大学应用型课程专业（精品）系列教材　喻世友◎主编

大学应用型课程专业（精品）系列教材·数学类　廖俊平◎主编

经济应用数学

孙明岩　主编 / 陈放　张志敏　副主编

中山大學出版社

SUN YAT-SEN UNIVERSITY PRESS

大学应用型课程专业（精品）系列教材　喻世友◎主编

大学应用型课程专业（精品）系列教材·数学类　廖俊平◎主编

经济应用数学

孙明岩　主编 / 陈放　张志敏　副主编

中山大學出版社
SUN YAT-SEN UNIVERSITY PRESS
·广州·

图书在版编目（CIP）数据

经济应用数学/孙明岩主编；陈放，张志敏副主编．—广州：中山大学出版社，2015.9

[大学应用型课程专业（精品）系列教材/喻世友主编；大学应用型课程专业（精品）系列教材·数学类/廖俊平主编]

ISBN 978-7-306-05405-0

Ⅰ.①经… Ⅱ.①孙… ②陈… ③张… Ⅲ.①经济数学—高等学校—教材 Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 198934 号

出 版 人：徐 劲
责任编辑：张礼凤 黄浩佳
封面设计：曾 斌
责任校对：赵丽华
责任技编：何雅涛
出版发行：中山大学出版社
电 话：编辑部 020—84111996，84113349，84111997，84110779
发行部 020—84111998，84111981，84111160
地 址：广州市新港西路 135 号
邮 编：510275 传 真：020—84036565
网 址：http://www.zsup.com.cn E-mail:zdcbs@mail.sysu.edu.cn
印 刷 者：佛山市浩文彩色印刷有限公司
规 格：787mm×1092mm 1/16 16 印张 370 千字
版次印次：2015 年 9 月 1 版 2015 年 9 月第 1 次印刷
定 价：38.00 元

前　　言

本书以经典微积分和线性代数为主体内容，是目前经济学、管理学、会计学等专业的重要专业基础课程，并逐步成为这些专业课程体系中的主干．微积分的基础是函数与极限，根据其对象是一元函数和多元函数，我们再将其分为一元微积分和多元微积分．线性代数的基础是行列式和矩阵，主要的目的是求解线性方程组．

在社会科学中，数学的首要应用领域无疑是经济学．马克思认为，一门学科成熟与否的标志就是看其对数学的应用程度．经济学在上世纪飞速发展，其数学工具、模型的应用越来越广泛和深入，这是不可置疑的进步．随着中国加入 WTO，以及经济全球化进程加快和知识经济时代的到来，培养经济学、管理学与数学相结合的复合型人才成为一种大趋势．

为方便读者更好地掌握本书的内容，本教材精选了课后习题，并在书后列出了习题的详细解答．这也是本教材与同类教材的区别之处．

本书由孙明岩主编，陈放、张志敏、高卓参与编写．在本书的编著过程中，扶先辉、杨建平、于丹、李冰玉提出了宝贵意见．由于编者水平有限，本教材难免存在不足之处，恳请各位读者提出指正．

孙明岩于南芳湖
2015 年 6 月 18 日

目　　录

第一章　函数极限与连续

数学是科学的皇后，音乐能激发或抚慰情怀，绘画使人赏心悦目，诗歌能动人心弦，哲学使人获得智慧，科学可改善物质生活，但数学能给予以上的一切.

——克莱因

大千世界中的一切都在运动着、变化着，从汽车的行驶到星转月移，从世界人口的不断变化到股市的涨跌，从国民经济的增长到商品价格的变化，等等. 这些变化的量都有一个共同的特点：就是它们的变化受到其他一些变化量的制约或者与其他一些变化的量相互制约. 这种制约关系在数学上表现为函数，函数是我们定性、定量地研究各种变化量的一个重要工具. 而人们研究事物变化的趋势，从有限到无限，从近似到精确、从量变到质变，这些都需要极限的知识. 极限是微积分研究的核心问题，我们即将经历神奇的极限之旅.

第一节　函　　数

一、函数的几种特性

中学阶段我们学习的函数知识是微积分学习的基础，其中一些特性在微积分的学习中用到的比较多.

（一）函数的有界性

定义 1　设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果存在一个正数 M，对于所有的 $x \in D$，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是有界的；如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 D 上是无界的.

