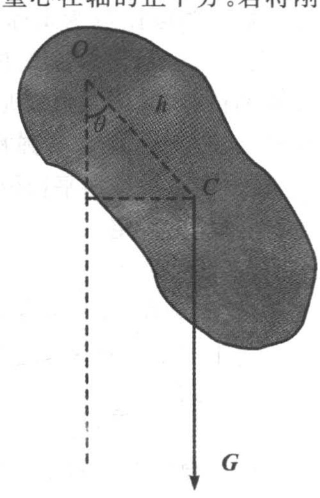


图 9-3 复摆

此式即为复摆的动力学方程。

综合上面各例可知，它们所受的力(力矩)具有一个共同的特征，就是力(力矩)的大小总是与物体相对于平衡位置的位移(角位移)的绝对值成正比，方向总是指向平衡位置。我们把满足此性质的力(力矩)叫做弹性恢复力(力矩)。并由此定义：物体在弹性恢复力(力矩)作用下的运动叫做简谐振动。做简谐振动的物体也称为简谐振子。

把弹簧振子、单摆、复摆的动力学方程作一比较，尽管方程中的变量有所不同，但它们具有相同的形式，都可用下列方程来概括

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0{}^2 x=0 \tag{9-5}$$

式中　$\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ (弹簧振子)，　$\omega_0=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$ (单摆)，　$\omega_0=\sqrt{\dfrac{mgh}{J}}$ (复摆)

ω_0 是取决于振动系统本身性质的物理量。

由此可给出简谐振动的又一种定义：如果物体的运动其动力学方程可归纳为式(9-5)的形式，即为简谐振动。

例题 9-1　弹簧下面悬挂一物体，不计弹簧质量和阻力，证明物体在平衡位置附近的摆动是简谐振动。

证明　如图 9-4(a)所示，将一劲度系数为 k 的轻弹簧竖直悬挂起来，自由端位于 A 点，这时弹簧处于自由伸张状态。现将一物体 m(视为质点)挂在弹簧下面，如图 9-4(b)所示，系统静止后，物体位于 B 点，弹簧伸长 l，因物体处于平衡状态，所以所受合力为零，此时物体受两力作用，一个是重力 $\boldsymbol{G}=mg$，方向向下，一个是弹力 $\boldsymbol{f}=kl$，方向向上，由两力平衡得

$$mg=kl \tag{①}$$

现对物体施加一外力，然后释放，使系统在平衡位置 B 附近做上下振动。设 t 时刻，物体位于 B' 点，此时弹簧的总伸长为$(l+x)$，且系统正向下运动，物体受力仍为重力和弹力，重力大小 $G=mg$，方向向下，弹力大小 $f=k(l+x)$，方向向上，根据牛顿第二定律得

$$mg-k(l+x)=m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \tag{②}$$

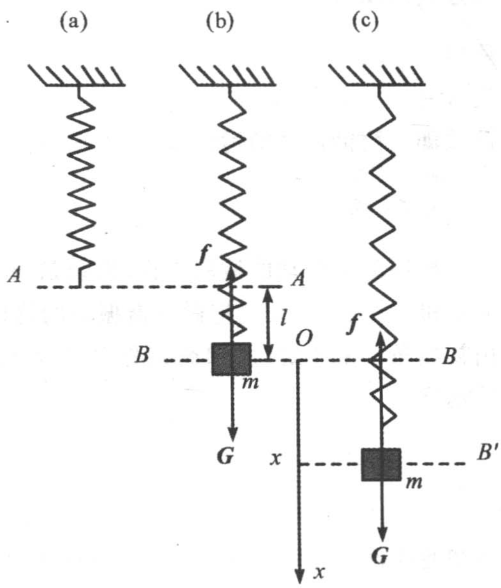


图 9-4　例题 1 图

将式①代入式②有

$$-kx=m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\quad 即\quad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m}x=0 \tag{③}$$

令

$$\omega_0{}^2=\frac{k}{m}$$

则式③变为

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0{}^2 x=0$$

即物体的动力学方程可归纳为式(9-5)的形式，故该物体在平衡位置附近的振动是简谐振动。

9.1.2 简谐振动的运动方程

由运动学的知识可知,要想清楚地了解一个物体的运动,必须了解它的坐标与时间的函数关系式及运动方程,欲求简谐振动的运动方程,则需求解简谐振动的动力学方程。由

$$\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0{}^2 x = 0$$

同乘以 $2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,得 $$2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -2\omega_0{}^2 x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad 即 \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = -\omega_0{}^2\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}$$

