经全国中小学教材审定委员会
2005年初审通过

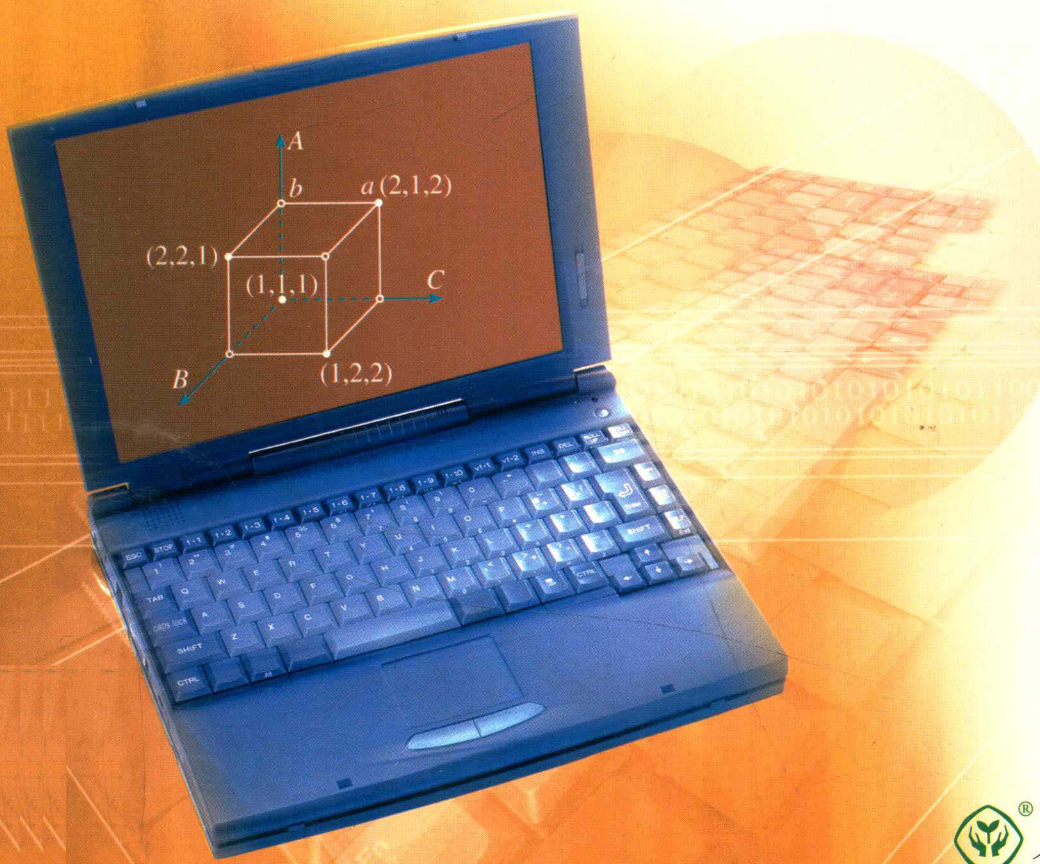
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4–7

优选法与试验设计初步

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著



人民教育出版社

A版

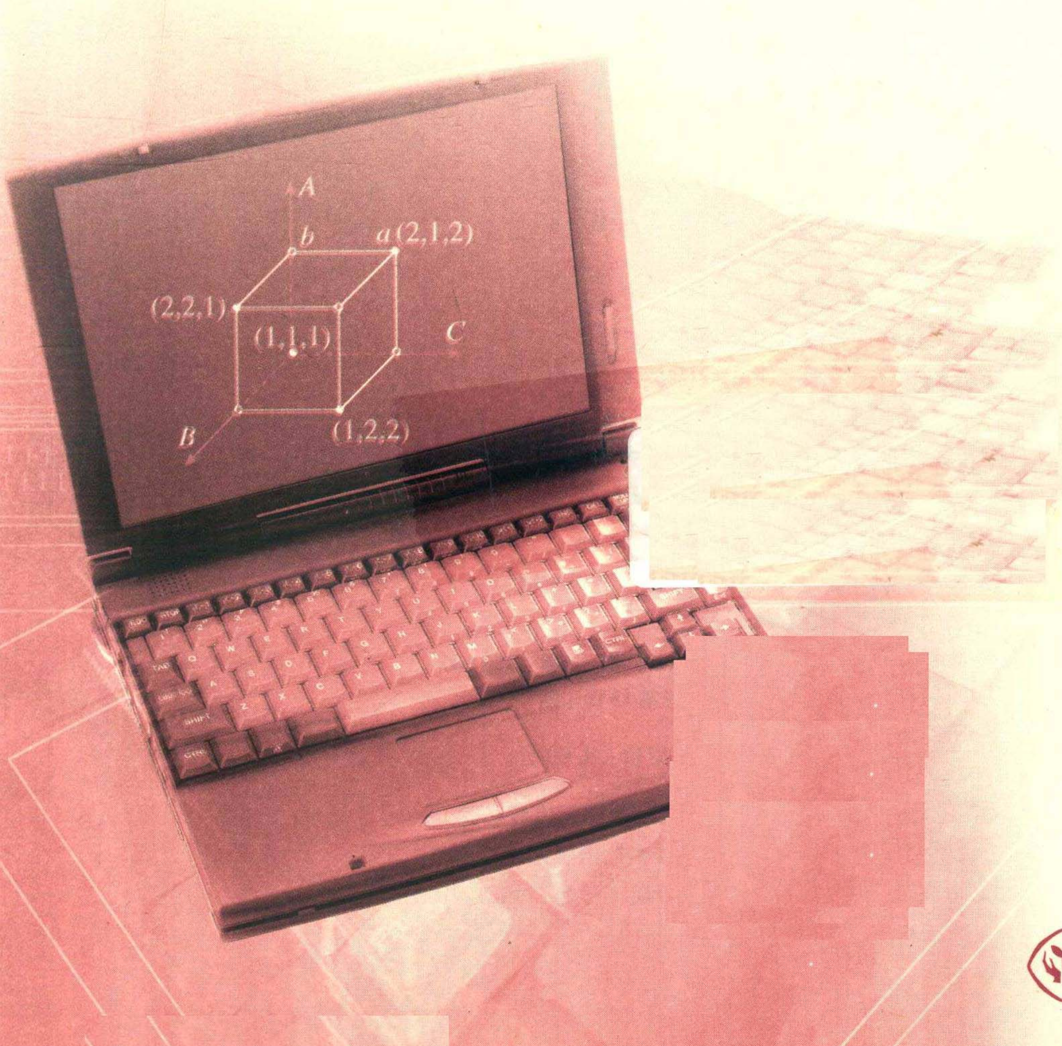
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4-7

