高等几何简明教程

GAO DENG JI HE JIAN MING JIAO CHENG

周国新　李冠堂　主编

辽宁教育出版社

高等几何简明教程

周国新　李冠堂　主编

辽宁教育出版社

1988年·沈阳

内 容 提 要

本教程依国家教委会颁发的中学教师《专业合格证书》考试大纲，由全国部分省市教育学院协编。

本教程共十章，一至三章用综合法叙述基本概念、叠置射影和二次曲线；四至六章用解析法叙述射影几何、坐标系、坐标变换和二次曲线的方程；七至九章叙述二次曲线的仿射理论、度量理论、射影群以及二次曲线的分类；十章叙述几何基础初步，习题解答附后。

本教程可作为师范院校和教育学院的试用教材或教学参考书，也可作为中学数学教师的自学读本。

高等几何简明教程

周国新　李冠堂　主编

辽宁教育出版社出版　沈阳市政二公司印刷厂印刷
（沈阳市南京街6段1里2号）

字数：323,000　开本：850×1168 1/32　印张：14
印数：1—5,000
1988年10月第1版　1988年10月第1次印刷

责任编辑：陈贵田　责任校对：杨　力
封面设计：安今生　绘　图：潘志倩 夏兰兰

ISBN 7-5382-0328-1/G·267
定　价：4.20元

前　言

高等几何学是研究图形在射影变换下不变性质的学科，是走向高深数学宫殿的主要台阶，是指导中学几何的有力工具。运用射影观点，可以更深刻、更全面地认识欧氏几何，沟通它与非欧几何的关联，从而使各个几何分支形成一个完整统一的科学体系。

在一段长时间的沉寂之后，近几年来，风格各异、深度不同的高等几何教材宛如雨后春笋，层见叠出。尤其是相继召开的高等几何学术研究会和教学讨论会，更是锦上添花，对本门学科的复兴与繁荣起了很大的作用。在此喜人形势下，本教程的几位编者，尽管地处南北，天各一方，却也满怀激情地愿为这似锦的“花坛”奉献一束小花。

本教程根据国家教委会颁发的中学数学教师《专业合格证书》考试《高等几何》教学大纲编著而成。

《高等几何简明教程》编写组

主　编：周国新　李冠堂

编　委：李玉兰　李敏君　孙贺琦

王洪绪　祝　贺　黄志毅

本教程取材力求精练，主干突出，深入浅出，简明易懂。例题和习题浅近、丰富而有代表性。在论述射影几何的基本理论时，把综合法与解析法分隔开来，使之自成体系又互相补充，以起难点分散，产生循环复习的效果。这是本教程的一大

特点。带星号小节的内容可作参考。

辽宁省数学学会秘书长、辽宁大学数学系副主任崔玉衡先生审阅了初稿；沈阳市第二市政建设工程公司印刷厂全体职工，在程彦厂长带领下，脚踏实地、同心协力、卓有成效地完成本教程的印装工作，谨此致谢。

因为编者水平有限，错漏之处在所难免，欢迎读者指正。

编 者

1987年7月

目　录

第一章 基本概念

§1 无穷远元素

在中学所学的欧几里得几何中，直线和平面都可以无限延伸。但是在具体问题中，只是利用其中的有限部分，并没有真的延伸到无穷远处。如果一个问题涉及到无穷远，那么欧氏平面就不够用，就必须将它扩充，增加无穷远元素。

例如，任取一条直线 q 和不在 q 上的一点 A，过 A 作一条直线 p 交 q 于点 P(图 1-1-1)。当 p 绕 A 逆时针方向旋转时，P 沿 q 向箭头所指的方向运动。当 p 转到 AB 位置，即 $p/\!/q$ 时，交点 P 就不再存在了。然而，一旦 p 越过 AB 位置，P 又在 q 的另一端重新出现，并且沿着箭头所指的方向运动，描出 q 的剩余部分。这样，虽然 p 绕 A 的运动是连续的，但 P 沿 q 的运动却不是连续的。这就暴露了欧氏平面的缺陷。如果我们在直线 q 上增加一个点，使 AB 与 q 交于这个点，那么当 p 绕 A 连续运动时，P 也沿 q 连续运动，这样就弥补了这个缺陷，并且在直线 p 的每个位置和 q 上点 P 的每个位置之间建立了一一对