几何意义：当自变量 x 在集合 D 上变化时，曲线 $y = f(x)$ 被限制在 $y = -M$ 和 $y = M$ 两条直线之间.

例如：$y = \sin x$，对于定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内任意 x，都有 $|\sin x| \leqslant 1$，所以函数 $y = \sin x$ 是有界函数.

（二）函数的奇偶性

定义 2　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对任意的 $x \in D$，恒有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任意的 $x \in D$，恒有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称. 掌握函数奇偶性的特点后是否就能轻易解决相关的问题呢？答案是 *no*！数学问题的解决经常要用到恒等变换：将一个问题转换为另一种等价的形式. 很多问题在山穷水尽时通过恒等变换可以使它变得柳

暗花明.

【例 1】 判断函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性.

解 $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})$ （山穷水尽）

$$=\ln(\frac{-x+\sqrt{1+x^2}}{1})=\ln\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

（恒等变换，分子有理化）

$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x).$$ （柳暗花明）

由定义 2 知 $f(x)$ 为奇函数.

在这个例题中我们很容易做到第一步，往往会卡在第二步，做不下去了. 这时，可以考虑恒等变换方法. 恒等变换的常用方法是：分子或分母有理化；加 1 或减 1 等. 在以后的学习中，我们会陆续介绍.

（三）函数的单调性

定义 3 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果对于 (a,b) 内任意点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加，此时称区间 (a,b) 为单调增区间；如果当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是单调减少的，此时称区间 (a,b) 为单调减区间.

单调增加的函数图像沿 x 轴正向逐渐上升；设 x 是学习微积分的时间，y 是对微积分的理解程度，我们构造一个函数 $y=f(x)$. 刚开始接触微积分时你学习的时间 x 越长，对微积分的理解程度 y 就越高. 函数 $y=f(x)$ 就是单调增加函数，简称单调增函数. 单调增函数与单调减函数统称为单调函数，对应的区间也统称为单调区间.

【例 2】 证明函数 $y=\frac{x}{1+x}$ 在 $(-1,+\infty)$ 内是单调增函数.

证明 在 $(-1,\infty)$ 内任取两点 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1+x_1}-\frac{x_2}{1+x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1+x_1)(1+x_2)}.$$

因为 x_1,x_2 是 $(-1,\infty)$ 内的任意两点，所以 $1+x_1>0, 1+x_2>0$.

又因为 $x_1-x_2<0$，故 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $f(x)=\frac{x}{1+x}$ 在 $(-1,+\infty)$ 内是单调增函数.

（四）函数的周期性

定义 4 对于函数 $y=f(x)$，如果存在正数 a，使 $f(x+a)=f(x)$ 成立，则称此函数为周期函数. 周期函数的本质是自变量 x 对应的函数值 $f(x)$ 与自变量为 $x+a$ 时对应的函数值 $f(x+a)$ 相等. a 就是 $f(x)$ 的一个周期. 满足这个等式的最小正数 a 称为函数的最小正周期.

例如，$y=\sin x$ 以 2π 为周期，即 $\sin x=\sin(x+2\pi)$.

【例 3】 设函数 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数，试求函数 $f(ax+b)$ 的周期，其中 a，b 为常数，且 $a>0$.

解　因为函数 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数，则有：$f(x+T)=f(x)$

容易想到　　$f[(ax+b)+T]=f(ax+b)$，　　（将 $ax+b$ 看成一个变元）

$f(ax+b+T)=f(ax+T+b)=f\left[a\left(x+\dfrac{T}{a}\right)+b\right]=f(ax+b)$，　（恒等变换）

函数 $f(ax+b)$ 自变量为 x 的函数值与自变量为 $\left(x+\dfrac{T}{a}\right)$ 时的函数值相等.

故按周期函数的定义，$f(ax+b)$ 的周期为 $\dfrac{T}{a}$.

上面这个例子有什么用呢？已知 $y=\sin x$ 以 2π 为周期，根据例3的结论，$y=\sin(3x+1)$ 的周期为 $\dfrac{2\pi}{3}$.

二、反函数

定义 5　设 $y=f(x)$ 是 x 的函数，其值域为 D，如果对于 D 中的每一个 y 值，都有一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 x 值与之对应，则得到一个定义在 D 上的以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，我们称它为 $y=f(x)$ 的反函数，记 $x=f^{-1}(y)$. 习惯上，用 y 表示函数，x 表示自变量，通常将 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$.