优选法与试验设计初步

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著



人民教育出版社

A版

普通高中课程标准实验教科书

数　学

选修 4－7

优选法与试验设计初步（A 版）

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

*

人民教育出版社　出版发行

网址：http://www.pep.com.cn

北京天宇星印刷厂印装　全国新华书店经销

*

开本：890 毫米×1 240 毫米　1/16　印张：3.75　字数：123 000

2007 年 1 月第 2 版　2010 年 7 月第 13 次印刷

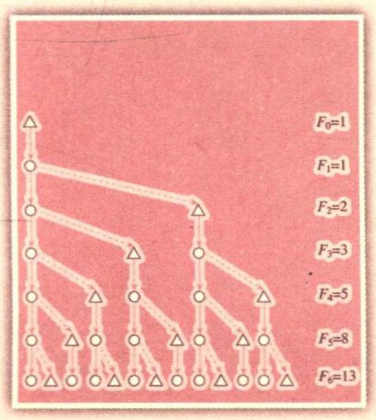
ISBN 978－7－107－18682－0
G・11772（课）　定价：4.00 元

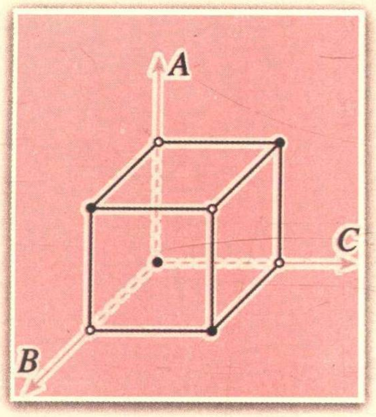
如发现印、装质量问题，影响阅读，请与本社出版科联系调换。
（联系地址：北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）

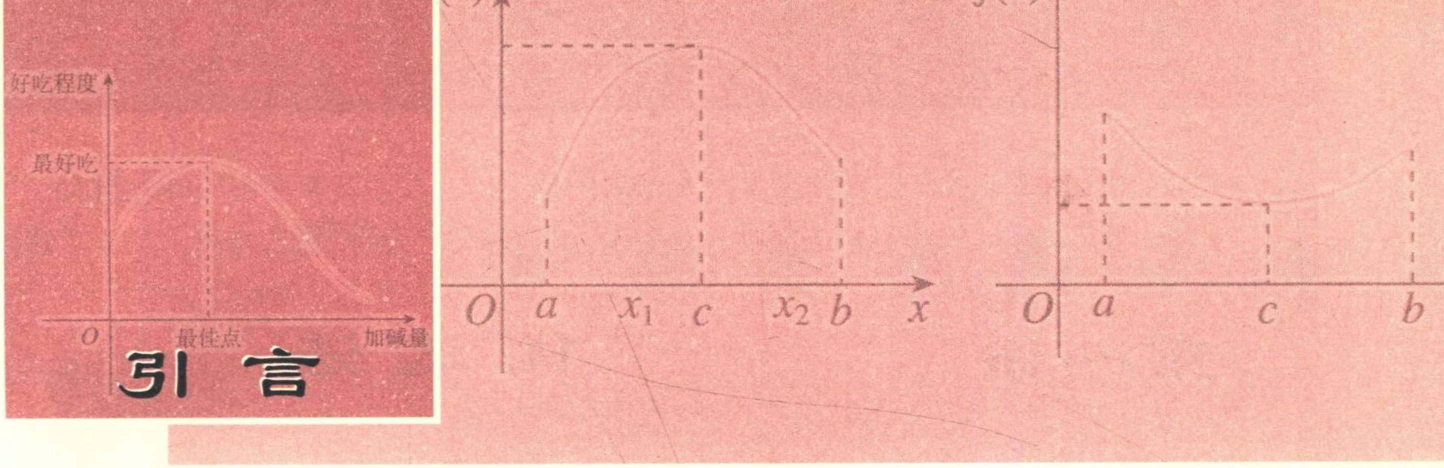
主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

