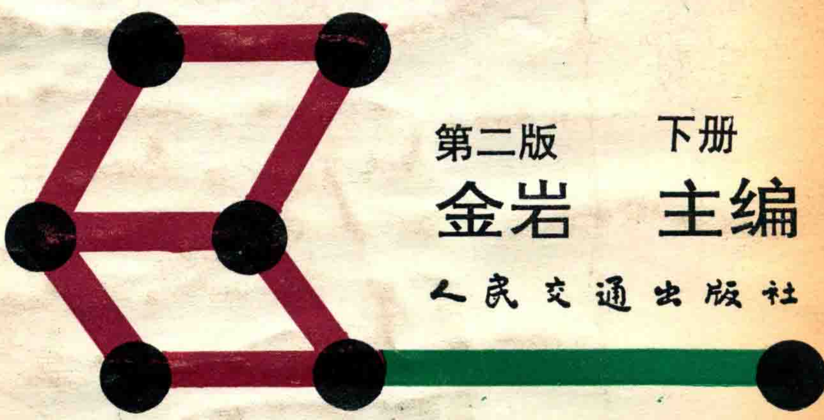
交通系统中等专业学校教材

管理数学



第二版　下册

金岩　主编

人民交通出版社

交通系统中等专业学校教材

Guanli Shuxue

管 理 数 学

第 二 版

下 册

金 岩 主编

人民交通出版社

（京）新登字 091 号

内 容 提 要

全书分上、下两册。上册包括第一篇和第二篇共十章，介绍概率论及数理统计的基本知识。下册包括第三篇和第四篇共九章，第三篇介绍线性代数；第四篇介绍运输管理最优化的数学理论与方法——线性规划的几种解法及图论的基本概念、排队论、对策论。每节后均有习题，每章后均有总习题。

本书可供中等专业学校作为管理数学教材，也可供专科学校及各种成人高等教育专修科选用。

交通系统中等专业学校教材
管 理 数 学
第 二 版
下 册
金 岩 主编
插图设计：佐文利 正文设计：乔文平 责任校对：尹 静
人民交通出版社出版
（100013 北京和平里东街10号）
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经销
北京顺义飞龙印刷厂印刷
开本：787×1092 1/16 印张：17.875 字数：453 千
1986 年 12 月 第 1 版 1994 年 6 月 第 2 版
1994 年 6 月 第 2 版 第 3 次印刷
印数：7801—13100 册 定价：8.30 元

ISBN 7-114-01756-1
O·00004

编 者 的 话

《应用数学》教材自1986年出版以来，已使用了七个教学年次，现根据各校教学使用中反馈的信息，按部订教学大纲进行修订，书名改为《管理数学》。这次修改侧重招收初中毕业生四年学制使用，因此特别注意了语言的简练及陈述的深入浅出，通俗易懂；适当增加了高中数学的必要基础知识，如排列、组合、二项式定理；降低了理论性的难度，如将多元随机变量及对偶单纯形法等均作为选学内容，以提高实用性；并把习题按章节给出，便于教师及学生使用。

作为管理类专业的技术基础课，本着基础课为培养专业技术人才服务的精神，从交通运输管理人员所应具备的数学基础知识的实际需要出发，本书主要介绍概率论与数理统计和运输管理最优化的数学理论与方法的基本知识。全书分上、下两册。上册包括第一篇和第二篇共十章，介绍概率论与数理统计的基本概念和基本运算；同时，通过一定数量的例题和习题说明概率论与数理统计在运输管理中的应用。下册包括第三篇和第四篇共九章，其中第三篇是线性代数；第四篇线性规划部分着重介绍当前运筹学在运输管理中使用最成功的方法——线性规划的几种不同解法及图论的基本概念和应用。排队论和对策论属于选学部分(用“*”号标出)，分别介绍有关排队论和对策论的基本知识。

