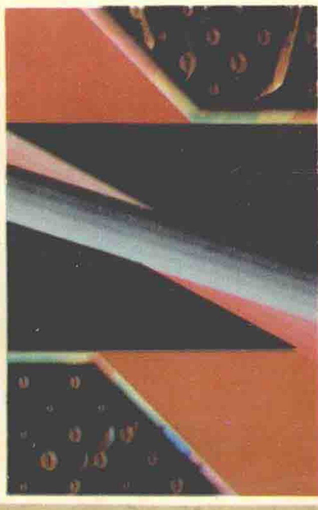
初中数学精讲

钱浩明　编著

江苏教育出版社

三年级几何



CHUZHONG SHU XUE JINGJIANG

初中数学精讲
三年级几何

钱浩明　编著

江苏教育出版社

初中数学精讲·三年级几何
钱浩明　编著
责任编辑　喻　纬

出版发行：江　苏　教　育　出　版　社
（南京马家街31号，邮政编码：210009）
经　　销：江　苏　省　新　华　书　店
照　　排：南京理工大学激光照排公司
印　　刷：江　苏　苏　中　印　刷　厂
（泰州市南门鲍徐，邮政编码：225521）

开本 787×1092 毫米　1/32　印张 7.625　字数 165 000
1997年12月第1版　1997年12月第1次印刷
印数 1—60 200 册

ISBN 7—5343—3114—5

G·2836　　定价：6.40元

说　　明

学校学习阶段，是影响人的一生发展的重要阶段. 在校学习能够遇到良师，是一生中的幸运. 但这种幸运只可能降临到少数人身上. 因此，将优秀教师的教学精华精心整理成书、广泛传播，为广大中学生提供"幸遇良师"的新机会，便成为我们多年的夙愿. 经过多年筹备之后推出的新系列《初中数学精讲》，就是循着这样的思路策划成功的.

《初中数学精讲》的作者既有丰富的教学经验，又勤于笔耕，发表过大量著述. 最为难能可贵的是，他们至今仍然坚持奋战在初中数学教学第一线，他们是在教学实践中经过千锤百炼、具有真才实学的名师.

《初中数学精讲》是作者的教学精华(特别是新授课教学精华)的浓缩. 书中的内容讲解部分，不求面面俱到，而着力于剖析教材的重点、难点和关键；例题的解答与分析力求将"三基"(基础知识、基本技能技巧、基本思想方法)教学与解题训练融为一体，书中的习题经过精心的筛选与配置，由易到难层次分明，举一反三以少胜多.

《初中数学精讲》全套六册：

《一年级分册》，可与现行初中课本代数第一册(上)、代数第一册(下)和几何第一册配套使用；

《二年级代数》，可与现行初中课本代数第二册配套使用；

《二年级几何》，可与现行初中课本几何第二册配套使

用；

《三年级代数》，可与现行初中课本代数第三册配套使用；

《三年级几何》，可与现行初中课本几何第三册配套使用；

《复习强化》，主要供初中三年级下学期数学复习阶段使用，也可供各年级代数、几何单元复习时使用.

这套书可供初中学生，自学初中数学者，中学数学教师、教研员，师范院校数学系师生阅读. 这套书出版后，将不断进行滚动式修订，确保常出常新. 因此，衷心欢迎广大读者对书中的不足之处提出批评、建议.

1997 年 12 月

目　　录

第六章　解直角三角形

第七章　圆

第六章　解直角三角形

在直角三角形中，已知一个 30°的角和任意一边的长，我们可以求出其余的边. 如果把问题中 30°的角改为任意锐角，将如何求解？还有，已知直角三角形任意两边的长，能不能求出它的锐角？这些都是本章要解决的问题.

本章分锐角三角函数和解直角三角形两大部分. 其中，锐角三角函数的概念是本章的基础，又是学习的重点、难点和关键. 为了减小学习的难度，课本分两节分别介绍正弦、余弦和正切、余切，包括定义，特殊角的三角函数值，三角函数的取值范围和增减情况，三角函数表的查法等. 在此基础上进入本章中心，根据直角三角形的边角关系解直角三角形，并举例说明它的实际应用，安排了实习作业.

