数学奥林匹克

张君达　朱华伟　汇编

美国数学奥林匹克
试题汇编

大学出版社

数学奥林匹克

美国数学奥林匹克试题汇编

(1981—1990)

张君达　朱华伟　汇编

北 京 大 学 出 版 社

新登字(京)159号

数学奥林匹克

美国数学奥林匹克试题汇编

张君达　朱华伟　汇编
责任编辑：王明舟
*
北京大学出版社出版发行
(北京大学校内)
国防科工委印刷厂印刷
新华书店经售
*
787×1092毫米　32开本　11.125印张　245千字
1992年10月第一版　1992年10月第一次印刷
印数：00001—31,000册
ISBN 7-301-02061-9/G·151
定价：4.50元

目　录

第一章 美国数学竞赛历史概况

美国是个数学强国，其中不乏关心数学竞赛和数学教育的数学家。无论是普及的程度还是提高的程度，它的数学竞赛水平均属上乘。在历届的IMO(国际数学奥林匹克)中美国成绩辉煌，从1974年到1990年基本上稳定在前5名(三次获第1名，四次获第2名，四次获第3名，一次获第4名，三次获第5名)，只是在1988年第29届IMO中首次退出前5名，屈居第6。

美国的数学竞赛有着悠久的历史，早在1938年，美国就开始举行大学低年级的数学竞赛——普特南(William Lowell Putnam)数学竞赛，远远先于其它国家。美国中学生数学竞赛也有四十多年的历史，迄今为止，美国的中学数学竞赛有：美国高中数学竞赛(AHSME)，美国数学奥林匹克(USAMO)，美国数学邀请赛(AIME)及美国初中数学竞赛(AJHSME)。

一、美国高中数学竞赛(AHSME)

1950年，美国数学会举办首届高中数学竞赛，但仅限于纽约及哥伦比亚特区，1957年发展成为全国性竞赛，由美国数学会和保险统计员协会等联合举办，现在它已发展成为国际性的竞赛，参加者除美国外，还有加拿大、英国、爱尔兰、澳大利亚、卢森堡、比利时、匈牙利、意大利、波多黎

各、牙买加等国参加。自1983年起，我国的北京和上海两市也参加了这项国际比赛，1986年，天津市也已正式参加。1985年，参加美国高中数学竞赛的人数已超过38万，他们分别来自各个国家的5917所学校。

这种数学竞赛的试题完全以标准的中学课程为基础，面向不同水平的中学生，而不只是为高水平的学生服务，不需要应用高深的数学知识，一般水平的学生都可以参加，但要取得满分也不容易，在前十届的竞赛中，只有3个人获得满分。该竞赛的试题全部采用选择题，大体上可以分为四部分，第一、二部分是考查学生对概念的掌握程度和有关的基础知识、基本技巧，后两部分是考查一些具有探索性、提高性的问题，不是教科书的重演，往往需要更多的思考。这种竞赛开始时的考题是50道选择题，从1974年起，减为30道，限定在90分钟以内完成，每题有5个供选择的答案，其中有一个且仅有一个是正确的。在1985年以前，评分的方法是每人有30分的底分，然后每答对一题得4分，每答错一题扣1分，未回答的既不得分也不失分，如全对者则加120分，得满分150分。从1986年起采取新的评分办法，每一题答对得5分，不答者得2分，答错得0分，满分仍为150分。

竞赛结束后，各学校按考试分数评定名次，并由美国数学会统一掌管荣誉册的登记工作，凡成绩在100分或100分以上的学生都可载入荣誉册，荣誉册不仅是一种荣誉，也是大学录取学生的依据，大学数学专业可以根据荣誉册选录学生，对于每校最高分的3名考生得分之和优异的学校，给予学校优胜者称号并载入荣誉册。