本书可供招收初中毕业生四年制及招收高中毕业生二年制的中等专业学校的管理类专业使用；也可供目前从事公路交通管理工作而数学基础知识较好的同志自学之用；如果把“*”号的章节内容与其它章节内容适当调整，尚可做高等专科学校管理类专业的试用教材。以“搞调度、管理工作”为培养目标的专业，对上册中带“*”号的章节可做为选修内容；而以“搞计统、财会工作”为培养目标的专业，对下册中带“*”号的章节可做为选修内容。全书总授课时数为156学时，其中上册授课时数为88学时(“*”号内容需另加14学时)，下册授课时数为62学时(“*”号内容需另加54学时)。

本书由交通部呼和浩特交通学校金岩同志主编。参加编写工作的还有江西省交通学校刘勇同志及交通部呼和浩特交通学校邹豪思和乌云等同志。

安徽省交通学校周春泉同志、广州市交通中等专业学校赖木荣同志分别任本书上、下册的主审。主审的二位同志认真负责，对原稿提出了许多宝贵意见。对此，编者表示深切的谢意。

由于编者水平有限，本书虽经修订再版，但书中错误与不妥之处一定尚存，诚望读者批评指正。

编者

1993年3月

目　　录

第三篇　线性代数

第四篇　运输管理最优化的数学理论与方法

线性规划

*排 队 论

*对 策 论

第三篇 线性代数

第一章 线性代数

线性代数是重要的数学分支，它主要研究线性函数。在研究运输管理最优化的问题中，线性代数更有其独特的重要位置，是重要的数学基础知识。而矩阵又是线性代数的一个重要概念，它是研究线性函数关系的一个有力的工具。因此，在这一篇里主要介绍线性方程组和矩阵的一些基本知识。

§1.1 行 列 式

行列式是从研究线性方程组的解法中产生的，是数学中的一个重要工具。这一节中，将从二、三阶行列式的定义出发，引进一般 n 阶行列式的概念，介绍行列式的性质及其计算方法，最后讲述利用行列式解线性方程组的克莱姆法则。

一、行列式的概念

设 a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22} 是四个数，如果用式子 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 来表示代数式 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

则式子 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 叫做**二阶行列式**。它含有两行和两列，横排叫行，竖排叫列。a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22} 这四个数叫做这个行列式的元素。 代数式 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$ 叫做这个行列式的展开式，代数式 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$ 的值叫做这个行列式的值。

三阶行列式用二阶行列式定义，即

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

等号右端的式子叫做等号左端这个三阶行列式的降阶展开式。分析一下就可看出，右端几个二阶行列式同左端的三阶行列式有密切联系。例如，第一项中二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 是去掉三阶行列式中 a_{11} 所在的同行和同列各元素所得的。另外两项中的也类似。即

$$\begin{array}{ccc} \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix} \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \end{array}$$

各项的正、负号也有规律可循，即由该项二阶行列式前面的元素在三阶行列式中的位置来确定：看它在三阶行列式中所属的行数和列数之和是偶数还是奇数，若是偶数，则取正号，若是奇数，则取负号。这种规律通常表示为 $(-1)^{i+j}$（i 表示所属行，j 表示所属列）。如此说来，三阶行列式可表示为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

现在将依照这种由低阶行列式形成高一阶行列式的方法来定义四阶及四阶以上的行列式。例如，四阶行列式可定义为：

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{3+1}a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{4+1}a_{41}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &\quad - a_{41}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

一般地，如果规定一阶行列式是 $|a_{11}| = a_{11}$，则假如 $(n-1)$ 阶行列式已经定义，那么 n 阶行列式就可以用 $(n-1)$ 阶行列式来定义（这里 $n \geqslant 2$）。

定义 n 阶行列式为：

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{2+1}a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots \\ &\quad + (-1)^{n+1}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-12} & a_{n-13} & \cdots & a_{n-1n} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1} \qquad (1\text{-}1) \end{aligned}$$

上式左边的 n 阶行列式由 n^2 个数 $a_{ij}(i,\ j=1,2,\cdots,n)$ 构成,数 a_{ij} 为行列式第 i 行第 j 列的元素。其中 A_{i1} 为元素 a_{i1} 的**代数余子式**,即:

$$A_{i1}=(-1)^{i+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-12} & a_{i-13} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+12} & a_{i+13} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i+1}M_{i1}(i=1,2,\cdots,n)$$