等式两边同时积分 $$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = -\omega_0{}^2 x^2 + C$$

已知物体在最大位移处,即 $x = A$ 时,其速度 $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$,代入上式得 $C = \omega_0{}^2 A^2$,故

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = -\omega_0{}^2 x^2 + \omega_0{}^2 A^2 \quad 即 \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega_0\sqrt{A^2 - x^2}$$

整理上式得 $$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega_0\mathrm{d}t$$

两边同时积分 $$\arcsin\frac{x}{A} = \omega_0 t + \Psi$$

所以 $$x = A\sin(\omega_0 t + \Psi)$$

设 $\Psi + \varphi = 90°$,所以 $$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{9-6}$$

此式即为简谐振动的运动方程。下面我们将对式(9-6) 中各物理量进行专门的讨论。

1. 振幅

按照简谐振动的运动方程,因余弦(和正弦) 函数的绝对值不能大于1,所以物体的振动范围在 $+A$ 和 $-A$ 之间,我们把做简谐振动的物体离开平衡位置的最大位移的绝对值 A 叫做振幅。振幅可由初始条件来决定,已知简谐振动的运动方程,若将位移对时间求一阶导数即可求出简谐振动的速度

$$\left.\begin{aligned} x &= A\cos(\omega_0 t + \varphi) \\ \boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}\right\} \tag{9-7}$$

将初始条件 $t = 0$ 时,$x = x_0$,$v = \boldsymbol{v}_0$ 代入式(9-7),得

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= A\cos\varphi \\ v_0 &= -\omega_0 A\sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{9-8}$$

由式(9-8) 即可求出振幅 $$A = \sqrt{x_0{}^2 + \frac{v_0{}^2}{\omega_0{}^2}} \tag{9-9}$$

2. 周期和频率

振动最显著的特征就是其运动具有周期性,我们把完成一次完整振动所经历的时间称为周期,用 T 表示。因此,每隔一个周期,振动状态就完全重复一次,即

$$x = A\cos[\omega_0(t + T) + \varphi] = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

因为余弦函数的周期为 2π,所以满足上述方程的 T 的最小值应为 $\omega_0 T = 2\pi$,即

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{9-10}$$

单位时间内物体所做完全振动的次数叫做频率，用 ν 或 f 来表示，它的单位是赫兹，用 Hz 来表示。显然频率与周期的关系为

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{9-11}$$

由式(9-10) 和式(9-11) 可得

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \tag{9-12}$$

由此可见，量 ω_0 等于频率 ν 的 2π 倍，所以 ω_0 表示物体在 2π s 时间内所做的完整振动的次数，称为振动的角频率，也称为圆频率，它的单位是 rad/s。

前面已经介绍过，ω_0 是由振动系统本身的性质来决定的，所以周期 T 和频率 ν 也完全由振动系统本身的性质所决定。我们通常把简谐振动的周期、频率和圆频率叫做固有周期、固有频率和固有圆频率。

根据周期、频率和圆频率的关系，简谐振动的运动方程式(9-6) 可改写为

$$x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \tag{9-13a}$$

和

$$x = A\cos(2\pi t + \varphi) \tag{9-13b}$$

3. 位相和初位相

尽管我们知道了振幅和频率，但是还不能完全确定振动物体任意时刻的运动状态，即任意时刻的位移和速度。振动物体在任一时刻 t 的运动状态由 $(\omega_0 t + \varphi)$ 来决定。$(\omega_0 t + \varphi)$ 是决定简谐振动任意时刻运动状态的物理量，称为振动的位相。$(\omega_0 t + \varphi)$ 是一个角度，以弧度或度为单位，显然，φ 是 $t = 0$ 时的位相，称之为初位相，简称初相，可由已知条件求出，由式(9-8) 可得

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega_0 x_0}\right) \tag{9-14}$$