在1983年3月1日举行的第34届美国高中数学竞赛中，获得满分者有两名：上海一名(建设中学车晓东同学)，美国一名。在1984年2月28日举行的第35届竞赛中，获得满分者四名，其中北京两名、上海一名、美国一名。在1985年2月26日的第36届竞赛中，获得满分者有三名，其中美国一名，英国一名，而上海复旦大学附中以420分(即该校最高分的三名考生得分之和)的优异成绩荣获学校优胜者载入荣誉册。到1990年为止，这种竞赛已举行了41届，通常在每年2月底或3月初的一个星期二举行。

二、美国数学奥林匹克(USAMO)

美国高中数学竞赛的水平低于国际数学奥林匹克，也低于匈牙利、苏联等国的数学奥林匹克，受到IMO的冲击，因此，1971年，纽约州立大学的一位教授特尔勒女士(N.D. Turuer)在美国数学会的会刊«美国数学月刊»上发表一篇文章，大声疾呼，"为什么我们不能搞美国数学奥林匹克?"她提出美国应当搞相当于IMO水平的美国数学奥林匹克，并进而参加IMO。美国数学奥林匹克的试题不采用选择题，而应当象IMO和东欧、英国等国的数学奥林匹克，出一些竞赛味很强的题目，让学生深思熟虑，想出解答，并将语言组织好，清晰、准确地写在试卷上。美国高中数学竞赛可以作为美国数学奥林匹克的资格赛，其优胜者参加美国数学奥林匹克；而美国数学奥林匹克又是从美国高中数学竞赛到IMO的一座桥梁。

经过许多热心人及有识之士的一致努力，第一届美国数学奥林匹克于1972年诞生，到1990年为止已进行了19届。

1982 年以前，通过美国高中数学竞赛选出 100 名左右选手参加美国数学奥林匹克，然后再从中选出参加当年 IMO 的选手. 1983 年以后，凡在美国数学邀请赛中得分大于或等于 8 分的学生将被邀请参加美国数学奥林匹克。美国数学奥林匹克是美国国内水平最高的数学竞赛，在国际上有一定影响，每种竞赛有 5 道试题，满分 100 分，要求在 3 个半小时内完成，试题的平均难度略低于 IMO，但也不时出现一、二道很难的题目.美国著名的数学竞赛教练格里塞(S.I.Greitzer)分析美国第十届数学奥林匹克成绩后指出，参加竞赛的 150 名学生中三分之二得分在 20 分以下的事实表明美国高中数学竞赛能决定有才能的学生，而美国数学奥林匹克能确定有天赋的学生。对于在美国数学奥林匹克中取得前 8 名的优胜者授予荣誉称号，在首都华盛顿举行授奖仪式，在白宫接受总统的接见，授予银盘和奖金，并从中确定 20 余名学生组成美国国家数学奥林匹克集训队，在著名的西点军校或美国海军学院等地进行为期三周的集训，最后从中选出 6 名选手组成美国国家数学奥林匹克代表队。

三、美国数学邀请赛(AIME)

美国高中数学竞赛采用选择题，虽然也有很多优点，但和美国数学奥林匹克不大协调，两者的难度相当大。在总结前一时期竞赛的基础上，为了更全面、更准确地培养和考察学生，在美国高中数学竞赛和美国数学奥林匹克之间插入了美国数学邀请赛。第一届美国数学邀请赛于1983年 3 月22 日举行。这样，美国高中数学竞赛成了美国数学邀请赛的资格赛(凡在美国高中数学竞赛中得分≥95 分，自1986年起改

为≥100分的学生才有资格参加邀请赛)，而美国数学邀请赛才是美国数学奥林匹克的资格赛。这种竞赛常在3月下旬的一个星期二举行，试题由美国数学会提供，题目共15道，全是填充题，每题1分，满分15分，每题的答案均为不超过999的正整数，不允许使用计算器，要求考生在3小时完成(1985年以前，考试时间为2个半小时)。邀请赛的试题新颖别致，内容广泛，灵活性强，其中有些题目具有较高的抽象性，要求学生具有一定的逻辑思维、推理论证、空间想象和分析问题解决问题的能力。到1990年，这种竞赛已经举行了8届，AIME的优胜者(100名左右)参加4月底或5月初举行的美国数学奥林匹克。至此，美国数学竞赛形成了一个多层次的、呈宝塔型的比较完整的体系。