M_{i1} 为 a_{i1} 的**余子式**。

一般 a_{ij} 的余子式定义为:把 n 阶行列式中 a_{ij} 所在的行与列的元素划掉,剩下的元素(不改变其相对位置)所构成的 $(n-1)$ 阶行列式,叫做元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij}。M_{ij} 乘以 $(-1)^{i+j}$ 所得的式子,叫做元素 a_{ij} 的代数余子式,记为 A_{ij}。

从行列式的定义出发可直接计算行列式的值。

【例 1】 求行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 5 & 5 & 4 & 8 \end{vmatrix}$ 之值。

解: 原式 $=(-1)^{2+1}\times 6\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 8 \end{vmatrix}+(-1)^{4+1}\times 5\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

$$=(-6)\times(-1)^{3+1}\times 5\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}+(-5)\times(-1)^{2+1}\times 3\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$=(-6)\times 5\times(7-15)+(-5)\times(-3)\times(7-15)=120$$

二、行列式的性质及其计算

根据 n 阶行列式的定义,其值是可以计算的,如同例 1 那样。但当 n 较大时,这种计算将是很麻烦的,因此,需要讨论行列式的性质,并利用这些性质来简化计算。下面一一叙述,只对其中一部分给予证明。

首先说明,如果把行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行依次换成列,所得的行列式

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-2}$$

叫做行列式 D 的**转置行列式**。

性质 1 行列式转置后其值不变，即 $D' = D$。

关于性质 1 的证明从略，读者可随便举一行列式验证之。由性质 1 可知行列式的“行”所具有的性质，对“列”也一定成立，反之亦然。

性质 2 互换行列式的两行(列)，行列式的值改变符号。(证明略)。

例如，三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \times 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \times (-4) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{3+1} \times 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 12 + 4 \times (-1) + 2 \times (-5) = 10$$

交换 D 的一、三两列所得的行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \times 2 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{2+1} \times 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \times 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times 18 + (-1) \times (-4) + 5 \times (-10) = -10$$

推论 若行列式 D 有两行(列)的元素完全相同，则 $D = 0$。

性质 3 行列式 D 等于它任意一行(列)的元素与它的代数余子式乘积之和，即

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1-3}$$

或

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{1-4}$$

证明: 这里只证明第(1-4)式。

把 D 中第 j 列的元素依次和它前面的列互换，最后把它换到第一列的位置，得到行列式 D_1 为:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{1j} & a_{21} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

显然 D_1 中第一列元素 $a_{ij}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的余子式就是原来行列式 D 的第 j 列元素的余子式 $M_{ij}(i = 1, 2, \cdots, n)$，根据行列式的定义有:

$$D_1 = a_{1j}M_{1j} + (-1)^{2+1}a_{2j}M_{2j} + \cdots + (-1)^{i+1}a_{ij}M_{ij} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{nj}M_{nj}$$

再由性质 2 有(因互换列 $j - 1$ 次):

$$D = (-1)^{j-1}D_1$$

于是得

$$D = (-1)^{j-1}[a_{1j}M_{1j} + (-1)^{2+1}a_{2j}M_{2j} + \cdots + (-1)^{i+1}a_{ij}M_{ij} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{nj}M_{nj}]$$
$$= (-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}M_{2j} + \cdots + (-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij} + \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj}M_{nj}$$
$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{ij}A_{ij} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

性质 4 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和为零,即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0 \quad (i \neq j) \tag{1-5}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = 0 \quad (i \neq j) \tag{1-6}$$

证明: 下面只证明式(1-5)。由性质 3 有:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}A_{jk}$$