由反函数的定义，可得到求反函数的方法：

1. 由 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$；
2. 交换字母 x 和 y，将 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$.

【例 4】　求 $y=3x-2$ 的反函数.

解　由 $y=3x-2$ 得到 $x=\dfrac{y+2}{3}$，然后交换 x 和 y，得到 $y=\dfrac{x+2}{3}$，则 $y=\dfrac{x+2}{3}$ 是 $y=3x-2$ 的反函数.

如果一个函数有反函数，那么它们的图像关于 $y=x$ 对称.

三、复合函数与初等函数

（一）复合函数

定义 6　设函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=\varphi(x)$，如果 $u=\varphi(x)$ 的值域或其部分包含在 $y=f(u)$ 的定义域中，则 y 通过中间变量 u 构成 x 的函数 $y=f[\varphi(x)]$，称为 x 的复合函数.

微积分的学习，要求我们掌握好复合函数的复合与分解.

【例 5】　已知 $y=\arcsin u$，$u=e^{v}$，$v=-\sqrt{x}$，将 y 表示成 x 的函数.

解　将 $v=-\sqrt{x}$ 代入 $u=e^{v}$，可得 $u=e^{-\sqrt{x}}$，再将 $u=e^{-\sqrt{x}}$ 代入 $y=\arcsin u$ 得 $y=\arcsin e^{-\sqrt{x}}$.

【例 6】　指出下列复合函数是由哪些简单函数复合而成的.

(1) $y=(1+x)^{20}$；

(2) $y=(\arcsin\sqrt{1-x^2})^2$.

解　(1) 设 $u=1+x$，则 $y=(1+x)^{20}$ 由 $y=u^{20}$，$u=1+x$ 复合而成.

(2) 设 $u=\arcsin\sqrt{1-x^2}$,则 $y=u^2$;设 $v=\sqrt{1-x^2}$,则 $u=\arcsin v$;再设 $z=1-x^2$,则 $v=\sqrt{z}$.

所以,$y=(\arcsin\sqrt{1-x^2})^2$ 是由 $y=u^2,u=\arcsin v,v=\sqrt{z},z=1-x^2$ 四个函数复合而成的.

复合函数的分解在将来导数和积分的学习中会用到,要熟练掌握.

(二) 初等函数

基本初等函数是下面五类常用的函数:幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

定义 7 基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合而成的函数叫做初等函数.

一般来说,初等函数都可以用一个解析式来表示. 之所以要了解初等函数,是因为初等函数的连续性在极限的运算中会给我们带来极大便利,函数的连续性是本章学习的重要知识之一.

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$; (2) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$; (3) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$.

2. 下列函数中哪些是偶函数,哪些是奇函数,哪些既非奇函数又非偶函数?

(1) $y=\tan x-\sec x+1$; (2) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$;

(3) $y=|x\cos x|e^{\cos x}$; (4) $y=x(x-2)(x+2)$.

3. 下列函数中哪些是周期函数?并指出其周期.

(1) $y=\cos(x-1)$; (2) $y=x\tan x$; (3) $y=\sin^2 x$.

4. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$; (2) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

5. 设 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$,求 $f[f(x)]$.

6. 已知 $f[\varphi(x)]=1+\cos x,\varphi(x)=\sin\dfrac{x}{2}$,求 $f(x)$.

第二节 极限的概念

在经济学中,复利计息是一个重要的问题. 所谓复利计息问题,就是将前一期的利息与本金之和作为后一期的本金,然后反复计息. 设本金为 P,年利率为 r,一年后的本利和为 s_1,则 $s_1=p+pr=p(1+r)$,将 s_1 作为本金存入,第二年末的本利和为

$$s_2=s_1+s_1r=s_1(1+r)=p(1+r)^2,$$

再把 s_2 存入，如此反复，第 n 年末的本利和为 $s_n = p(1+r)^n$，这就是以年为计息期的复利公式.

若将一年均分为 t 期计息，这样每期利率可以认为是 $\frac{r}{t}$，于是 n 年的本利和为

$$s_n = p\left(1+\frac{r}{t}\right)^m, m = nt.$$

假设计息期无限缩短，则期数无限增大，这涉及有限到无限的问题，如何解决呢?这就需要用到函数的极限知识. 极限将微积分与其他数学分支区分开来，**微积分的本质就是研究极限.**

极限的基本问题是：当 x 接近某个常数 c 时，函数 $f(x)$ 会发生什么变化?