编　　者：张唯一　田载今
责任编辑：章建跃　刘长明
美术编辑：王　艾
封面设计：吴　敬

目 录




A
B
C



引言

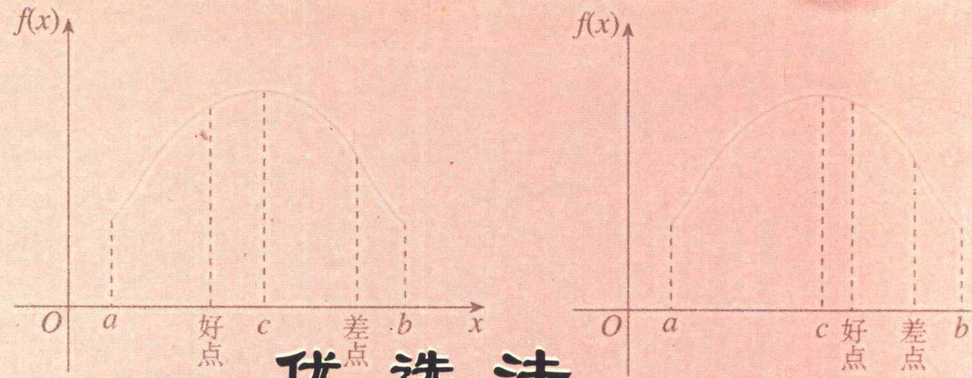
有一种商品价格竞猜游戏，参与者在只知道售价范围的前提下，对一件商品的价格进行竞猜. 当竞猜者给出的估价不正确时，主持人以“高了”“低了”作为提示语，再让竞猜者继续估价，在规定时间或次数内猜对的，即可获得这件商品. 如果参加类似的游戏，每次你将怎么给出估价呢?

蒸馒头是日常生活中常做的事情，为了使蒸出的馒头好吃，就要放碱. 如果碱放少了，蒸出的馒头就发酸；碱放多了，馒头就会发黄且有碱味. 对一定量的面粉来说，放多少碱最适合呢? 如果你没有做馒头的经验，也没有人可以请教，如何迅速地找出合适的碱量?

一个农场希望知道某个玉米品种的高产栽培条件，假如可以掌握的因素是：种植密度、施化肥量、施化肥时间，如何迅速地找出高产栽培的条件? 如何找出其中对玉米的产量影响比较大的因素呢?

事实上，现实中类似的问题举不胜举. 你想过如何解决这些问题吗? 通过本书的学习，你可以学到研究和解决这些问题的一些方法.

第一讲 优选法



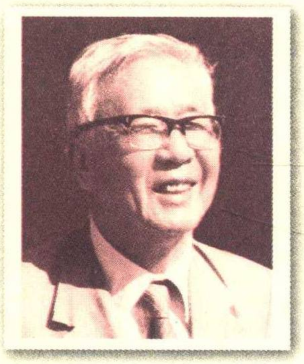
一、什么叫优选法

在生产、生活和科学试验中，人们为了达到优质、高产、低消耗等目的，需要对有关因素的最佳组合(简称**最佳点**)进行选择. 关于最佳点的选择问题，称为优选问题. 优选问题很常见，引言中提到的商品价格竞猜、蒸馒头放碱等都是优选问题. 又如生煤炉，为了节省时间，降低耗煤量，往往在不使用的时候，就把炉门关闭，但如果炉门关闭得太死，炉子就容易灭；关得太松(即留的缝隙太宽)则耗煤量就大. 炉门关到什么程度合适呢？这也是一个优选问题. 在生产和科学试验中，选取“合适”的配方，寻找“合适”的操作和工艺条件，给出产品的“合理”设计参数，把仪器调节器调到“合适”的程度等都是优选问题. 总之，优选问题在生产、科研和日常生活中大量存在.

对于那些试验结果和相关因素的关系不易用数学形式表达或数学表达太复杂的优选问题，人们往往通过做试验❶的办法来寻找各种因素的最佳点.

❶ 这里对试验应作广义的理解，即它可以是物理、化学、生物或生活生产中的实物试验，也可以是数学试验(例如在计算机上进行试验).

通过试验方法求最佳点时，如果不合理安排，我们可能面临大量的试验，不仅要花费大量人力、财力和时间，而且有时可能不具操作性. 例如，找一个1 km^2池塘的最深点. 如果每隔 1 m 测量一次，则差不多要测量 1 000×1 000 次，即差不多 1 000 000 个点，虽然这里只有横竖两个因素，但测量点是一个不小的数目. 如果要测量的不是池塘而是海洋，或涉及的因素是 3 个、4 个，甚至 10 个，那么需要做的试验数目就更可观了. 可以说要做完这些试验几乎是不可能的.