如果把 D 中的第 j 行的元素换成第 i 行的元素 $(i \neq j)$,其它各行元素不变,则 D 成 D_1,即

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

由性质 3 有

$$D_1 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$$

而由于 D_1 有两行元素(第 i 行和第 j 行)完全相同,所以由性质 2 的推论有

$$D_1 = 0$$

从而有

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0 \quad (i \neq j)$$

性质 5 如果行列式某一行(列)所有元素有公因子,则可将公因子提到行列式记号外面,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5 可由性质 3 直接推出，读者可试证。

推论 1 若行列式 D 有一行(列)的元素全为零，则 $D=0$。

推论 2 若行列式 D 有两行(列)的元素对应成比例，则 $D=0$。

性质 6 如果行列式某一行(列)的元素都是两项的和，则可以把此行列式化为两个行列式的和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6 可由性质 3 直接推出。

性质 7 如果行列式某一行(列)的元素加上另一行(列)对应元素的 λ 倍，那么行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1}+\lambda a_{t1} & a_{s2}+\lambda a_{t2} & \cdots & a_{sn}+\lambda a_{tn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这一结论可由性质 6、性质 5 的推论 2 推出，读者可自行证明。

以上性质及推论经常用来简化行列式的计算，下面举例说明。

【例 2】 计算下面的行列式之值:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

解: 如果从定义出发计算，则要先降成四个三阶行列式，再降二阶，最后求出值；如果直接利用性质 3，则要先降成三个三阶行列式，再降二阶求值。这两种办法都要进行较多的运算。如果考虑先用性质 7 把某一行(列)的元素除一个之外全化成零，再用性质 3，则可把四阶行列式的求值化成一个三阶行列式的求值；再重复使用性质 7、3，把三阶行列式的求值化成一个二阶行列式的求值，从而得到所要求的值。这样就会使计算简化。具体做法如下:

以 (r_i) 代表第 i 行；以 (c_j) 代表第 j 列，并规定:

(1) 把第 i 行(列)的每一元素加上第 j 行(列)的对应元素的 k 倍，记作 $(r_i)+k(r_j)$ $[(c_i)+k(c_j)]$；

(2) 互换第 i 行(列)和第 j 行(列))，记作: $(r_i)\longleftrightarrow(r_j)[(c_i)\longleftrightarrow(c_j)]$。

这样,对本例就有:

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&0&1&2\\3&-1&-1&0\\1&2&0&-5\end{vmatrix}\xlongequal[(r_4)+2(r_3)]{r(_1)+2(r_3)}$$

$$\begin{vmatrix}7&0&1&4\\1&0&1&2\\3&-1&-1&0\\7&0&-2&-5\end{vmatrix}\xlongequal{\text{性质 3}}(-1)^{3+2}\times(-1)\begin{vmatrix}7&1&4\\1&1&2\\7&-2&-5\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(r_3)+2(r_2)]{(r_1)+(-1)(r_2)}\begin{vmatrix}6&0&2\\1&1&2\\9&0&-1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{性质 3}}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}6&2\\9&-1\end{vmatrix}=-24$$

【例 3】 求下列行列式之值:

$$D=\begin{vmatrix}a&a&b&a\\a&a&a&b\\b&a&a&a\\a&b&a&a\end{vmatrix}$$

解:

$$D\xlongequal[(r_4)+(-1)(r_1)]{(r_2)+(-1)(r_1)}\begin{vmatrix}a&a&b&a\\0&0&a-b&b-a\\b&a&a&a\\0&b-a&a-b&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(c_3)+(c_4)}\begin{vmatrix}a&a&a+b&a\\0&0&0&b-a\\b&a&2a&a\\0&b-a&a-b&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{性质 3}}(-1)^{2+4}\times(b-a)\begin{vmatrix}a&a&a+b\\b&a&2a\\0&b-a&a-b\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(c_2)+(c_3)}(b-a)\begin{vmatrix}a&2a+b&a+b\\b&3a&2a\\0&0&a-b\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{性质 3}}(b-a)\times(-1)^{3+3}\times(a-b)\begin{vmatrix}a&2a+b\\b&3a\end{vmatrix}$$

$$=-(b-a)^2[3a^2-b(2a+b)]$$
$$=(b-a)^3(3a+b)$$

三、克莱姆法则

在这一部分讨论用 n 阶行列式来解含有 n 个方程 n 个未知量的线性方程组的问题。设 n 个方程 n 个未知量的线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1-7}$$