在一个时间区间内，可以利用公式"速度等于位移除以时间"来得到这段时间内的平均速度，即：平均速度 $=\frac{\text{位移}}{\text{时间}}$.

并且无论区间大小，都不能知道这个区间上速度是否保持恒定，平均速度我们可以理解为物体在这段时间内速度的平均值. 那么，物体在某一时间点的速度是多少呢，也就是说，物体的瞬时速度是多少呢?要给出"瞬时"速度，需要引入很小区间内平均速度极限的概念.

我们可以通过公式来求规则图形的面积，如矩形的面积、三角形的面积、梯形的面积等. 但曲边图形(非直线边图形)的面积如何求呢?例如，圆的面积，当然你会说圆的面积是 πr^2 呗. 好吧，那一片树叶的面积如何求呢?方法是将树叶切割成一个个的小矩形，然后把这些小矩形的面积加起来，然后取一个极限. 这些内容我们将在定积分的学习中更详细介绍. 不过，我们要有这样的印象，极限在微积分中占有极其重要的位置.

考虑函数 $y = f(x), a \leqslant x \leqslant b$，如果函数是一条曲线，如何去求曲线的长度呢?

如图 1－1 所示，将曲线分割成若干段小曲线，每一段小曲线用直线段来近似，如果把这些直线段都相加求和，就得到曲线的近似长度. 实际上，曲线的长度就是当直线段的数量增加到无穷大时，所有直线线段和的极限.

还有很多其他与极限有关的情况，我们将在下面逐一介绍.

考虑下面的函数：$f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$.

函数在 $x = 1$ 处没有定义. 但是，当 x 趋于 1，函数会如何变化呢?更确切地说，当 x 趋于 1 时，函数的值会趋向什么?

如图 1－2 所示，当 x 趋于 1 时，函数的值会趋向 3. 用数学符号可表示为 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1} = 3$，可理解为：当 x 趋于 1 时，函数 $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ 的极限是 3. 利用因式分解，可以更好地说明：

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to1}(x^2+x+1) = 1^2+1+1 = 3. \tag{1}$$

只要 $x \neq 1$ 就有 $\frac{x-1}{x-1} = 1$，这证明了(1)式中第二步到第三步是合理的，更精确的理

由以后再讲.

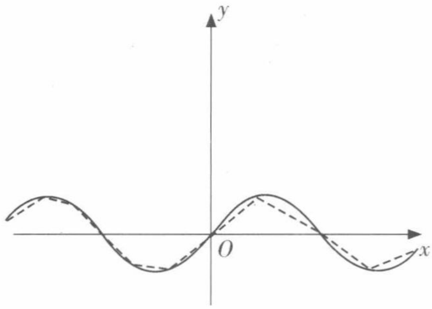

图 1－1　曲线长度的近似计算

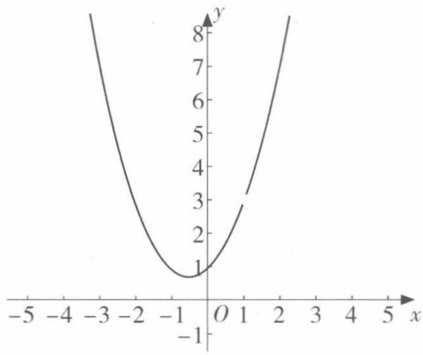

图 1－2　函数值的变化

定义 1　极限的直观意义

当 x 趋于 c 但不等于 c 时，$f(x)$ 无限接近 L，称 L 为 $f(x)$ 当 x 趋于 c 时的极限，记作：$\lim\limits_{x\to c}f(x)=L$.

注意：这里并不要求考虑函数 $f(x)$ 在 $x=c$ 点怎样，函数 $f(x)$ 甚至不需要在 c 处有定义. 下面这个例子会加深我们对极限运算的认识：

【例 1】　求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$.

解　$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-2}$　（分子恒等变换）

$=\lim\limits_{x\to 2}(x-1)=1.$

显然，在这个例子里不能直接把 $x=2$ 代入函数. 因为分母 $(x-2)$ 在 $x=2$ 时为零，不能直接代入，于是就要想办法去掉这个“捣乱分子”. 这是求函数极限常用的一种方法.