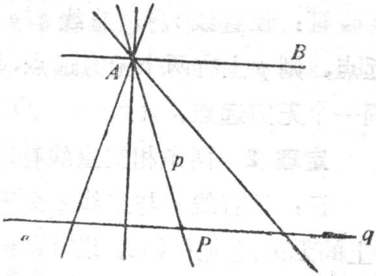


图 1-1-1

应关系。

定义 1 在欧氏直线 r（即普通直线）上添加一个点，称为无穷远点，记作R_∞，使得

（1）每条直线上只有一个无穷远点；

（2）两条平行线交于一个无穷远点；

（3）两个不同点（普通点或无穷远点）确定唯一一条直线；

（4）两条不同直线（普通直线或由两个无穷远点确定的直线）确定唯一一点。

添加了无穷远点R_∞的普通直线 r 称为扩大直线，记作 (r, R_∞)。

定理 1 一组平行线有一个公共的无穷远点。

证：设直线 $r/\!/p$，直线 $q/\!/p$，若 r,q 与 p 交于不同的无穷远点，则 p 上有两个无穷远点，与定义 1 不符，所以 p,q,r 交于同一个无穷远点。

定理 2 两条相交直线有不同的无穷远点。

证：设直线 p 与直线 q 交于点 A，p 上的无穷远点为P_∞，q 上的无穷远点为 Q_∞，若 $P_\infty=Q_\infty$，则p 与q 有两个交点，与定义 1 不符，所以 $P_\infty \neq Q_\infty$。

定理 3 全体无穷远点组成一条直线。

证：设P_∞，Q_∞ 是两个不同的无穷远点，它们确定一条直线 l_∞。由定义 1，l_∞不可能是扩大直线，因而 l_∞ 上没有普通点，即 l_∞上的全部点都是无穷远点。设 T_∞是任意一无穷远点，T 是任意一普通点，T, T_∞确定一条直线 t，则 t 与 l_∞的交点必为 T_∞。否则 t 上将有两个无穷远点，与定义1不符，所以 T_∞在 l_∞上。

定义 2 由无穷远点组成的直线 l_∞称为无穷远直线，添加

了无穷远直线的欧氏平面称为扩大平面。

定义 3 任意点，不管是普通点还是无穷远点，统称为射影点；任意直线，不管是扩大直线还是无穷远直线，统称为射影直线。由射影点和射影直线构成的平面称为射影平面。

在射影平面上不再区分普通点和无穷远点，扩大直线和无穷远直线。在不存在混淆的可能性时，我们就把射影点和射影直线简称为点和直线。

习 题 1—1

1. 为什么在普通直线上只增加一个无穷远点，而不是增加$+\infty$, $-\infty$两个无穷远点？

2. 设四边形$AECD$是扩大平面上的平行四边形，且四顶点为普通点，AB上的无穷远点和AD上的无穷远点依次为P_∞和P'_∞。若两条对角线的交点为O，以O为投影中心，求

（1）A, B, P_∞在AD上的投影；

（2）P'_∞在AB上的投影。

3. 若射影平面上的一个三角形

（1）有一个顶点是无穷远点；

（2）有一条边在无穷远直线上，

那么这个三角形在欧氏平面上是个什么图形？

4. 若射影平面上的一个四边形

（1）有一对对边交点是无穷远点；

（2）两对对边交点都是无穷远点；

（3）一条对角线是无穷远直线，

那么这个四边形在欧氏平面上是个什么图形？

§2 对偶原则

射影平面比欧氏平面有一个很大的进步，就是在射影平面上存在对偶原则。

射影平面的对偶原则就是：对于射影平面上的每一个命题，只要把其中的“点”和“直线”对调，并在符号和说法上作相应的改变，就可以得到另一个命题。这样的两个命题称为对偶命题。两个对偶命题同时成立或不成立。

〔例1〕 下列各对命题都是对偶命题：

（1）两个不同点确定一条直线；

（1′）两条不同直线确定一个点。

（2）无三点共线的四个点有六条连线；

（2′）无三线共点的四条直线有六个交点。

（3）若两个三点组 A,D,C；B,E,C 分别共线，则存在点 F，使得 A,B,F；D,E,F 分别共线；

（3′）若两个三线组 a,d,c；b,e,c 分别共点，则存在直线 f，使得 a,b,f；d,e,f 分别共点。

射影几何中的命题仅涉及点的连线和直线的交点，不涉及度量问题。欧氏几何中有关度量的命题不属于射影几何范围，它们没有对偶命题。例如，“平行四边形的对角线互相平分”，“内接于半圆的角是直角”等命题就没有对偶命题。