华罗庚(1910. 11. 12— 1985. 6. 12)，江苏金坛人，世界著名数学家，中国科学院院士.

有没有用最少的试验次数就能找到最理想结果的方法呢？或者说怎样迅速找到最优方案？这就是优选法要解决的问题. **优选法**是根据生产和科学研究中的不同问题，利用数学原理，合理安排试验，以最少的试验次数迅速找到最佳点的科学试验方法. 用优选法的目的在于减少试验的次数. 例如，上面的测池塘最深点问题，如果用优选法，那么有 130 次试验就可以达到上述效果.

优选法和其他科学一样，是在实践的基础上产生和发展起来的．20 世纪 60 年代，著名数学家华罗庚亲自组织推广了优选法，使优选法得到了广泛应用，取得了可喜成果．

习题1.1

1. 什么叫优选法？
2. 你能举一些自己生活中遇到过的优选问题吗？

二、单峰函数

在军事训练中，经常要考虑发射角度多大时炮弹的射程最远．这是一个优选问题．

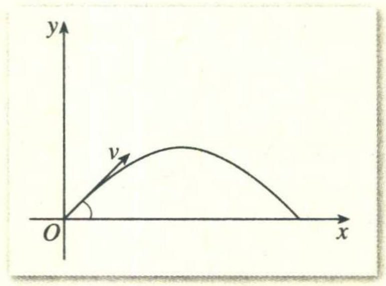


图 1-1

如图 1-1，设炮弹的初速度为 v，发射角度为 $\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，在时刻 t，炮弹距发射点的水平距离为 x，离地面的高度为 y．如果忽略空气阻力，则有

$$y=x\tan\theta-\frac{1}{2}\frac{g}{v^2\cos^2\theta}x^2,$$

其中 $v=|\boldsymbol{v}|$，g 为重力加速度．

令 $y=0$，得

$$x_1=0,\ x_2=\frac{v^2}{g}\sin 2\theta.$$

因此，炮弹的射程为 $\frac{v^2}{g}\sin 2\theta$．

从上述讨论可以发现，在一定的发射速度下，炮弹的射程是发射角的函数．当发射角 $\theta\in\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right)$ 时，射程随发射角的增加而增加；当发射角为 $\frac{\pi}{4}$ 时，射程最大，因此 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 是发射角的最佳点；当发射角 $\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 时，射程随发射角的增加而减小(图 1-2)．

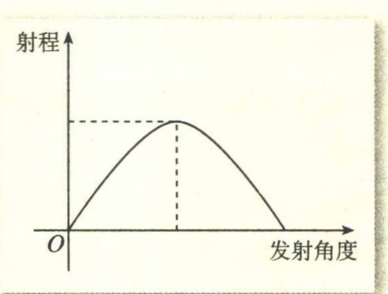


图 1-2

许多优选问题都有如上所述的情形．就是说，我们常常仅知道在试验范围内有一个最佳点，当试验范围内变化因素的取值比最佳点再大些或再小些时，试验效果都差，而且取值距离最佳点越远试验效果越差．通常称这样的试验具有单峰性．

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上只有唯一的最大值点(或最小值点) C，而在最大值点

(或最小值点)C的左侧，函数单调增加(减少)；在点C的右侧，函数单调减少(增加)，则称这个函数为区间$[a, b]$上的**单峰函数**. 例如，图 1-3 中的两个函数$f(x)$，$g(x)$就是单峰函数.

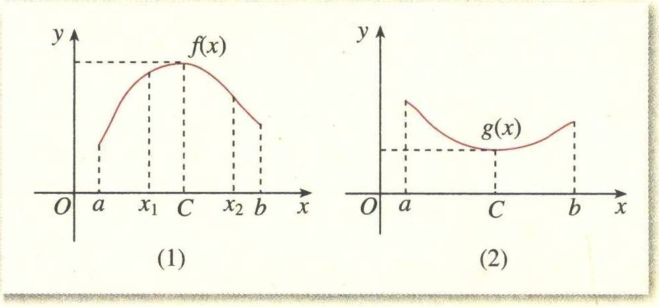


图 1-3

我们规定，区间$[a, b]$上的单调函数也是单峰函数.

由于对有最大值点和最小值点的处理方法类似，下面我们仅考虑有最大值点的单峰函数.

事实上，在炮弹发射试验中，除发射角外，初速度、空气阻力等也会影响炮弹的射程. 我们把影响试验目标的初速度、发射角、空气阻力等称为**因素**. 由于全面考虑试验中的各种因素往往非常困难，因此我们常常会假设其中的某些因素保持不变，或忽略某些影响较小的因素，而把关注点集中在感兴趣的某个因素上. 例如，上述过程中，我们只考虑发射角这个因素，而认为初速度保持不变，并忽略了空气阻力. 像这样，在一个试验过程中，只有(或主要有)一个因素在变化的问题，称为**单因素问题**. 另外，我们把试验中可以人为调控的因素(例如发射角)叫做可控因素，而把那些不能人为调控的因素(例如空气阻力)叫做不可控因素. 一般的，我们感兴趣的都是可控因素.