单侧极限：之前的定义中有 $x\to c$，那么 x 到底在 c 的哪一侧向 c 趋近呢?很自然的要引入单侧极限. 符号 $x\to c^+$ 表示 x 从 c 的右侧趋向于 c，而符号 $x\to c^-$ 表示 x 从 c 的左侧趋向于 c.

定义 2　左极限和右极限

当 x 从 c 的右侧趋向于 c 时，函数 $f(x)$ 无限接近 L，称为 $f(x)$ 在 c 处的右极限存在，记作：$\lim\limits_{x\to c^+}f(x)=L$. 类似地，当 x 从 c 的左侧趋向于 c 时，函数 $f(x)$ 无限接近 L，称为 $f(x)$ 在 c 处的左极限存在，记作：$\lim\limits_{x\to c^-}f(x)=L$.

$\lim\limits_{x\to c}f(x)=L$ 的含义是 x 距离 c 越来越近，不论方向，函数 $f(x)$ 越来越接近 L. 于是，有下面的这个定理.

定理 1　等式 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=L$ 成立的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to c^+}f(x)=L$ 与等式 $\lim\limits_{x\to c^-}f(x)=L$ 同时成立.

图 1－3 可以让你深刻地理解其内涵. 即使函数的左右极限都存在，函数的极限也不一定存在.

极限定义涉及函数 $f(x)$ 在 c 附近有值,而不是在 c 点的值. 细心的读者一定会注意到,无限接近这个词是什么意思呢?多近算是无限接近呢?要回答这个问题,需要进一步的学习. 之前已经有极限的描述性定义,这里给出一个比较准确,但仍不是正式的极限定义:

定义 3　极限 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=L$ 是指当 x 与 c 间距离足够小,但 x 不等于 c 时,$f(x)$ 与 L 间的距离可以任意小.

这个定义没有解决什么是距离任意小,所以还不够精确.

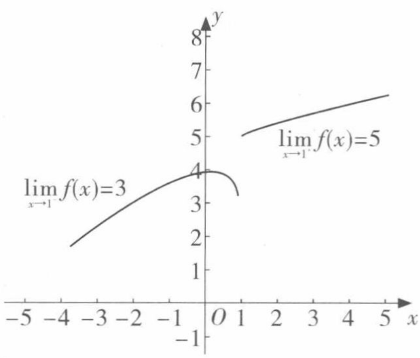

图 1－3　左右极限

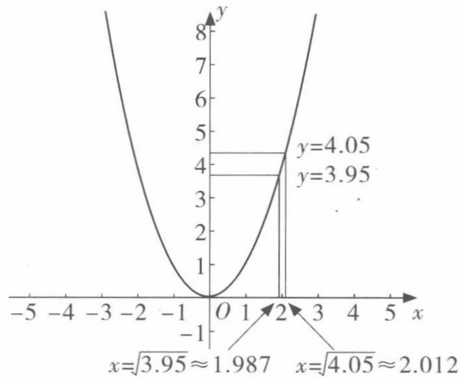

图 1－4　二次函数

【例 2】　用 $y=f(x)=x^2$ 的图形去确定 x 有多靠近 2,才能使 $y=f(x)=x^2$ 在 4 ± 0.05 范围之内.

解　为使 $y=f(x)=x^2$ 在 4 ± 0.05 范围之内,需要 $3.95<f(x)<4.05$,直线 $y=3.95$ 和 $y=4.05$,如图 1－4 所示.

图 1－4 表明,如果 $\sqrt{3.95}<x<\sqrt{4.05}$,则 $3.95<f(x)<4.05$. 故 x 的取值区间近似为 $1.987<x<2.012$. 当然,在区间的两个端点,右端点 2.012 与 2 更接近,它们之间的距离为 0.012. 于是,如果 x 落在与 2 相差 0.012 的范围内时:$1.988<x<2.012$,$f(x)$ 一定在 4 ± 0.05 范围之内.

进一步地,x 与 2 要如何接近才能使 $y=f(x)=x^2$ 在 4 ± 0.01 范围之内?这里只需要画出类似的直线,你就会发现,x 必须落在一个比刚才更小的范围内. 在这个例子中,看起来不管 $f(x)$ 如何地接近 4,都可以通过 x 更趋近 2 来达到目的.