这样求出的 φ 在 $0 \sim 2\pi$ 之间有两个值，尚需根据式(9-8) 进行进一步的判断，才能最后决定 φ 值。

物体的振动，在一个周期内，每一时刻的运动状态都不相同，这相当于位相经历着 $0 \sim 2\pi$ 的变化。例如，在式(9-6) 表示的简谐振动中，若某时刻 $(\omega_0 t + \varphi) = 0$，即位相为零，则该时刻 $x = A$，$\boldsymbol{v} = 0$，表示物体在最大位移处速度为零；当 $(\omega_0 t + \varphi) = \frac{\pi}{2}$ 时，位相为 $\frac{\pi}{2}$，则 $x = 0$，$\boldsymbol{v} = -\omega_0 A$，表示物体在平衡位置而以最大速度沿 x 轴负向运动；当 $(\omega_0 t + \varphi) = \pi$ 时，位相为 π，则 $x = -A$，$\boldsymbol{v} = 0$，表示物体在位移负向最大处速度为零；当 $(\omega_0 t + \varphi) = \frac{3\pi}{2}$ 时，位相为 $\frac{3\pi}{2}$，则 $x = 0$，$\boldsymbol{v} = \omega_0 A$，表示物体在平衡位置而以最大速度沿 x 轴正向运动。由此可见，不同的位相表示着不同的运动状态。凡是位移和速度都相同的运动状态，它们所对应的位相差为 2π 或 2π 的整数倍。位相反映了物体运动的周期性，是描述运动状态的重要物理量。

位相的重要性还在于比较两个简谐振动的"步调"。在比较两个简谐振动的"步调"时，要用到位相差的概念，两简谐振动的位相之差称为位相差。

设有两个简谐振动，它们的运动方程为

$$x_1 = A_1\cos(\omega_{01} t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2\cos(\omega_{02} t + \varphi_2)$$

它们的位相差为

$$\Delta\varphi = (\omega_{02} t + \varphi_2) - (\omega_{01} t + \varphi_1)$$

若两个简谐振动的频率相同，则其位相差为

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

即此时位相差等于初相差，它是不随时间变化的稳定的恒量。

(1) 当 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2k\pi (k = 0,1,2,\cdots)$ 即两简谐振动的位相相同。此时两振动的位移同时达最大，同时为零，同时为负最大，即两振动步调相同。其振动曲线如图 9-5(a) 所示。

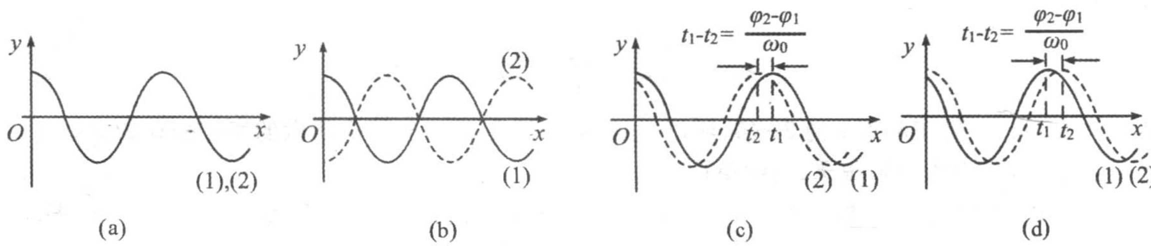


图 9-5 谐振动的位相差

(2) 当 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pm (2k+1)\pi (k = 0,1,2,\cdots)$ 此时当某振动位移最大，则另一振动位移达负最大，即两振动步调相反，这时，我们称这两个简谐振动反位相。其振动曲线如图 9-5(b) 所示。

(3) 当 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$，此时两个振动既不同位相也不反位相，根据位相差的不同，在振动曲线上表现为曲线不同程度地错开一些，如图 9-5 中(c) 和(d) 所示。此时，常用某振动比另一振动"超前"或"落后"来描述两振动的步调关系。所谓"超前" 或"落后" 是指两振动达同一状态的时刻谁在前面，谁在后面。图 9-5(c) 中振动(2) 超前振动(1) 或振动(1) 落后振动(2)，图 9-5(d) 中，振动(1) 超前振动(2) 或振动(2) 落后振动(1)。

4. 简谐振动的速度和加速度

由简谐振动的运动方程

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

再根据速度和加速度的定义，我们就可以得到物体做简谐振动时的速度和加速度：

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi) = v_{\mathrm{m}}\sin(\omega_0 t + \varphi) \tag{9-15}$$

$$a = -\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_0{}^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi) = -a_{\mathrm{m}}\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{9-16}$$

式中：$\boldsymbol{v}_{\mathrm{m}} = \omega_0 A$ 和 $a_{\mathrm{m}} = \omega_0{}^2 A$ 称为速度幅值和加速度幅值。由此可见，物体做简谐振动时，其速度和加速度也随时间做周期性的变化。而简谐振动的速度比位移超前$\frac{\pi}{2}$，加速度比速度超前$\frac{\pi}{2}$，加速度与位移则为反位相。它们的位相关系可用曲线表示，如图 9-6 所示(设 $\varphi = 0$)。

