高中数学

考点导析与测试

陈元芳　主编

HUXUE

广西师范大学出版社

考点·导析·测试

高中数学考点导析与测试

主　编　陈元芳
副主编　贺双桂　罗洪信
编　者　（以姓氏笔划为序）
陈元芳　张永松　周月岭
罗洪信　贺双桂

广西师范大学出版社

(桂)新登字 04 号

考点·导析·测试

高中数学考点导析与测试

陈元芳　主编

责任编辑:张立群　唐丹宁　　　封面设计:吕毅林

广西师范大学出版社出版　　　邮政编码:541001

(广西桂林市中华路 36 号)

全国各地新华书店经销　　　柳州市印刷厂印刷

*

开本:787×1092　1/32　　印张:10.125　　字数 225 千字

1995 年 1 月第 1 版　　　1995 年 1 月第 1 次印刷

印数:00001—30200 册

ISBN 7-5633-1580-2/G·1265

定价:6.10 元

说　　明

本套丛书自1993年7月出版以来，深受广大读者的青睐和喜爱，成为高考学生一套不可多得的辅导资料。

为了使本套丛书能更好地贴近读者，对准高考，紧跟形势，我们根据新教材及其考试说明，并参考读者在使用中反馈回来的意见，对原版书作了系统的修改和完善，旨在使学生使用本书后能在考前有限时间内，了解考点、掌握考点，进一步深入领会和灵活掌握基本概念和基本技能，以达到以一变应万变的能力。这次修改，特别注重对“跟踪训练”这部分内容的修订。大部分练习重新改写，题目新，方法巧，应用知识灵活，注重能力的训练和培养，注重思维方法和技巧的应用，并适当地增加了题数。根据近几年高考的动向和特点，在全书的后面设计了几套“高考模拟试题”，并附有1993、1994年全国高考试题，供考生自测及在考前做模拟训练。本套丛书具有实战性、针对性强的特点。

本套丛书由唐丹宁、陈仲芳、张晶义同志策划组稿。我们衷心地祝愿这套修订后的丛书与广大读者见面后，成为读者欢迎和信赖的书，愿她伴随您走向成功。

编　者

1995年2月

前　言

恢复高考制度17年来，特别是1988年以来，各年高考数学命题，在紧扣大纲、教材，加强基础，突出重点，注重能力等方面已形成了比较稳定的风格. 高考题型日趋规范，知识比例日趋恰当. 为中学数学教学创造了良好的条件. 因此，研究高考数学命题，回顾1988年以来的试题特点、探求命题规律，无论是对于考生应试还是对于今后的中学数学教学都有着重要的意义.

高考试题特点：

一、紧扣大纲、教材

1. 考题中各科所占比分与教学时数匹配. 见附表一. 从表一我们看到：高中数学教学大纲规定总课时数303课时，其中代数182课时(含三角72课时)，立体几何57课时，解析几何64课时. 分科占总课时数的百分率为：代数占60.1(含三角占23.8)，立体几何占18.8，解析几何占21.1. 各年分科占卷面总分的百分率与上述数字是十分接近的.

2. 基础知识覆盖率逐年增大：部颁大纲规定的高中数学知识点个数为132个，每年考查的知识点个数见附表三. 从表三我们看到，各年考查的知识点个数及所占百分比率呈上升趋势.

3. 试题不少源于课本：见附表二.

二、加强基础，突出重点

1. 试题着重考查学生对所学基本概念是否真正理解，并考查能否灵活运用. 以下基本概念每年必考：集合；函数的性

质(单调性、奇偶性、周期性);极限的概念与求法;排列组合;二项式定理;参数方程;极坐标(文科不考)充要条件;空间的角与距离(线线角,线面角,面面角);长方体;直棱柱;正棱锥;圆锥曲线的有关性质(焦点,准线,中心,渐近线)等.

2. 试题着重考查学生基本运算是否正确、迅速、合理.计算已成为学生高考得分的主要手段,甚至成为证题的手段.近年需计算才能得分的试题所占比例见附表四.