由上述过程可以看到，射程(目标)可以表示为发射角(因素)的函数. 像这样表示目标与因素之间对应关系的函数，称为**目标函数**. 我们常用x表示因素，$f(x)$表示目标函数(并不需要$f(x)$的真正表达式). 假定包含最佳点的因素范围(试验范围)下限用a表示，上限用b表示，因素范围可以用a到b的线段来表示，并记作$[a, b]$. 如果不考虑端点a，b，就记成(a, b).

当主要因素确定之后，接下来的任务是选择某种方法安排**试验点**(简称**试点**)，通过试验找出最佳点，使试验的结果(目标)最好.

设x_1和x_2是因素范围$[a, b]$内的任意两个试点，C点为最佳点，并把两个试点中效果较好的点称为**好点**，效果较差的点称为**差点**. 由图 1-4(1)、(2)可以直观地发现：若目标函数为单峰函数，那么最佳点与好点必在差点的同侧. 于是，我们以差点为分界点，把因素范围分成两部分，并称好点所在部分为**存优范围**.

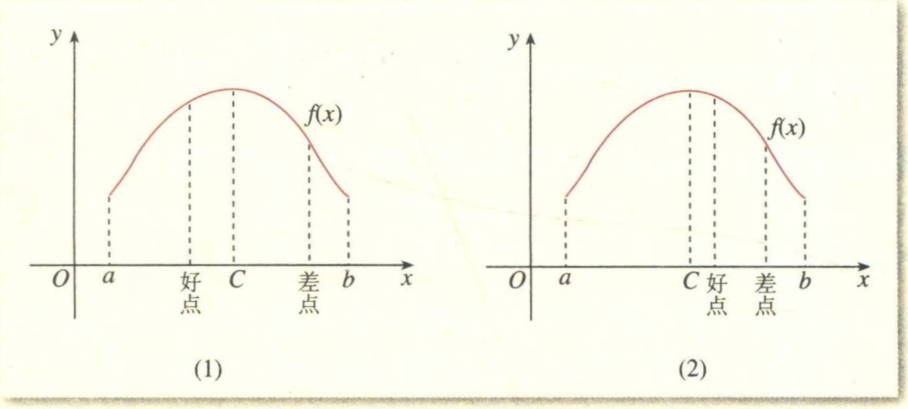


图 1-4

习题1.2

1. 判断下列函数在区间[-1，5]上哪些是单峰函数：

(1) $y=3x^2-5x+2$；

(2) $y=-x^2-3x+1$；

(3) $y=\cos x$；

(4) $y=e^x$；

(5) $y=x^3$.

2. 你在现实生活中遇到过哪些具有单峰性质的现象？举例说明.

三、黄金分割法——0.618 法

1. 黄金分割常数

探究

对于一般的单峰函数，如何安排试点才能迅速找到最佳点？

由于单峰函数最佳点与好点必在差点的同侧，因此，可按如下想法安排试点：先在因素范围[a，b]内任选两点各做一次试验，根据试验结果确定差点与好点，在差点处把[a，b]分成两段，截掉不含好点的一段，留下存优范围[a_1，b_1]，显然有[a_1，b_1]$\subseteq$[a，b]；再在[a_1，b_1]内任选两点各做一次试验，并与上次的好点比较，确定新的好点和新的差点，并在新的差点处把[a_1，b_1]分成两段，截掉不包含新好点的那段，留下新的存优范围[a_2，b_2]，同样有[a_2，b_2]$\subseteq$[a_1，b_1]……重复上述步骤，可使存优范围逐步缩小.

在这种方法中，试点的选取是任意的，只要试点在前一次留下的范围内就行了．这种任意性会给寻找最佳点的效率带来影响．例如，假设因素区间为$[0, 1]$，取两个试点$\frac{2}{10}$、$\frac{1}{10}$，那么对峰值在$\left(0, \frac{1}{10}\right)$中的单峰函数，两次试验便去掉了长度为$\frac{4}{5}$的区间（图 1-5(1)）；但对于峰值在$\left(\frac{2}{10}, 1\right)$的函数，只能去掉长度为$\frac{1}{10}$的区间（图 1-5(2)），试验效率就不理想了．