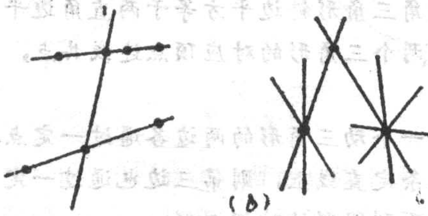
除了对偶命题外，还有对偶图形。

〔例2〕 下列各对图形是对偶图形（图1-2-1）。

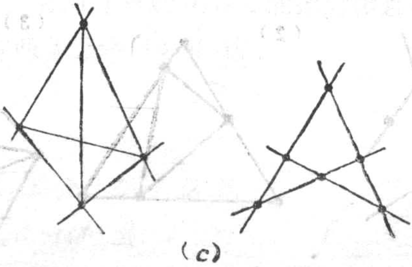
若一个图形和它的对偶图形相同，则这个图形称为自对偶图形。例如，三角形就是自对偶图形。

为了更简洁地叙述对偶命题和对偶图形，我们用 AB 表示

(a)



(b)



(c)

图 1-2-1

A, B 两点所确定的直线，用 ab 表 a, b 两条直线所确定的点；用 $ab \times cd$ 表 ab 和 cd 两点所确定的直线，用 $AB \times CD$ 表 AB 和 CD 两直线所确定的点。直线 b 通过点 A，我们就说 b 在 A 上，用 $b \cdot A$ 或 $A \cdot b$ 表示。

由于两个对偶命题同为真伪，只要证明了其中一个，另一个自然成立，所以对已证命题的对偶命题一般不再给予证明而

直接引用.

习 题 1—2

1. 下列命题哪些属于射影几何？哪些不属于射影几何？写出射影几何中的命题的对偶命题：

（1）不共线三点确定三条直线。

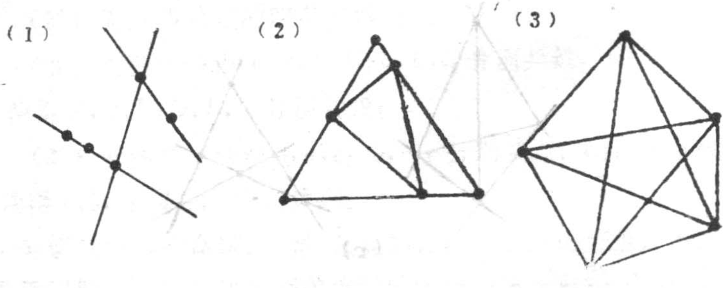
（2）三角形面积等于底乘高的一半。

（3）直角三角形斜边平方等于两直角边平方和。

（4）若两个三角形的对应顶点连线共点，则对应边交点共线。

（5）若一个动三角形的两边各通过一定点，三个顶点分别在共点的三条定直线上，则第三边也通过一定点。

2. 作出下列图形的对偶图形：



（第 2 题）

§3 分 隔

在普通直线上，一个点沿着一个方向运动，不可能回到原来的位置．可是在射影直线上，一个点沿着一个方向运动，却能回到原来的位置，因此射影直线是封闭的．我们可用圆或椭

圆作为射影直线的模型（图1-3-1(a)），而用去掉一个点的圆或椭圆作为普通直线的模型（图1-3-1(b)）.

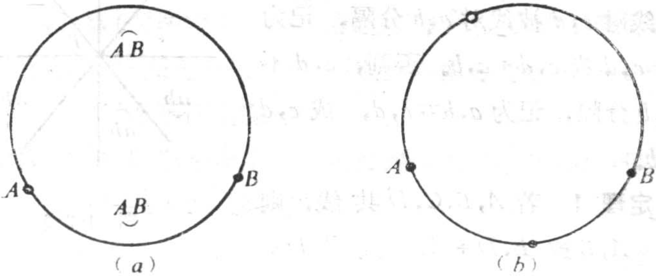


图 1-3-1

从图 1-3-1(b) 可以看出，普通直线上任一点 A 可以把这条直线分为两段.从点 A 只有一条路通向另一点 B .从图1-3-1(a) 可以看出，必须有两点 A,B 才能把射影直线分为两段. 从 A 到 B 可以有两条通路 $\widehat{AB}$ 和 $\underset{\smile}{AB}$.

定义 1 设 A,B,C,D 是射影直线 p 上四个点，若 C,D 分别位于 $\widehat{AB}$ 和 $\underset{\smile}{AB}$ 上，则说点对 C,D 被点对 A,B 分隔(图1-3-2)，记为 $A,B\div C,D$ 或 $C,D\div A,B$.

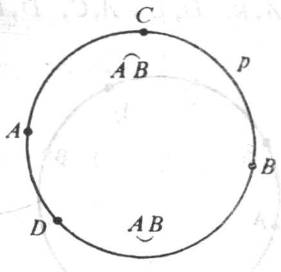


图 1-3-2

显然，若 A,B 分隔 C,D,则 C,D 分隔 A,B.