3. 试题绝大部分取自重点内容,也就是说高考把教学的重点作为考试的重点.各年考题与教学重点内容对应分布统计见附表五.

三、注重考查能力和重要的数学思想

大纲规定的三大能力,即逻辑思维能力、空间想象能力、运算能力,近年考题中都无一例外的进行了考查.最后归结到考查分析问题和解决问题的能力上来,以解题速度的快慢来区分考生的水平.同时还注重数学思想的考查(如函数思想、数形结合思想、变换的思想等).限于篇幅,这里仅以1992年高考试题为例:1992年考题共有大小考题28道.每道题都要求考生在理解概念的基础上进行判断推理.这本身就是对学生的逻辑思维能力的一种考查.其中涉及的运算有数的运算、式的恒等变形、解方程或不等式,有代数运算,又有三角运算,还有几何运算.当然也有所侧重,如第(27)、(28)题,着重考查运算能力;第(9)、(14)、(26)题,着重考查空间想象能力.对数形结合的思想的考查,如第(3)、(6)、(10)、(12)、(13)、(15)、(17)、(18)、(22)等题均有所涉及,第(19)题涉及了变换的思想,第(13)题涉及了反函数方法等.

试题还重视考查综合运用知识的能力,要求学生揭示知

识点之间的纵横联系，从知识内在结构的整体出发，分析和解决问题，除第(1)题外，每道题都考查了多个知识点，如选择题的第(14)～(18)题，都需要灵活与综合运用所学知识方能解出，第(28)题不仅要求考生掌握知识的纵向联系，解析几何中的直线、椭圆等知识，而且还要求掌握解析几何与代数中的方程，不等式等知识的横向联系，通过这些知识的综合运用，才能解决问题.

鉴于近年来高考试题的实际情况及以上分析，我们编写了本书.

本书通过具体分析近年来的高考数学试题、各地会考试题，归纳出考点，并且对考点进行综合分析，着眼于基础知识的融汇贯通，立足于基本能力的迅速提高.以考点选择典型范例，有针对性地提出问题、分析问题、解决问题，引导思考、发展思维、跟踪训练、过关测试、模拟考试，把揭示数学规律和数学解题方法，提高解题速度与熟悉考题、考点，掌握考点有机的结合起来，以利于考生在考场上取得最佳考试效果.

全书共分九讲，每讲均按高考考点设计，分若干小节，每一小节均可作为一个课时讲授.全书授课时间 30 课时，每小节含三大部分的内容：1. 考题回顾；2. 考点导析，典型示例评析；3. 跟踪训练.每一讲末还专门设计了本单元“典型错误例析”和过关测试题.书末设计了 5 套高考模拟测试题，供教师选用或学生自测评估.所有习题都附有答案或解答.

本书由陈元芳主编，贺双桂、罗洪信任副主编.参加编写的人员还有：周月岭、张永松.全书由陈元芳、贺双桂统稿.

本书可直接供高三师生高考复习、强化训练、课堂教学使用，也可供高一、二年级师生及广大数学爱好者参考.

愿本书能成为广大读者的益友.

限于编者水平,书中缺点错误在所难免,欢迎广大读者批评、指正.

编者

1995年1月

目　录

● 代数部分

第一讲　函数与函数思想

1.1　集合的思想

一、考题回顾

1.(1988,(3)[①])集合$\{1,2,3\}$的子集共有(　　).

(A)7 个；(B)8 个；(C)6 个；(D)5 个.

2.(1989,(1))如果 $I=\{a,b,c,d,e\}$,$M=\{a,c,d\}$,$N=\{b,d,e\}$其中 I 是全集,那么 $\overline{M}\cap\overline{N}$ 等于(　　).

(A)$\varnothing$；(B)$\{d\}$；(C)$\{a,c\}$；(D)$\{b,c\}$.