例题 9-2 一物体沿 x 轴做简谐振动，振幅为 0.12 m，周期为 2 s，当 $t = 0$ 时位移为 0.06 m，且向 x 轴正方向运动。求：(1) 此简谐振动的运动方程；(2) $t = 0.5$ s 时，物体的位置、速度和加速度；(3) 物体从 $x = -0.06$ m 处向 x 轴负向运动，第一次回到平衡位置所需的时间。

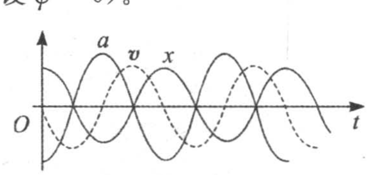


图 9-6 简谐振动的位移、速度、加速度曲线

解 (1) 设此简谐振动的运动方程为

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

已知：$A = 0.12\ \mathrm{m}, T = 2\ \mathrm{s}, \omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = \pi(\mathrm{rad/s})$，如能确定 φ，振动方程就可完全确定。

由初始条件：$t = 0$ 时，$x_0 = 0.06\ \mathrm{m}$ 可得

$$0.06 = 0.12\cos\varphi \quad 即 \quad \varphi = \pm\frac{\pi}{3}$$

因为 $t = 0$ 时，物体向 x 轴正方向运动，即 $v_0 > 0$，所以

$$\varphi = -\frac{\pi}{3}$$

故振动方程为

$$x = 0.12\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \quad (\mathrm{m})$$

(2) 由振动方程可得

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -0.12\pi\sin\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \quad (\mathrm{m/s})$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -0.12\pi^2\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \quad (\mathrm{m/s^2})$$

当 $t = 0.5\ \mathrm{s}$ 时

$$x = 0.12\cos\left(\pi \times 0.5 - \frac{\pi}{3}\right) = 0.06\sqrt{3} = 0.104\ (\mathrm{m})$$

$$v = -0.12\pi\sin\left(\pi \times 0.5 - \frac{\pi}{3}\right) = -6\pi = -0.18\ (\mathrm{m/s})$$

$$a = -0.12\pi^2\cos\left(\pi \times 0.5 - \frac{\pi}{3}\right) = -6\sqrt{3}\pi^2 = -1.03\ (\mathrm{m/s^2})$$

(3) 设 $x = -0.06\ \mathrm{m}$ 且向 x 轴负向运动所对应的时刻为 t_1，则

$$-0.06 = 0.12\cos\left(\pi t_1 - \frac{\pi}{3}\right) \quad 即 \quad \pi t_1 - \frac{\pi}{3} = \pm\frac{2}{3}\pi$$

因物体沿 x 轴负向运动，$v < 0$，故取 $\dfrac{2}{3}\pi$，所以 $t_1 = 1\ \mathrm{s}$。

设物体第一次回到平衡位置时刻为 t_2，由于物体向 x 轴正方向运动，所以此时物体在平衡位置的位相为 $\dfrac{3}{2}\pi$，则

$$\pi t_2 - \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}\pi$$

求得

$$t_2 = \frac{11}{6}\ \mathrm{s} = 1.83\ (\mathrm{s})$$

所以，从 $x = -0.06\ \mathrm{m}$ 处第一次回到平衡位置所需时间为

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 1.83 - 1 = 0.83\ (\mathrm{s})$$

9.1.3　简谐振动的旋转矢量表示法

为了更为方便地领会简谐振动的三个物理量 A、ω_0 和 φ 的意义，我们介绍简谐振动的旋转矢量表示法，此法还为以后讨论振动的合成问题提供了简捷的方法。

如图 9-7 所示，取一坐标轴 Ox，由原点 O 作一矢量 $\boldsymbol{A}$，矢量的长度等于振幅 A，这个矢量称为振幅矢量。设 $t = 0$ 时，振幅矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 x 轴之间的夹角为 φ，等于简谐振动的初位相。令矢量 $\boldsymbol{A}$ 以大小等于圆频率 ω_0 的角速度沿逆时针方向匀速转动（故矢量 $\boldsymbol{A}$ 又称为旋转矢量），则在任意时刻 t，矢量

A 与 Ox 轴的夹角为 $\omega_0 t+\varphi$,恰好等于简谐振动在该时刻的位相。若用 x 表示矢量 **A** 在 Ox 轴上的投影,则有

$$x = A\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

这正是简谐振动的运动方程。由此可见,做匀速转动的矢量 **A** 在 Ox 轴上的投影恰好表示给定的简谐振动。矢量 **A** 转一周所需的时间就是简谐振动的周期。图 9-8 同时给出了旋转矢量图示法与 x-t 图的对应关系。