在本章的学习中，处处离不开直角三角形和它的边、角关系，充分运用形数结合的数学思想和数学方法将大大有利于本章的学习，无论是理解概念还是进行计算，都要画好图，用好图. 本章有许多需要记忆的内容，要联系图形加以熟记.

一　锐角三角函数

6.1.1　正弦和余弦（一）

课本表明：在$\triangle ABC$中，$\angle C$为直角.

当$\angle A=30^\circ$时，$\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{1}{2}$；

当$\angle A=45^\circ$时，$\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

这就是说，只要直角三角形有一个角为30°，它的对边与斜边的比值就是$\dfrac{1}{2}$；只要直角三角形有一个角为45°，它的对边与斜边的比值就是$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.这里的比值由30°或45°的角完全确定，与直角三角形的位置与大小无关.

上面的情况，对于$\angle A$取任意锐角也完全一样.只要$\angle A$在锐角范围内取任意一个固定的值，$\angle A$的对边与斜边的比就有唯一确定的值相对应.$\angle A$的取值与两边的比值这种对应关系就是代数第十三章中即将系统介绍的函数关系，这里称为三角函数，本章介绍锐角的正弦、余弦、正切、余切四种三角函数.

锐角A的对边与斜边的比叫做$\angle A$的正弦函数，简称$\angle A$的正弦，记作$\sin A$，即$\boldsymbol{\sin A=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}}$.

因为锐角A的对边是直角边，总小于斜边，所以$0<\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}<1$，即$0<\sin A<1$（$\angle A$为锐角）.

“$\sin A$”表示$\angle A$的正弦，其中正弦的记号“sin”和$\angle A$（习惯上省去“$\angle$”）是一个完整的不可分开的记号，不能写成“sin”或“$\sin\cdot A$”.对于其余几种三角函数的符号也是这样.

与正弦情况相似：在$\triangle ABC$中，$\angle C$是直角，只要$\angle A$在锐角范围内取任意一个固定的值，$\angle A$的邻边与斜边的比就有唯一确定的值相对应，$\angle A$的取值与邻边、斜边间的比值也存在函数关系，这种函数叫做$\angle A$的余弦.

$\angle A$ 的余弦记作 $\cos A$，即 $\mathbf{\cos A}=\dfrac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}$.

因为 $\angle A$ 的邻边也是直角边，总小于斜边，所以 $0<\dfrac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}<1$，即 $0<\cos A<1$（$\angle A$为锐角）.

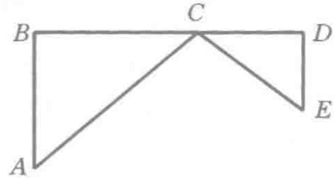


图 6-1

例 1 已知：如图 6-1，$\angle B$ 和 $\angle D$ 为直角，用两条线段的比分别表示图中各个锐角的正弦和余弦.

解 $\because$ $\angle B$ 和 $\angle D$ 为直角，

$\therefore$ 图中的$\angle A$、$\angle ACB$、$\angle E$、$\angle ECD$ 都是锐角.

根据正弦函数和余弦函数的定义，得

$\sin A=\dfrac{BC}{AC}$，　　$\cos A=\dfrac{AB}{AC}$；

$\sin ACB=\dfrac{AB}{AC}$，　　$\cos ACB=\dfrac{BC}{AC}$；

$\sin E=\dfrac{CD}{CE}$，　　$\cos E=\dfrac{DE}{CE}$；

$\sin ECD=\dfrac{DE}{CE}$，　　$\cos ECD=\dfrac{CD}{CE}$.

例 2 已知：如图 6-2，在 $\triangle ABC$ 中，CD 是高，$CD=3$，$AD=3\sqrt{3}$，$BD=4$，求图中各锐角的正弦值和余弦值.