高中数学竞赛(2月)$\Longrightarrow$数学邀请赛(3月)$\Longrightarrow$数学奥林匹克(5月)$\Longrightarrow$参加IMO(7月)。

美国数学邀请赛也是一种国际性比赛。在第三届美国邀请赛中，有各个国家和地区的625所中学的932名学生参加，竞赛结果，凡得分≥8分的学生将取得公认的美国数学邀请赛证书。我国上海市参加了历届美国数学邀请赛，而且取得了优异成绩。第一届数学邀请赛中，上海建设中学车晓东和华东师大二附中王菁均获满分。以后各届获得满分的有吴思皓、张浩、丘隆东(女)、郭峰等，北京市、天津市也参加了AIME。

四、美国初中数学竞赛(AJHSME)

1985年12月10日举行了第一届美国初中数学竞赛，到1990年已举办6届。它是由美国数学会等六个单位联合举

办的，参加的对象是7年级和8年级的学生(相当于我国的初中二年级)，命题范围是7、8年级数学课程包含的若干内容(但不包括极限)，如：算术中的整数、分数、小数；比和比例；数论；简单的几何、周长、面积、体积；概率与统计；逻辑推理。该竞赛侧重考查学生的直观、直觉思维能力。

竞赛试题是25道选择题，规定在40分钟内完成，对随机猜测答案不予惩罚。这种竞赛有美国、加拿大等国的15万学生参加。上海市在1986年参加了第二届美国初中数学竞赛。

五、普特南数学竞赛(Putnam M.C)

普特南数学竞赛久享盛誉，这一竞赛始于1938年，每年举行一次(1943—1945年因大战停了两年)，一般都在每年11、12月份举行，到1990年已举办了51届，为年轻的数学爱好者提供了一个富有挑战性的竞争机会，每年都吸引了美国、加拿大各大学成千上万的大学生参加，例如在1986年举办的第47届普特南数学竞赛中，有美国和加拿大的358所大学的2094名大学生参加。

普特南家族几代人都擅长数学，关心数学教育。竞赛的首创者为W.L.Putnam，他曾任哈佛大学校长，早在1921年，他就撰文论述仿照奥林匹克运动会举办大学生学习竞赛的优点，在二十年代末举行过几次校际竞赛作为实验。他逝世后留下一笔基金，两个儿子就与全家的挚友、著名美国数学家G.D.伯克霍夫商量，举办了普特南数学竞赛。伯克霍夫强调说，再没有一个学科能比数学更易于通过考试来测定

能力了。

这一竞赛由美国数学会具体组织，试题分为A、B两试（上、下午分别举行），每试6—7题，各用3个小时。为了保证竞赛的质量，试题由三位著名数学家组成的命题委员会拟定，三个委员是：波利亚(G.Polya)，著名数学家、数学教育家、数学解题方法论的开拓者，曾主办过持续多年的斯坦福大学数学竞赛；拉多(Tiber Rado)，匈牙利数学竞赛的早期优胜者，对复变函数、测度论有重大贡献；卡普兰斯基(Kaplansby)，著名的代数学家，第一届普特南竞赛的优胜者。该竞赛的试题形式活泼，背景深刻，极富创造性，因而受到国际数学界的瞩目，值得注意的是这些试题虽然是提供给大学生的，但有相当一部分属于初等数学问题，完全不用高等数学知识，有一定思维能力和解题技巧的中学生都有可能解决。