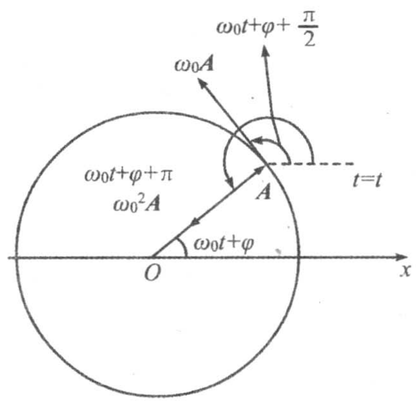


图 9-7　旋转矢量表示法

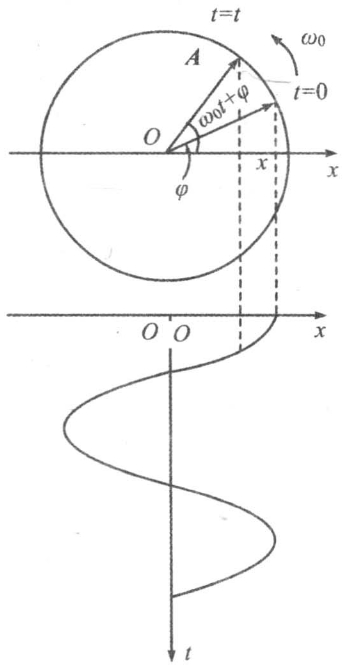


图 9-8　旋转矢量表示法与 x-t 曲线的关系

同时,旋转矢量 **A** 矢端的速度和加速度在坐标轴上的投影,可表示为简谐振动的速度和加速度。矢端沿圆周运动的速率等于 $\omega_0 A$,由图可知,t 时刻矢端速度与 Ox 轴的夹角为 $\left(\omega_0 t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$,故其在 Ox 轴上的投影为

$$\omega_0 A\cos\left(\omega_0 t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=-\omega_0 A\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

恰是此简谐振动的速度。矢端沿圆周运动的加速度即向心加速度为 $\omega_0^2 A$,它与 Ox 轴的夹角为 $(\omega_0 t+\varphi+\pi)$,故其在 Ox 轴上的投影为

$$\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t+\varphi+\pi)=-\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

恰好是简谐振动的加速度,如图 9-8 所示。

利用旋转矢量图,可以很容易地表示出两个简谐振动的位相差。我们把图 9-6 所示的位移、速度和加速度的位相关系用旋转矢量表示出来,如图 9-9 所示。不难看出,它们的位相差就是两个旋转矢量之间的夹角。

值得注意的是,旋转矢量表示法只是为了直观地描述简谐振动而引用的一种工具,不能认为每谈到简谐振动就伴随着旋转矢量,更不能误认为旋转矢量 **A** 的矢端的运动就是简谐振动。