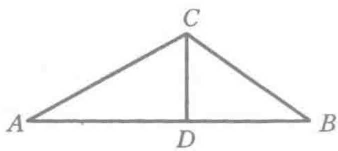


图 6-2

解 $\because$ CD 是高，$\therefore$ 图中的锐角是$\angle A$、$\angle ACD$、$\angle B$、$\angle BCD$.

由勾股定理，得

$AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+3^2}=6.$

$BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5.$

根据正弦函数和余弦函数的定义，得

$\sin A=\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$，$\cos A=\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{3\sqrt{3}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

$\sin ACD=\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{3\sqrt{3}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos ACD=\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$；

$\sin B=\dfrac{CD}{BC}=\dfrac{3}{5}$，$\cos B=\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{4}{5}$；

$\sin BCD=\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{4}{5}$，$\cos BCD=\dfrac{CD}{BC}=\dfrac{3}{5}$.

说明 在不同位置的直角三角形中，能熟练地写出表示三角函数的等式，对本章以后的学习至关重要. 这里固然要熟记三角函数的定义，还要分清是哪一个角的三角函数，并在图中准确地找出它的对边或邻边.

练　习

1. 选择：

(1) $\angle A$ 是直角三角形的一个锐角，下列说法正确的是 (　　)

(A) $\sin A$ 表示直角三角形的一个角.

(B) $\sin A$ 表示直角三角形的一边长.

(C) $\sin A$ 表示 $\angle A$ 的邻边与斜边的比.

(D) $\sin A$ 表示 $\angle A$ 的对边与斜边的比值.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 是直角，下列判断错误的是 (　　)

(A) $\angle A$ 和 $\angle B$ 是两个互余的锐角.

(B) $\angle A$ 的对边是 $\angle B$ 的邻边.

(C) $\angle B$ 的对边是 $\angle A$ 的邻边.

(D) $\angle A$、$\angle B$ 的正弦值是一切实数.

2. 填空：

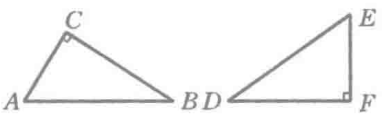
(1) 如图，$\angle C$、$\angle F$ 为直角，用线段的比表示：

$\sin A=$ ________，　$\sin B=$ ________，

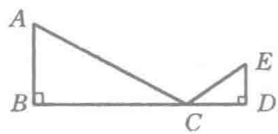
$\cos A=$ ________，　$\cos B=$ ________，

$\sin D=$ ________，　$\sin E=$ ________，

$\cos D=$ ________，　$\cos E=$ ________.



(第 2(1)题)



(第 2(2)题)

(2) 如图，$\angle B$、$\angle D$ 为直角，$AC=13$，$BC=12$，$CD=4$，$DE=2$，下列各函数的值是：

$\sin A=$ ________，　$\cos A=$ ________，

$\sin ACB=$ ________，$\cos ACB=$ ________，

$\sin E=$ ________，　$\cos E=$ ________，

$\sin ECD=$ ________，$\cos ECD=$ ________.

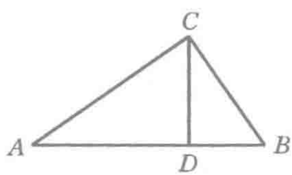
(3) 如图，$\angle ACB$ 为直角，$CD\perp AB$，用线段的比表示：在$\triangle ABC$ 中，

$\sin A=$ ________，

$\cos A=$ ________，

$\sin B=$ ________，

$\cos B=$ ________；



(第 2(3)题)

在$\triangle ACD$ 中，$\sin A=$ ________，$\cos A=$ ________，

$\sin ACD=$ ________, $\cos ACD=$ ________;

在$\triangle BCD$中, $\sin B=$ ________, $\cos B=$ ________,

$\sin BCD=$ ________, $\cos BCD=$ ________.

3. 化简,其中α为锐角:

(1) $\cos\alpha+1+|\cos\alpha-1|$;

(2) $\sin\alpha-2+\sqrt{(\sin\alpha-1)^2}$.

6.1.2 正弦和余弦(二)

在直角三角形ABC中,我们把直角C的对边AB记作c,$\angle A$的对边BC记作a,$\angle B$的对边AC记作b,由直角三角形的性质可知:

当$\angle A=30°$时,$a:b:c=1:\sqrt{3}:2$(如图 6-3).