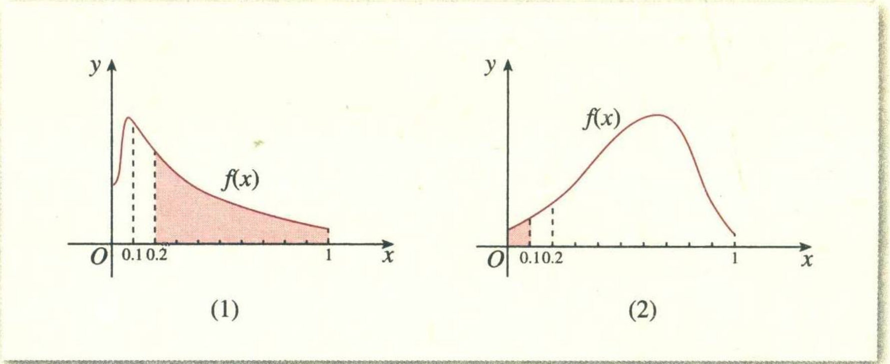


图 1-5

思考

怎样选取各个试点，可以最快地达到或接近最佳点？

我们希望能“最快”找到或接近最佳点的方法不只针对某个具体的单峰函数，而是对这类函数有普遍意义．由于在试验之前无法预先知道哪一次试验效果好，哪一次差，即这两个试点有同样的可能性作为因素范围$[a, b]$的分界点，所以为了克服盲目性和侥幸心理，在安排试点时，最好**使两个试点关于$[a, b]$的中心$\frac{a+b}{2}$对称**．同时，为了尽快找到最佳点，每次截去的区间不能太短，但是也不能很长．因为为了一次截得足够长，就要使两个试点 x_1 和 x_2 与$\frac{a+b}{2}$足够近，这样，第一次可以截去$[a, b]$的将近一半．但是按照对称原则，做第三次试验后就会发现，以后每次只能截去很小的一段，结果反而不利于很快接近最佳点．

为了使每次去掉的区间有一定的规律性，我们这样来考虑：**每次舍去的区间占舍去前的区间的比例数相同**．

下面进一步分析如何按上述两个原则确定合适的试点．如图 1-6，设第 1 试点、第 2 试点分别为 x_1 和 x_2，$x_2<x_1$ 且 x_1，x_2 关于$[a, b]$的中心对称，即 $x_2-a=b-x_1$．

显然，不论点 x_2(或点 x_1)是好点还是差点，由对称性，舍去的区间长度都等于 $b-x_1$. 不妨设 x_2 是好点，x_1 是差点，于是舍去 $(x_1, b]$. 再在存优范围 $[a, x_1]$ 内安排第 3 次试验，设试点为 x_3，x_3 与 x_2 关于 $[a, x_1]$ 的中心对称（如图 1-7 所示).

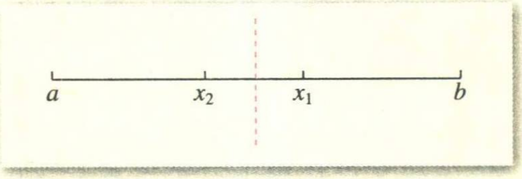


图 1-6

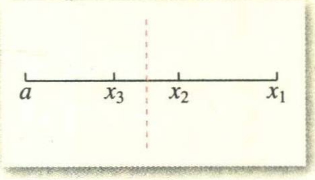


图 1-7

点 x_3 应在点 x_2 左侧. 因为如果点 x_3 在点 x_2 的右侧，那么当 x_3 是好点，x_2 是差点时，要舍去区间 $[a, x_2]$，而它的长度与上次舍去的区间 $(x_1, b]$ 的长度相同，违背成比例舍去的原则. 于是，不论点 x_3(或点 x_2)是好点还是差点，被舍去的区间长度都等于 x_1-x_2. 按成比例舍去的原则，我们有等式

$$\frac{b-x_1}{b-a}=\frac{x_1-x_2}{x_1-a}, \tag{1}$$

其中，左边是第一次舍去的比例数，右边是第二次舍去的比例数. 对式(1)变形，得

$$1-\frac{b-x_1}{b-a}=1-\frac{x_1-x_2}{x_1-a},$$

即

$$\frac{x_1-a}{b-a}=\frac{x_2-a}{x_1-a}. \tag{2}$$

式(2)两边分别是两次舍弃后的存优范围占舍弃前全区间的比例数. 设每次舍弃后的存优范围占舍弃前全区间的比例数为 t，即

$$\frac{x_1-a}{b-a}=t, \tag{3}$$

则由 $b-x_2=x_1-a$ 可得

$$\frac{x_2-a}{b-a}=1-t. \tag{4}$$

由式(2)得

$$\frac{x_1-a}{b-a}=\frac{\dfrac{x_2-a}{b-a}}{\dfrac{x_1-a}{b-a}}, \tag{5}$$

把(3)与(4)代入(5)，得

$$t=\frac{1-t}{t},$$

即

$$t^2+t-1=0.$$

解得 $t_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$t_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. 其中 t_1 为对本问题有意义的根，这就是**黄金分割常数**，用 ω 表示.

试验方法中，利用黄金分割常数 ω 确定试点的方法叫做**黄金分割法**. 由于 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 是无

理数，具体应用时，我们往往取其近似值 0.618，相应地，也把黄金分割法叫做 0.618 法.

2. 黄金分割法——0.618 法

把试点安排在黄金分割点来寻找最佳点的方法，即黄金分割法，是最常用的单因素单峰目标函数的优选法之一. 下面我们通过例子说明它的具体操作方法.

案例 炼钢时通过加入含有特定化学元素的材料，使炼出的钢满足一定的指标要求. 假设为了炼出某种特定用途的钢，每吨需要加入某元素的量在 1 000 g 到 2 000 g 之间，问如何通过试验的方法找到它的最优加入量?