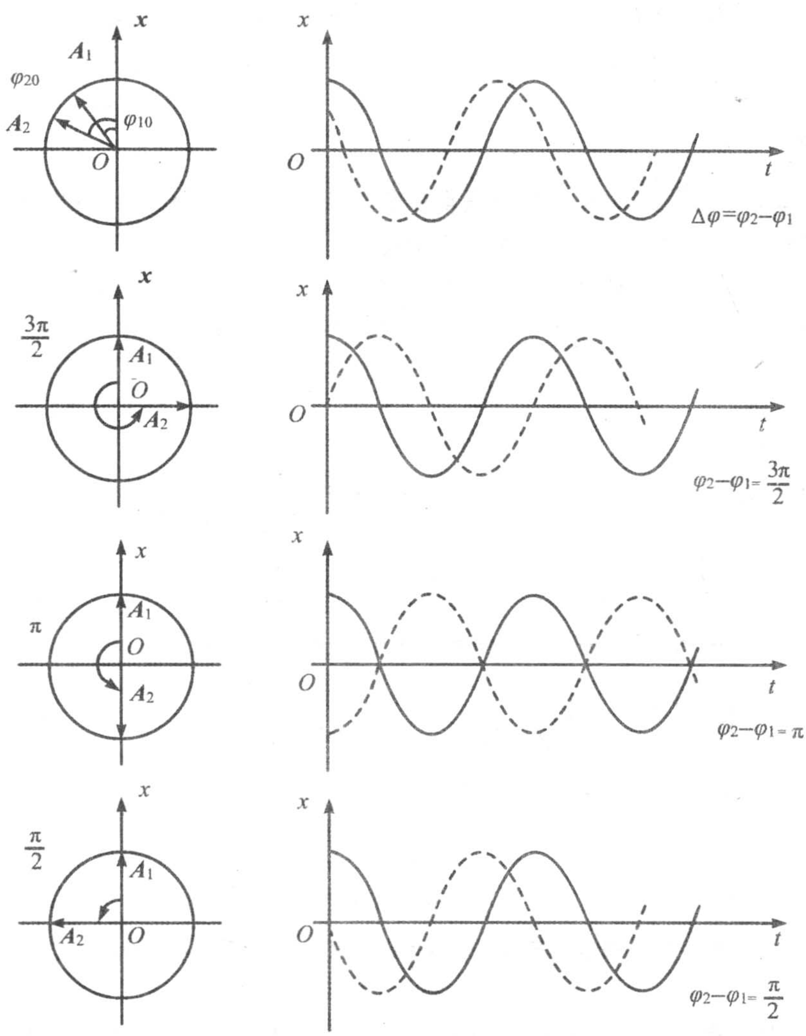


图 9-9　用旋转矢量表示两个简谐振动的相位差

9.1.4　简谐振动的能量

我们以水平放置的弹簧振子为例来讨论做简谐振动的系统的能量。此系统既具有动能也具有势能。振动物体的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

将速度公式(9-15)代入得

$$E_k = \frac{1}{2}m\,\omega_0{}^2A^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) \tag{9-17}$$

如果取物体在平衡位置的势能为零，则得此势能为

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

将位移公式(9-6)代入得

$$E_p = \frac{1}{2}kA^2\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{9-18}$$

式(9-17)和式(9-18)说明，物体做简谐振动时，其动能和势能都随时间 t 做周期性变化，位移最大时，势能达最大值，动能为零；物体通过平衡位置时，势能为零，动能达最大值，由于在运动过程中，

弹簧振子不受外力和非保守内力的作用，所以其总能量守恒，即

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\omega_0^{\ 2}A^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi)$$

因为 $\omega_0^{\ 2} = \dfrac{k}{m}$，所以

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \tag{9-19}$$

此式说明：简谐振动系统在振动过程中尽管其动能和势能分别随时间做周期性的变化，但其总能量却保持不变。此结论对任意简谐振动系统都是正确的。

图 9-10 表示了弹簧振子的动能和势能随时间的变化(设 $\varphi = 0$)。为了便于将此变化与位移随时间的变化相比较，在下面画了 x-t 曲线，由图可以看出，动能和势能的变化频率是弹簧振子频率的两倍，总能量并不改变。

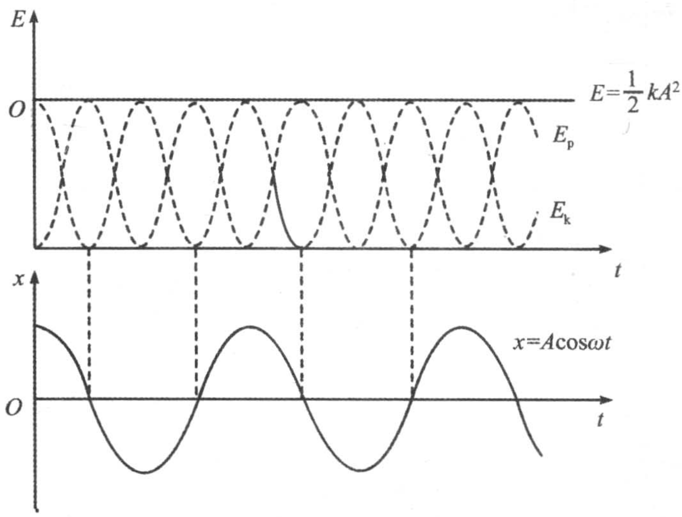


图 9-10　简谐振子的动能、势能和总能量随时间的变化曲线

例题 9-3　一弹簧振子做简谐振动，当它的振幅变为原来的两倍，而频率变为原来的一半时，它的能量将如何变化？

解　设原来的振幅为 A_1，圆频率为 ω_{01}，劲度系数为 k_1，则变化后的振幅为 $A_2 = 2A_1$，圆频率 $\omega_{02} = \dfrac{1}{2}\omega_{01}$，劲度系数为 k_2，因为 $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$，所以引起 ω_0 变化的原因是 k 与 m 的变化。