若 C,D 同在 $\widehat{AB}$ 或 $\underset{\smile}{AB}$ 上，则 C,D 不被 A,B 分隔，记为 $A,B \mathbin{\underset{..}{-}} C,D$ 或 $C,D \mathbin{\underset{..}{-}} A,B$.

直线 p 与其上四点 A,B,C,D 的对偶图形是点 P 与其上四条直线 a,b,c,d（图1-3-3）. 我们分别用 $\widehat{ab}$ 和 $\underset{\smile}{ab}$ 来表示由线

对 a,b 分隔平面所形成的两部分。

定义 1′ 设 a,b,c,d 是点 P 上的四条直线，若 c,d 分别在 $\overset{\frown}{ab}$ 和 $\underset{\smile}{ab}$ 上，则说线对 c,d 被线对 a,b 分隔，记为 $a,b \div c,d$ 或 $c,d \div a,b$。否则，c,d 不被 a,b 分隔，记为 $a,b \not\div c,d$，或 $c,d \not\div a,b$。

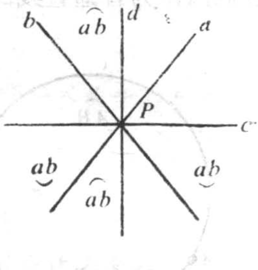


图 1-3-3

定理 1 若 A,B,C,D 共线，则 $C,D \div A,B$ 或 $B,D \div A,C$ 或 $A,D \div B,C$，三者有且仅有一个成立。

证：在射影直线上，共线四点有六种排列：

$ABCD$，$ABDC$，$ACBD$，$ACDB$，$ADBC$，$ADCB$。

（1）若 $ABCD$ 或 $ADCB$，则 $B,D \div A,C$；

（2）若 $ABDC$ 或 $ACDB$，则 $A,D \div B,C$；

（3）若 $ACBD$ 或 $ADBC$，则 $A,B \div C,D$。

定理 2 若 A,B,C,D,E 五点共线，且 $C,D \div A,B$，则 $D,E \div A,B$，$D,E \div A,C$，$D,E \div B,C$ 中至多有两个成立。

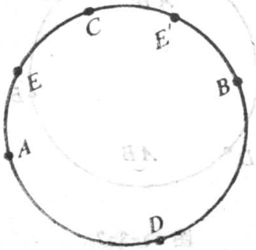


图 1-3-4

证：由 $C,D \div A,B$，可知直线分 $\overset{\frown}{ACB}$ 和 $\overset{\frown}{ADB}$ 两段，若 $D,E \div A,B$ 成立，则 E 点在 $\overset{\frown}{ACB}$ 上（图 1-3-4）；若 $D,E \div A,C$ 成立，则 E 点在 $\overset{\frown}{AC}$ 上而不在 $\overset{\frown}{ADBC}$ 上；B若 $D,E \div B,C$ 成立，则 E 点在 $\overset{\frown}{BC}$ 上而不在 $\overset{\frown}{BDAC}$ 上，三者矛盾。因此三者不能同时成立。

定理 3 若 A,B,C,D,E 五点共线，且 $C,D \div A,B$，$B,E \div A,C$，则 $D,E \div A,B$。

证：如图1-3-4，由$C,D \div A,B$，$B,E \div A,C$，可知E点在$\widehat{AC}$上而不在$\widehat{ADBC}$上，故有$D,E \div A,B$。

我们知道，在欧氏平面上两条相交直线可以把平面分为4部分，三条直线（两两相交而不共点）可以把平面分为7部分，n条直线（两两相交而无三条共点）可以把平面分为$\frac{1}{2}(n^2+n+2)$部分，那么在射影平面上呢？

定理 4 在射影平面上，n条直线（无三条共点）可以把平面分为$\frac{1}{2}(n^2-n+2)$部分。

证：在射影平面上，两条直线可以把平面分为两部分。加上第三条直线，它与前两条直线各有一个交点，这两个交点把第三条直线分为两部分。每一部分又把所在的平面部分分成两部分。这样三条直线共把平面分成四部分。再加上第四条直线，它被与前三条直线的交点分为三部分。每一线段把所在平面部分分为两部分。这样四条直线把平面分为七部分。即

两条直线把平面分成2部分，

三条直线把平面分成$2+2$部分，

四条直线把平面分成$2+2+3$部分，

五条直线把平面分成$2+2+3+4$部分，

……，

n条直线把平面分成$2+2+3+4+\cdots+(n-1)$

$$=\frac{(n-1)n}{2}+1=\frac{1}{2}(n^2-n+2)\text{部分。}$$

习 题 1—3

1. 设A,B,C,D,E是共线五点，且$A,B \div C,D$，$A,B \div D,E$，则$A,B \div C,E$。

2. 写出定理1,2,3的对偶定理，并证明。