最朴素的想法就是以 1 g 为间隔，从 1 001 开始一直到 1 999，把 1 000～2 000 g 间所有的可能性都做一遍试验，就一定能找到最优值. 这种方法称为均分法. 但这样要做1 000 次试验，在时间、人力和物力上都是一种浪费. 用 0.618 法，可以更快、更有效地找出最佳点. 具体操作方法如下：

用一张纸条表示 1 000～2 000 g，以 1 000 为起点标出刻度. 找出它的黄金分割点 x_1（在长度的 0.618 处）作为第 1 试点；再对折纸条，找出 x_1 的对称点 x_2 作为第 2 试点(图 1-8).

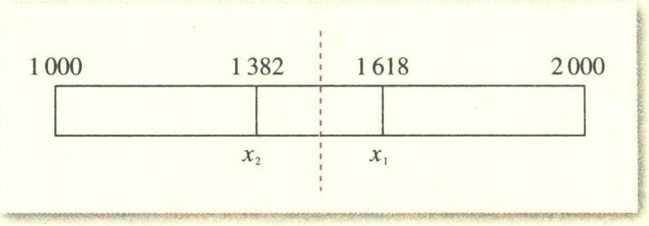


图 1-8

这两点的材料加入量是

$$x_1=1\,000+0.618\times(2\,000-1\,000)=1\,618(\text{g}),$$
$$x_2=1\,000+2\,000-x_1=1\,382(\text{g}).$$

如果称因素范围的两端分别为小头和大头，那么上述两式可表示为

$$x_1=\text{小}+0.618\times(\text{大}-\text{小}); \quad (1)$$
$$x_2=\text{小}+\text{大}-x_1. \quad (2)$$

对于式(2)，相当于是“加两头，减中间”. 类似的，在确定第 n 个试点 x_n 时，如果存优范围内相应的好点是 x_m，那么有

$$x_n=\text{小}+\text{大}-x_m. \quad (*)$$

比较两次试验结果，如果第 2 试点比第 1 试点好，则沿 1 618 处将纸条剪断，去掉1 618以上部分，保留 1 618以下部分. 将保留的纸条对折，找出第 2 试点 x_2 的对称点 x_3 作为第 3 试点(图 1-9). 按公式(*)，有

$$x_3=1\,000+1\,618-1\,382=1\,236,$$

即第 3 次的材料加入量是 1 236 g.

> 如果这两次试验结果一样，则应具体分析，看最佳点可能在哪一边，再决定取舍. 在一般情况下，可以同时划去因素范围[1 000, 1 382]和[1 618, 2 000]，仅保留中间因素范围[1 382, 1 618]. 那么这样做会不会划去最佳点呢?

如果第 2 试点仍是好点，则剪掉 1 236 以下部分，在留下部分内寻找 x_2 的对称点 x_4 作为第 4 试点(图 1-10)，按照公式(*)可得第 4 试点的材料加入量为 1 472.

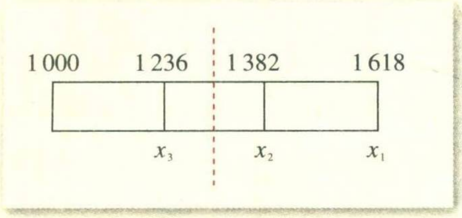


图 1-9

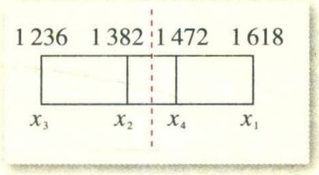


图 1-10

如果这点比第 2 点好，则剪掉 1 382 以下部分，在留下的部分内按同样的方法继续下去，就能迅速逼近该元素的最佳加入量.

对于一般的因素范围$[a, b]$，用 0.618 法确定试点的操作过程与上述过程完全一致.

从上述过程可以看到，用 0.618 法寻找最佳点时，虽然不能保证在有限次内准确找出最佳点，但随着试验次数的增加，最佳点被限定在越来越小的范围内，即存优范围会越来越小. 我们用存优范围与原始范围的比值来衡量一种试验方法的效率，这个比值叫做**精度**，即 n 次试验后的精度为

$$\delta_n=\frac{n\text{次试验后的存优范围}}{\text{原始的因素范围}}.$$

显然，在相同试验次数下，精度越高，方法越好.

用 0.618 法确定试点时，从第 2 次试验开始，每一次试验都把存优范围缩小为原来的 0.618. 因此，n 次试验后的精度为

$$\delta_n=0.618^{n-1}.$$

探究

用 0.618 法寻找最佳点时，达到精度 0.05 的要求需要多少次试验？精度 0.01 呢？精度 δ 呢？

设达到精度 0.05 的要求需要 n 次试验，那么

$$0.618^{n-1}\leqslant 0.05,$$

即

$$n\geqslant\frac{\lg 0.05}{\lg 0.618}+1\approx 7.22.$$

于是，只要安排 8 次试验，就能保证精度达到 0.05. 同理可得，安排 11 次试验，就能保证精度达到 0.01.