若系统的质量 m 不变，只是因为 k 变化而引起频率的改变，那么，原来的能量为

$$E_1 = \frac{1}{2}k_1A_1^{\ 2} = \frac{1}{2}mA_1^{\ 2}\omega_{01}^{\ 2}$$

变化后的能量为

$$E_2 = \frac{1}{2}k_2A_2^{\ 2} = \frac{1}{2}m\omega_{02}^{\ 2}A_2^{\ 2} = \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}\omega_{01}\right)^2(2A_1)^2 = \frac{1}{2}mA_1^{\ 2}\omega_{01}^{\ 2}$$

可见，在这种情况下，振动系统的能量没有变化。

若系统的 k 不变，只是因为 m 的改变而引起频率的改变，则

$$E_1 = \frac{1}{2}k_1A_1^{\ 2}$$

$$E_2 = \frac{1}{2}k_2A_2^{\ 2} = \frac{1}{2}k_1(2A_1)^2 = 4\left(\frac{1}{2}k_1A_1^{\ 2}\right) = 4E_1$$

可见，在这种情况下，振动系统的能量为原来的 4 倍。

9.2　简谐振动的合成

在实际问题中，常会遇到一个质点同时参与几个振动的情况。例如，当两个声波同时传到空间某一点时，该点空气质点同时参与两个振动，根据运动叠加原理，这时质点所做的运动实际上就是这两个振动的合成。一般的振动合成问题比较复杂，下面我们只讨论几种特殊情况下简谐振动的合成。

9.2.1　同方向同频率的两个简谐振动的合成

设一质点在一直线上同时进行两个独立的同频率的简谐振动，现取此直线为 x 轴，以质点的平衡位置为原点，则任意时刻这两个振动的运动方程为

$$x_1 = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1),\quad x_2 = A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

式中：A_1，A_2 和 φ_1，φ_2 分别表示两个振动的振幅和初位相，ω_0 表示它们共同的圆频率。因为 x_1 和 x_2 都在同一直线上进行，质点的合位移等于两分位移的代数和，即

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_2) \\ &= (A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)\cos\omega_0 t - (A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)\sin\omega_0 t \end{aligned}$$

令　$$A\cos\varphi = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2,\quad A\sin\varphi = A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2$$

则上式变为　$$x = A\cos\varphi\cos\omega_0 t - A\sin\varphi\sin\omega_0 t = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{9-20}$$

由此可见，同方向同频率的两个简谐振动合成后仍为一简谐振动，其频率和振动方向与原来的两个分振动相同。合振动的振幅 A 和初位相 φ 由下式决定

$$A = \sqrt{A_1{}^2 + A_2{}^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \tag{9-21}$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \tag{9-22}$$

利用旋转矢量表示法，可以很方便地得到上述结果。如图 9-11 所示，用 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 代表两简谐振