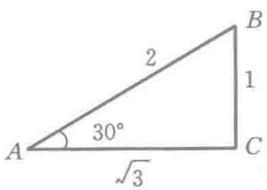


图 6-3

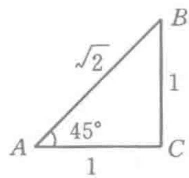


图 6-4

当$\angle A=45°$时,$a:b:c=1:1:\sqrt{2}$(如图 6-4).

由此得到:

$$\sin 30°=\frac{1}{2},\quad \sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos 60°=\frac{1}{2}.$$

这几个特殊角的三角函数的值,今后将有广泛应用,必须结合图形加以熟记.

现在我们在以上一组值的基础上研究两个问题：

一、我们可以看出：

$\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$，这里 $30° + 60° = 90°$；

$\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$，这里 $45° + 45° = 90°$；

$\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$，这里 $60° + 30° = 90°$.

是不是任意锐角的正弦值都等于它的余角的余弦值呢？

观察图 6-3 可知，在直角三角形 ABC 中，锐角 A 的对边就是锐角 B 的邻边，锐角 B 的对边也是锐角 A 的邻边. 所以

$$\sin A = \frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c},$$

$$\cos B = \frac{\angle B\text{ 的邻边}}{\text{斜边}} = \frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c},$$

$\sin A = \cos B$. 同理，$\cos A = \sin B$.

因为这里 $\angle A + \angle B = 90°$，$\angle B = 90° - \angle A$，

所以上面的关系式又可以写成

$$\mathbf{\sin A = \cos(90° - A), \cos A = \sin(90° - A).}$$

这就是说，任意锐角的正弦值等于它的余角的余弦值，任意锐角的余弦值也等于它的余角的正弦值.

二、由 30°、45°、60°角的正弦值和余弦值看到

$\sin 60° > \sin 45° > \sin 30°$；

$\cos 60° < \cos 45° < \cos 30°$.

这两个不等式所反映的是不是锐角的正弦值、余弦值增减的普遍规律呢？

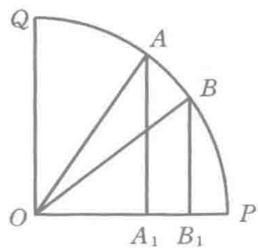


图 6-5

观察图 6-5，其中 $AA_1 \perp OP$，

$BB_1 \perp OP$，$OQ \perp OP$，$OP = OB = OA = OQ$.

当锐角 BOB_1 逐步增大，如增大为锐角 AOA_1 时，它的对边随之增大，由 BB_1 增大为 AA_1，而它的邻边却随之减小，由 OB_1 减小为 OA_1.

这就是说，当 $\angle AOA_1 > \angle BOB_1$ 时，它们的对边 $AA_1 > BB_1$，它们的邻边 $OA_1 < OB_1$.

因为 $\sin AOA_1 = \dfrac{AA_1}{OA}$，$\sin BOB_1 = \dfrac{BB_1}{OB}$，且 $OA = OB$，

所以 $\sin AOA_1 > \sin BOB_1$.

因为 $\cos AOA_1 = \dfrac{OA_1}{OA}$，$\cos BOB_1 = \dfrac{OB_1}{OB}$，且 $OA_1 < OB_1$，

所以 $\cos AOA_1 < \cos BOB_1$.

由此可见：**当角度在 0°～90°之间变化时，它的正弦值随着角度的增大（或减小）而增大（或减小），它的余弦值却随着角度的增大（或减小）而减小（或增大）.**

当 $\angle BOB_1$ 减小为 0°时，点 B 和点 B_1 都将重合于点 P，BB_1 缩小为 0，$OB_1 = OB$，∴ $\mathbf{\sin 0° = 0, \cos 0° = 1}$.

当 $\angle BOB_1$ 增大为 90°时，点 B 将重合于点 Q，点 B_1 重合于点 O，OB_1 缩小为 0，$BB_1 = OB$，∴ $\mathbf{\sin 90° = 1, \cos 90° = 0}$.