一般地，给定精度 δ，为了达到这个精度，所要做的试验次数 n 满足

$$0.618^{n-1}\leqslant\delta<1,$$

即

$$(n-1)\lg 0.618 \leqslant \lg \delta < 0,$$

所以

$$n \geqslant \frac{\lg \delta}{\lg 0.618} + 1.$$

黄金分割法适用目标函数为单峰的情形，第 1 个试验点确定在因素范围的 0.618 处，后续试点可以用“加两头，减中间”的方法来确定.

习题1.3

1. 二氧化锰可作为在较高温度下分解的氯酸钾的催化剂，氯酸钾分解产生氧气的速率快慢跟所加二氧化锰量有关. 一般二氧化锰与氯酸钾的质量比取 1∶10 至 1∶1. 现要在相同的温度和其他条件下，找出二氧化锰与氯酸钾比例使产生氧气速率最快，该如何安排试验，你能亲自做实验找出最优比例吗?
2. 把神舟 5 号送入太空的长征 2 号 $F(CZ-2F)$ 运载火箭是捆绑式两级大型液体运载火箭. 火箭分级是为了第一级推进剂燃烧完以后可以扔掉，这样可以减少飞行重量，提高火箭性能. 为了找出两级合理的分点，要进行大量复杂的计算. 通过模拟试验可以避免大量的计算，为了找出最优的两级比例，你能给出试点的安排方法吗?
3. 举出现实生活或学习过程中可应用 0.618 法寻找最佳点的例子.

阅读与思考

黄金分割研究简史

公元前 3 世纪，古希腊数学家欧多克索斯(Eudoxus，约公元前 400—前 347)在深入研究比例理论时，提出了分线段的“中末比”问题：将一线段 AB 分为两线段 AM，MB，使得其中较长的一段 AM 是全长 AB 与另一段 MB 的比例中项(图 1)，即

$$AB : AM = AM : MB.$$

为简单起见，令 $AB=1$，$AM=\omega$，则有

$$1 : \omega = \omega : (1-\omega),$$

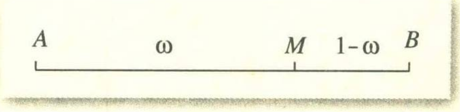


图 1

即

$$\omega^2+\omega-1=0. \tag{1}$$

解方程，得

$$\omega=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

根据问题的实际意义，取 $\omega=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618\ 033\ 988\ 749\ 89\cdots$，这就是黄金分割常数.

中世纪以后，“中末比”被披上神秘的外衣，意大利数学家帕乔利(Luca Pacioli，约1445—1417)称之为“神圣比例”. 17 世纪欧洲著名的天文学家开普勒称之为神圣分割，并说“勾股定理和中末比是几何中的双宝，前者好比黄金，后者堪称珠宝”. 他用黄金来形容勾股定理而不是中末比. 黄金分割的名称是很晚才出现的. 最早正式使用“黄金分割”这个名词的是欧姆(Martin Ohm，1792—1892)，他是以发现电学上欧姆定律著称的 G. S. 欧姆的弟弟. 19 世纪以后，黄金分割之名逐渐通行起来.

对黄金分割的研究最早见于公元前 500 多年的毕达哥拉斯学派. 大约在公元前 530 年，古希腊著名数学家毕达哥拉斯在意大利南部的克洛吞(Crotona)建立了讨论宗教、科学和哲学问题的毕达哥拉斯学派. 该学派在分析正五边形性质时发现了黄金分割作图法：五边形对角线的交点恰好是对角线上的黄金分割点(如图 2 所示，正五边形的对角线恰好构成了一个正五角星). 如果用 d 表示对角线长，s 表示边长，可以推出公式 $d(d-s)=s^2$，这是表示黄金分割关系的公式，类似于式(1).

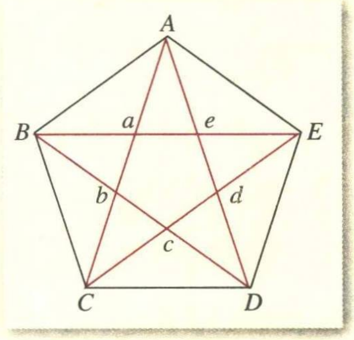


图 2

关于黄金分割有种种传说. 例如古希腊和欧洲的建筑师应用黄金分割使建筑优美协调；古希腊的智慧女神雅典娜和太阳神阿波罗塑像用黄金分割比设计身段而显得很美；以黄金分割所得的两线段作边的矩形，比其他矩形美观；等等.

对黄金分割这一古老的数学问题，过去人们只是从趣味或艺术上研究它. 黄金分割的实际应用，最著名的例子就是优选学中的黄金分割法或 0.618 法.

四、分数法

1. 分数法

案例 1 在配置某种清洗液时，需要加入某种材料. 经验表明，加入量大于 130 ml 肯定不好. 用 150 ml 的锥形量杯计量加入量，该量杯的量程分为 15 格，每格代表10 ml. 用试验法找出这种材料的最优加入量.

思考

这个问题能否用 0.618 法？如果不能，该如何安排试验？