3.(1990,(9))设全集 $I=\{(x,y)\mid x,y\in \mathrm{R}\}$,集合

---

① 此数字表示此题出于那一年的试题.(1988,(3)即表示此题是 1988 年高考试题第(3)题,余同.

$M=\{(x,y)\mid(y-3)/(x-2)=1\}$，$N=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$，那么$\overline{M\cup N}$等于（　　）.

(A)$\varnothing$；(B)$\{(2,3)\}$；(C)$(2,3)$；(D)$\{(x,y)\mid y=x+1\}$.

4.(1991,(15))设全集为 R，$f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$，$M=\{x\mid f(x)\neq0\}$，　$N=\{x\mid g(x)\neq0\}$，　那么集合$\{x\mid f(x)g(x)=0\}$等于（　　）.

(A)$\overline{M}\cap\overline{N}$；(B)$\overline{M}\cup N$；(C)$M\cup\overline{N}$；(D)$\overline{M}\cup\overline{N}$.

5.(1992,(21))设含有 10 个元素的集合的全部子集数为 S，其中由 3 个元素组成的子集数为 T，则 $T/S=$______.

6.(1989,(24))已知 $f(x)=(x-2k)^2$　$k\in Z$，对自然数 k. 求集合 $M_k=\{a\mid$使方程 $f(x)=ax$ 在 I_k 上有两个不相等的实根$\}$，其中 $I_k=(2k-1,2k+1]$.

二、考点导析

考点 1　与集合有关的问题

[考点分析]　集合、子集、交集、并集、补集的概念，空集与全集的意义，集合的有关术语及表示符号等是数学中基本概念之一，但集合的思想贯穿整个高中数学的始终，成为现代数学思想向中学数学渗透的重要标志．近年高考试题，关于集合方面的问题大体上可分为两类，一类是关于集合基础知识的基本题；另一类是通过集合语言表述的与函数、方程、不等式、复数、排列组合、解析几何等知识有关的综合题. 后一类是难点．因为后一类问题题型表述抽象，所用方法灵活．因此要特别注意了解集合知识在上述方面的渗透和应用，要善

于把集合问题转化为其它数学问题.

[**典型示例评析**]

例 1 ①(1992,(21))设含有10个元素的集合的全部子集数为S,其中由3个元素组成的子集数为T,则$T/S=$_____.

②已知集合$P\subset M=\{a_1,a_2,\cdots,a_6\}$,$Q\subset N=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$,$M\cap N=\varnothing$,则集合$P\cup Q$的个数为____.

分析:本题是集合问题与组合问题的综合题,要特别注意理解集合的元素的确定性,互异性,无序性.

解 ①集合S的个数为2^{10},集合T的个数为C_{10}^3,故$T/S=C_{10}^3/2^{10}=15/128$.

②集合P的个数为2^6-1,集合Q的个数为2^4-1,故集合$P\cup Q$的个数为$(2^6-1)(2^4-1)=945$.

例 2 已知全集$I=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}A\subseteq I,B\subseteq I$且$\overline{A}\cap B=\{1,9\}$,$A\cap B=\{2\}$,$\overline{A}\cap\overline{B}=\{4,6,8\}$,求集合$A,B$.

分析:反映集合与集合的关系的一系列概念都是用元素与集合的关系来定义的,因此本题可从已知条件出发,先确定A,B中一定有或一定没有的元素,然后再对余下的不能立刻断定是否在A,B中的元素利用已知条件和集合的运算意义逐一检验.

解 由$\overline{A}\cap B=\{1,9\}$知$1,9\notin A$,$1,9\in B$;由$A\cap B=\{2\}$知$2\in A$,$2\in B$;由$\overline{A}\cap\overline{B}=\{4,6,8\}$知$4,6,8\notin A$,$4,6,8\notin B$.