它的系数(不改变相对位置)构成的行列式为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-8}$$

如果 $D \neq 0$，则方程组(1-7)有唯一解，即

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n = \frac{D_n}{D}$$

这里 D_j 是用方程组的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 做为一列依次去换 D 中的第 j 列元素所得的 n 阶行列式。以上就是**克莱姆法则**的内容，下面给出这一法则的数学证明。

令 j 是 $1,2,\cdots,n$ 中的任意一个，分别用 D 中第 j 列元素的代数余子式 $A_{1j}, A_{2j}, \cdots, A_{nj}$ 乘方程组(1-7)的诸方程而后相加，得

$$\begin{aligned} &(a_{11}A_{1j} + a_{21}A_{2j} + \cdots + a_{n1}A_{nj})x_1 + \cdots + (a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots \\ &\quad + a_{nj}A_{nj})x_j + \cdots + (a_{1n}A_{1j} + a_{2n}A_{2j} + \cdots + a_{nn}A_{nj})x_n \\ &= b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj} \end{aligned}$$

由行列式的性质 3 和性质 4 知，上式中 x_j 的系数等于 D，而 $x_i(i \neq j)$ 的系数等于零，其右端恰好是用 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 做为一列换 D 中第 j 列元素所得的行列式 D_j，即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\uparrow$$

(j 列)

这样就得到

$$D \cdot x_j = D_j$$

令 $j = 1,2,\cdots,n$，则得

$$D \cdot x_1 = D_1,\ D \cdot x_2 = D_2,\ \cdots,\ D \cdot x_n = D_n \tag{1-9}$$

于是当 $D \neq 0$ 时，方程组(1-9)有唯一解，即

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n = \frac{D_n}{D} \tag{1-10}$$

又由于式(1-9)与式(1-7)同解，所以原方程组(1-7)有唯一解(1-10)。

【例 4】 线性方程组如下，试用克莱姆法则求解。

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 \qquad\quad - 6x_4 = 9 \\ \qquad 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

解：首先计算系数行列式的值

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1 & -5 & 1\\ 1 & -3 & 0 & -6\\ 0 & 2 & -1 & 2\\ 1 & 4 & -7 & 6\end{vmatrix}=27\neq 0$$

故可用克莱姆法则求解。其次算出 D_i 之值 $(i=1,2,3,4)$，即

$$D_1=\begin{vmatrix}8 & 1 & -5 & 1\\ 9 & -3 & 0 & -6\\ -5 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 4 & -7 & 6\end{vmatrix}=81$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 8 & -5 & 1\\ 1 & 9 & 0 & -6\\ 0 & -5 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -7 & 6\end{vmatrix}=-108$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2 & 1 & 8 & 1\\ 1 & -3 & 9 & -6\\ 0 & 2 & -5 & 2\\ 1 & 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=-27$$

$$D_4=\begin{vmatrix}2 & 1 & -5 & 8\\ 1 & -3 & 0 & 9\\ 0 & 2 & -1 & -5\\ 1 & 4 & -7 & 0\end{vmatrix}=27$$

从而得到原方程组的唯一解为：

$$x_1=\frac{81}{27}=3,\quad x_2=\frac{-108}{27}=-4,\quad x_3=\frac{-27}{27}=-1,\quad x_4=\frac{27}{27}=1。$$

需要说明，这里只是在给出行列式的基础上，做为其应用介绍了克莱姆法则。克莱姆法则所能求解的线性方程组是特殊的，它要求未知量和方程的个数要相等，而且系数行列式的值不等于零。至于一般的线性方程组的求解问题将在 § 1.5 中介绍。

习　题　1-1

1. 证明 § 1.1 性质 7 的结论。
2. 计算行列式的值(方法不论，力求简便)：

(1) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1 & 5\\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2\end{vmatrix}$。