要给出极限的精确定义,首先,用两个希腊字符 ε(epsilon) 和 δ(delat) 来代表任意正数. 考虑 ε 和 δ 都是很小的正数. 我们说函数 $f(x)$ 与 L 的距离小于 ε,也就是 $|f(x)-L|<\varepsilon$,或者等价于 $L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$,也就是说,$f(x)$ 位于开区间 $(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$ 内.

用绝对值表示距离:$|f(x)-L|$ 表示函数 $f(x)$ 与 L 的距离,这在理解极限定义时非常重要. 要表述 x 与 c 间距离足够小,可以用下面这个式子:$0<|x-c|<\delta$. 注意 $|x-c|<\delta$ 描述的区间是 $c-\delta<x<c+\delta$,而 $0<|x-c|$ 则要求不包含 $x=c$.

现在我们来介绍微积分最重要的定义.

定义 4　极限的精确定义

极限$\lim\limits_{x\to c}f(x)=L$是指：$\forall\varepsilon>0$(不管它有多么小)，$\exists\delta>0$，当$0<|x-c|<\delta$时，恒有$|f(x)-L|<\varepsilon$，即$0<|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon$.

我们强调必须首先给出实数ε，然后求得δ，它通常依赖于ε. 假设张三想给李四证明$\lim\limits_{x\to 2}(2x+3)=7$，李四用任一小的正数$\varepsilon$来挑战张三. 例如，李四选择$\varepsilon=0.01$要求张三找出相应的$\delta$. 张三能找出一个$\delta$，只要$0<|x-2|<\delta$，就可以使得$|(2x+3)-7|<0.01$成立吗？使用代数技巧可得到：$|(2x+3)-7|<0.01\Leftrightarrow 2|x-2|<0.01\Leftrightarrow|x-2|<\dfrac{0.01}{2}$.

因此，问题的答案是肯定的. 张三可以取$\delta=\dfrac{0.01}{2}$(或者其他更小值)，即只要$0<|x-2|<\dfrac{0.01}{2}$，它会保证$|(2x+3)-7|<0.01$. 换句话说，要使得$2x+3$与7的距离在0.01之内，只要x与2的距离在$\dfrac{0.01}{2}$之内就可以了.

现在假设李四再次挑战张三，这一次他希望$|(2x+3)-7|<0.000\,02$，张三能找到这个对应于$\varepsilon=0.000\,02$的一个δ吗？仿照之前步骤推导：

$$|(2x+3)-7|<0.000\,02\Leftrightarrow 2|x-2|<0.000\,02\Leftrightarrow|x-2|<\frac{0.000\,02}{2}.$$

因此，只要$|x-2|<0.000\,01$，就有$|(2x+3)-7|<0.000\,02$.

这种推导虽然有时是可信的，但不是极限为7的证明. 定义要求必须找到一个δ对于任意$\varepsilon>0$(不是某一个$\varepsilon>0$)都适合. 李四可能再一次挑战张三，但都不能证明这个极限就是7. 张三必须能够找到一个δ，对于每个正数ε(无论它有多少小)都适合.

张三建议让ε作为任一正数. 按照以上的推理步骤进行，但这一次他用ε(而不是某一个具体的值)代替了0.000 02.

$$|(2x+3)-7|<\varepsilon\Leftrightarrow 2|x-2|<\varepsilon\Leftrightarrow|x-2|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

张三可以选择$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，只要$|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，就有$|(2x+3)-7|<\varepsilon$成立. 换句话说，他可以做到如果$x$与2的距离在$\dfrac{\varepsilon}{2}$之内，则$2x+3$与7的距离在$\varepsilon$内. 现在张三满足了极限定义的要求，因而可以肯定极限为7了.

极限的证明：在下面的例子中，我们从初步分析开始，以使得选择的δ显得更可信. 它展示了需要在草稿上演算来寻找正确步骤去证明的过程，如果你理解了这个例子，再把初步分析遮掩起来，证明会显得高雅而神秘.

【例3】 证明$\lim\limits_{x\to 4}(3x-7)=5$.

初步分析：令ε为任一正数，$\lim\limits_{x\to 4}(3x-7)=5$，必须找出一个$\delta>0$，使得

$$0<|x-4|<\delta\Rightarrow|(3x-7)-5|<\varepsilon.$$

思考右边的不等式

$$|(3x-7)-5|<\varepsilon\Leftrightarrow|3x-12|<\varepsilon\Leftrightarrow 3|x-4|<\varepsilon\Leftrightarrow|x-4|<\frac{\varepsilon}{3}.$$