下面考虑3,5,7是否在A,B中,若$3\in B$,则因$3\notin A\cap B$得$3\notin A$,于是$3\in\overline{A}$,进而$3\in\overline{A}\cap B$这与$\overline{A}\cap B=\{1,9\}$矛盾.所以$3\notin B$,$3\in\overline{B}$.所以$3\notin\overline{A}$,从而$3\in A$.同理$5\in A$,$5\notin B$,$7\in A$,$7\notin B$.

故 $A=\{2,3,5,7\}$，$B=\{1,2,9\}$.

注：本题若借助韦恩图辅助解题，则解法更简．

例 3 已知集合 $A=\{x\mid x^2-ax\leqslant x-a\}$，$B=\{x\mid 1\leqslant \log_2(x+1)\leqslant 2\}$，$C=\{x\mid x^2+bx+c>0\}$.

①若 $A\cap B=A$，求 a 的取值范围．

②若 $B\cap C=\varnothing$ 且 $B\cup C=\mathrm{R}$，求 b,c 的值．

分析：理解集合的交、并、补及子集的定义是解本题的关键．

解 ①$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$

又 $A=\{x\mid (x-a)(x-1)\leqslant 0\}$，

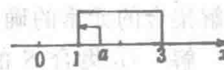

图 1-1

$B=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$，所以欲使 $A\subseteq B$，由图 1-1 知，$1\leqslant a\leqslant 3$.

②由 $A\cup \bar{A}=I$，$A\cap\bar{A}=\varnothing$ 知，$C=\bar{B}=\{x\mid x>3$ 或 $x<1\}=\{x\mid x^2-4x+3>0\}=\{x\mid x^2+bx+c>0\}$，

故有 $b=-4$，$c=3$.

例 4 两复数集

$M=\{z\mid z=t+\mathrm{i}(4-t^2)\ \ t\in\mathrm{R}\}$

$N=\{z\mid z=2\cos\theta+\mathrm{i}(\lambda+3\sin\theta)\ \ \theta\in\mathrm{R}\}$ 且 $M\cap N\neq\varnothing$，求实数 λ 的取值范围．

分析：本题通过集合把复数问题、二次曲线问题、方程有解问题，有机的联系起来了．

$$\text{略解}\quad M\cap N\neq\varnothing\Leftrightarrow\begin{cases}\text{抛物线}\quad y=4-x^2\\ \text{椭圆}\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=\lambda+3\sin\theta\end{cases}\end{cases}$$

(θ 为参数)，有公共点$\Leftrightarrow$方程 $4\sin^2\theta-3\sin\theta-\lambda=0$ 有解$\Leftrightarrow\lambda=4\sin^2\theta-3\sin\theta=4(\sin\theta-3/8)^2-9/16\Leftrightarrow\lambda\in[-9/16,7]$.

注：本题亦可化归为：两曲线 $y=4-x^2$ 与 $x^2/4+(y-\lambda)^2/9=1$ 有公共点，求 λ 的取值范围问题.

三、跟踪训练

1. 选择题

①已知集合 $M=\{s|s=x^2-7x+12\ x\in Z\}$，$N=\{t|t=y^2+3y+2\ y\in Z\}$，则 M 与 N 的关系是(　　).

(A)$M=N$；(B)$M\subset N$；(C)$M\supset N$；(D)以上均可能.

②设 $A\cap B=\varnothing$，$M=\{A\text{ 的子集}\}$，$N=\{B\text{ 的子集}\}$，那么(　　).

(A)$M\cap N=\varnothing$；　　(B)$M\cap N=\{\varnothing\}$；

(C)$M\cap N=A\cap B$；　　(D)$M\cap N\subset A\cap B$.

③全集 $I=\{1,2,3,4,5\}$ 且 $A,B\subset I$，若 $A\cap B=\{2\}$，$\bar{A}\cap B=\{4\}$，$\bar{A}\cap\bar{B}=\{1,5\}$，则下列结论正确的是(　　).

(A)$3\notin A,3\notin B$；　　(B)$3\in A,3\notin B$；

(C)$3\notin A,3\in B$；　　(D)$3\in A,3\in B$.