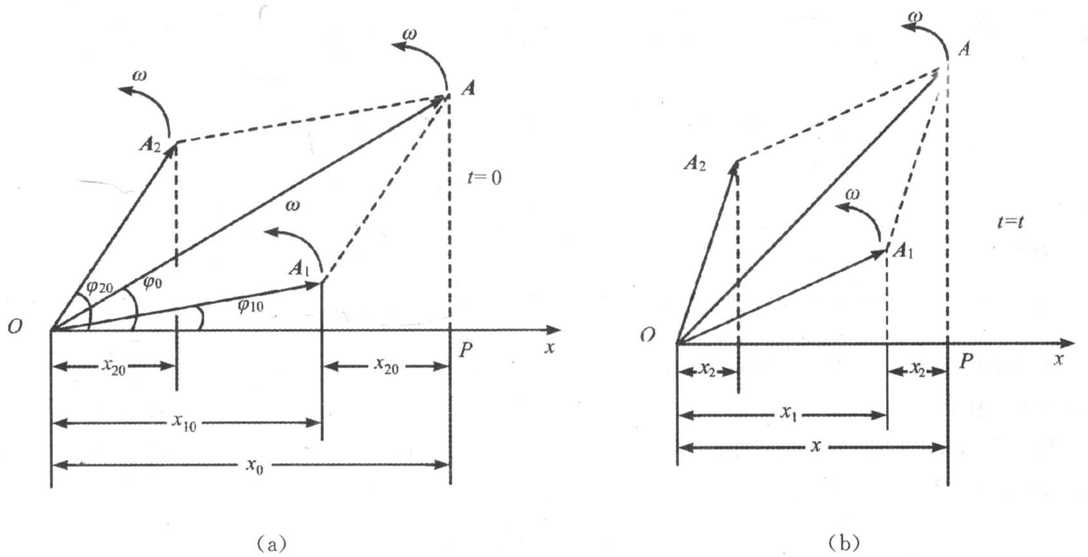


图 9-11　两个同方向同频率振动合成的矢量图

动的振幅矢量，由于 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 以相同的角速度 ω_0 做逆时针转动，它们之间的夹角 $(\varphi_2-\varphi_1)$ 保持恒定，于是合矢量 $\boldsymbol{A}$ 的大小也保持恒定不变，并以角速度 ω_0 旋转，合矢量 $\boldsymbol{A}$ 就是相应的合振动的振幅矢量，其矢端在 Ox 轴上的投影 x 就是合振动的位移

$$x = A\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

可见，合振动是振幅为 A，初位相为 φ 且圆频率为 ω_0 的简谐振动。由图 9-11 可以得到 A 和 φ 满足关系式(9-21) 和(9-22)。

下面进一步讨论合振动的振幅与原来的两个分振动的位相差 $(\varphi_2-\varphi_1)$ 的关系。

(1) 两振动同位相，即位相差 $\varphi_2-\varphi_1=\pm 2k\pi(k=0,1,2,\cdots)$，这时

$$\cos(\varphi_2-\varphi_1)=1$$

于是合振动的振幅为　$A=\sqrt{A_1{}^2+A_2{}^2+2A_1A_2}=A_1+A_2$

即合振动的振幅等于原来两个振动的振幅之和，这是合振动振幅可能达到的最大值，如图 9-12(a) 所示。

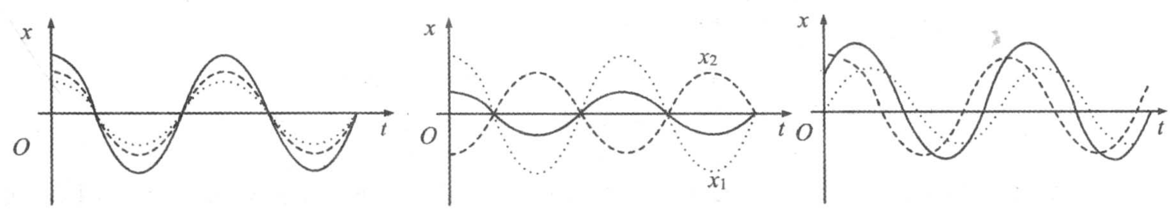
(2) 两振动反位相，即 $\varphi_2-\varphi_1=\pm(2k+1)\pi(k=0,1,2,\cdots)$，这时

$$\cos(\varphi_2-\varphi_1)=-1$$

于是合振动的振幅为　$A=\sqrt{A_1{}^2+A_2{}^2+2A_1A_2}=|A_1-A_2|$

即合振动的振幅等于原来两个振动的振幅之差，这是合振动振幅可能达到的最小值，如图 9-12(b) 所示。如果 $A_1=A_2$，则 $A=0$，即振动合成的结果使质点处于静止状态。

(3) 一般情况下，两个分振动既不同位相也不反位相，合振动振幅在 (A_1+A_2) 与 $|A_1-A_2|$ 之间，如图 9-12(c) 所示。



(a)　$\varphi_2-\varphi_1=2k\pi$　$A=A_1+A_2$　　(b)　$\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi$　$A=A_1-A_2$　　(c)　任意位相差

图 9-12　初相位差不同的两个简谐振动的合成

例题 9-4　有两个同方向同频率的简谐振动，其合振动的振幅为 $A=0.2$ m，其位相与第一振动的位相差为 $\varphi-\varphi_1=\frac{\pi}{6}$，已知第一振动的振幅 $A_1=0.173$ m，求第二振动的振幅 A_2 和第一、第二振动之间的位相差 $\varphi_2-\varphi_1$。

解　设第一个振动的初位相 $\varphi_1=0$，由题意可得矢量图如图 9-13 所示。根据余弦定理得

$$A_2=\sqrt{A_1{}^2+A^2+2A_1A\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)}$$

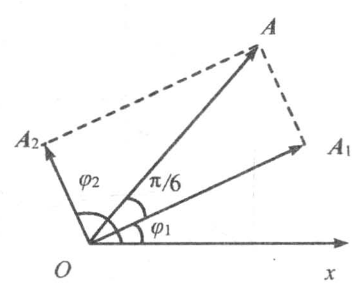


图 9-13