例 3 求下列各式的值：

(1) $\sin 60° \cdot \cos 30° - \sin 30° \cdot \cos 60° + \sqrt{2}\cos 45°$；

(2) $\dfrac{\sin^2 45° + \cos^2 45°}{2\cos 30° - \cos 0°}$.

解 (1) $\sin 60° \cdot \cos 30° - \sin 30° \cdot \cos 60° + \sqrt{2}\cos 45°$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + 1 = 1\frac{1}{2}.$$

（2）$\dfrac{\sin^2 45°+\cos^2 45°}{2\cos 30°-\cos 0°}=\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$

$=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}.$

例 4 在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的对边分别是a、b、c.

（1）已知$a=5$，$b=5\sqrt{3}$，求$\sin A$、$\sin B$及$\angle A$、$\angle B$；

（2）已知$a=8$，$c=8\sqrt{2}$，求$\cos A$、$\cos B$及$\angle A$、$\angle B$.

解 （1）$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5^2+(5\sqrt{3})^2}=\sqrt{100}=10.$

$\therefore\quad \sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}.$

$\sin B=\dfrac{b}{c}=\dfrac{5\sqrt{3}}{10}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

$\because\quad \sin A=\dfrac{1}{2}$，$\therefore$ 锐角$A=30°$.

$\because\quad \sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore$ 锐角$B=60°$.

（2）$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(8\sqrt{2})^2-8^2}=\sqrt{64}=8.$

$\therefore\quad \cos A=\dfrac{b}{c}=\dfrac{8}{8\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},$

$\cos B=\dfrac{a}{c}=\dfrac{8}{8\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

$\because\quad \cos A=\cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore$ 锐角$\angle A=\angle B=45°$.

例 5 （1）已知$\cos 65°12'=0.4195$，求$\sin 24°48'$；

(2) 计算$\dfrac{2\sin15°24'}{\cos74°36'}-\sin62°32'+\cos27°28'$.

解 (1) $\sin24°48'=\sin(90°-65°12')=\cos65°12'$

$=0.4195$.

(2) $\dfrac{2\sin15°24'}{\cos74°36'}-\sin62°32'+\cos27°28'$

$=\dfrac{2\sin15°24'}{\cos(90°-15°24')}-\sin(90°-27°28')+\cos27°28'$

$=\dfrac{2\sin15°24'}{\sin15°24'}-\cos27°28'+\cos27°28'=2$.

例 6 比较下列各组中三角函数值的大小,并用"$>$"连接各式:

(1) $\sin32°15'$,$\cos22°18'$,$\sin67°40'$,$\sin0°$,$\cos0°$;

(2) $\sin90°$,$\cos90°$,$\cos18°24'$,$\sin71°35'$,$\cos71°44'$.

解 (1) $\because$ $\cos22°18'=\sin67°42'$,$\sin0°=0$,$\cos0°=1$,

又当 $0°<\alpha<90°$时,$0<\sin\alpha<1$,且 $\sin\alpha$ 的值随 α 值的增大(或减小)而增大(或减小).

$\therefore$ $\cos0°>\cos22°18'>\sin67°40'>\sin32°15'>\sin0°$.

(2) $\because$ $\sin71°35'=\cos18°25'$,$\sin90°=1$,$\cos90°=0$,

又当 $0°<\alpha<90°$时,$0<\cos\alpha<1$,且 $\cos\alpha$ 的值随 α 值的增大(或减小)而减小(或增大).

$\therefore$ $\sin90°>\cos18°24'>\sin71°35'>\cos71°44'>\cos90°$.

练　习

1. 求下列各式的值:

(1) $\sin60°+\sin45°+\sin30°$;

(2) $\cos60°+\cos45°+\cos30°$;

(3) $\sin30°\cdot\cos30°+\sin60°\cdot\cos60°-\sin45°\cdot\cos45°$;

(4) $\sin^2 60°+\cos^2 60°+\sin^2 30°+\cos^2 30°$;