2. 填空题

①已知 $I=R$，$A=\{x|x^2+x-2<0\}$，$B=\{x|0<x\leqslant 4\}$，则 $\bar{A}\cup\bar{B}=$____________；$A\cap B=$__________.

②设全集 $I=\{x|x=\mathrm{tg}\dfrac{n\pi}{3}\ n\in Z\}$，$A=\{x|1-2^x=0\}$，则 $\bar{A}=$______.

③$x,y\in R$，$A=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$，$B=\{(x,y)|x/a-y/b=1\ a>0,b>0\}$，当 $A\cap B$ 只有一个元素时，a,b 的关系为______.

3. 对于互不相同的五个整数所组成的集合 $S=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$，它的各元素之和为 -8.

①求 S 的所有非空子集的个数；

②写出由 S 中任取四个元素所组成的所有子集，再把各个子集的四个元素之和记为 T，求所有 T 值的和；

③集合 A 与集合 B 是由 S 中任取两个元素所组成的子集，求这样的集合 A 与 B 共有多少组？

4. 设 $P=\{z|z\cdot\bar{z}+3i(\bar{z}-z)+5=0\ z\in C\}$，$Q=\{w|w=2iz,z\in P\}$，若 $z_1\in P$，$w_1\in Q$，试求 $|z_1-w_1|$ 的最大值和最小值.

5. 设 $A=\{(x,y)|x^2+y^2-y=0\}$，$B=\{(x,y)|ax^2+bxy+x=0,ab\neq0,b\neq-1\}$ 且 $A\cap B$ 中有且仅有三个元素，求实数 a,b 应满足的条件.

1.2 函数的思想

一、考题回顾(略)

二、考点导析

考点 2 函数的思想

［**考点分析**］ 要把某一考题简单地化归为利用某一思想求解是不实际的．作为与数学知识数学概念有关的函数的思想是贯穿整个高中数学教学的始终的. 高考命题中也明确提出了“注重数学思想”的要求．这就有助于在克服仅注重数学

基本知识，习惯于"类型加方法"的解题，从而导致对数学的本质理解不深刻的弊端，使我们更为灵活自如地驾驭数学的基本观点．

［典型示例评析］

例1 求最小实数 a 的值，使不等式 $\lg(xy)\leqslant\lg a\cdot\sqrt{\lg^2x+\lg^2y}$ 对于 $x\geqslant1,y\geqslant1$ 恒成立．

分析：本题是含参数的不等式恒成立问题，其解题的常规思路是先根据性质列出控制参数的等价混合组然后求解．但充分的利用函数的思想（此处是利用变元相对性思想，换元思想）可使问题大大简化，希望读者能从本题如下三种解法领悟到其中精髓．

解法一 易知 $a>1$. 设 $m=\lg x,n=\lg y$，将不等式两边平方整理得：

$$(\lg^2a-1)m^2-2mn+(\lg^2a-1)n^2\geqslant0$$

$$\Rightarrow(\lg^2a-1)\left(\frac{m}{n}\right)^2-2\left(\frac{m}{n}\right)+\lg^2a-1\geqslant0\ (n\neq0)$$

令 $t=\dfrac{m}{n}$，则问题转化为二次函数

$$f(t)=(\lg^2a-1)t^2-2t+\lg^2a-1$$

在 $t\geqslant0$ 时恒非负，则上述不等式恒成立的充要条件是：

$$\begin{cases}\lg^2a-1>0\\ \Delta=(-2)^2-4(\lg^2a-1)^2\leqslant0\Rightarrow a\geqslant10^{\sqrt{2}}\Rightarrow a_{\min}=10^{\sqrt{2}}.\\ \dfrac{2}{(\lg^2a-1)}>0\end{cases}$$

解法二 由已知 $a>1$，原不等式变形为：

$$\lg a\geqslant\frac{\lg x+\lg y}{\sqrt{\lg^2x+\lg^2y}}，再由\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}$$