普特南竞赛的优胜者中日后成名的很多，有三人得菲尔兹奖(数学界最高奖)。有人说："伯克霍夫父子（儿子B.伯克霍夫是当代活跃的代数学家)是普特南家族的密友，这一点是美国低年级大学数学事业的幸运。"

第二章　美国高中数学竞赛

第三十二届（1981年）

试　题

1. 若$\sqrt{x+2}=2$，那么$(x+2)^2$等于

(A) $\sqrt{2}$；(B) 2；(C) 4；(D) 8；(E) 16。

2. 如图 2-1 所示，点E在正方形$ABCD$的一边AB上，若EB长度为1，EC长度为2，那么正方形的面积是

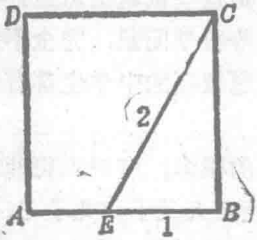

图 2-1

(A) $\sqrt{3}$；(B) $\sqrt{5}$；(C) 3；(D) $2\sqrt{3}$；(E) 5。

3. 已知$x\neq 0$，$\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x}$等于

(A) $\frac{1}{2x}$；(B) $\frac{1}{6x}$；(C) $\frac{5}{6x}$；(D) $\frac{11}{6x}$；

(E) $\frac{1}{6x^3}$。

4. 如果两个数中较大一个的 3 倍是较小一个的 4 倍，且两数之差是 8，那么这两个数中较大的一个是

(A) 16； (B) 24； (C) 32； (D) 44；

(E) 52。

5. 在梯形$ABCD$中，如图 2-2，边AB和CD平行，对角线BD与腰AD相等。若在$\triangle BCD$中，$\angle DCB=110°$，$\angle CBD=30°$，那么$\angle ADB=$

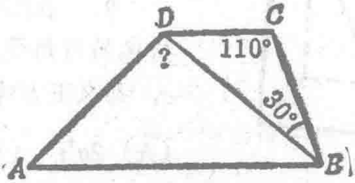

图 2-2

(A) 80°； (B) 90°； (C) 100°； (D) 110°；

(E) 120°。

6. 若$\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{y^2+2y-1}{y^2+2y-2}$，那么$x$等于

(A) y^2+2y-1； (B) y^2+2y-2；

(C) y^2+2y+2； (D) y^2+2y+1；

(E) $-y^2-2y+1$。

7. 在1—100这100个自然数中，有多少个能被 2，3，4，5 都整除？

(A) 0； (B) 1； (C) 2； (D) 3； (E) 4。

8. 对于$x>0$，$y>0$，$z>0$，乘积

$$(x+y+z)^{-1}(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1})(xy+yz+zx)^{-1}$$
$$\cdot[(xy)^{-1}+(yz)^{-1}+(zx)^{-1}]$$

等于

(A) $x^{-2}y^{-2}z^{-2}$; (B) $x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}$;

(C) $(x+y+z)^{-2}$; (D) $\frac{1}{xyz^2}$;

(E) $\frac{1}{xy+yz+zx}$.

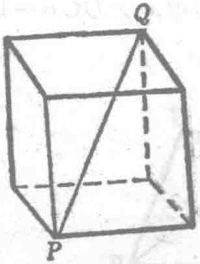

图 2-3

9. 在图2-3中，PQ是正方体的对角线，若PQ长度为a，那么正方体的表面积是

(A) $2a^2$; (B) $2\sqrt{2}a^2$;

(C) $2\sqrt{3}a^2$;

(D) $3\sqrt{3}a^2$; (E) $6a^2$.

10. 两直线L和K以直线$y=x$为对称轴，若直线L的方程是$y=ax+b(a\neq0,b\neq0)$，那么直线K的方程是$y=$

(A) $\frac{1}{a}x+b$; (B) $-\frac{1}{a}x+b$; (C) $-\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$;

(D) $\frac{1}{a}x+\frac{b}{a}$; (E) $\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$.

11. 已知直角三角形的三条边的长度都是整数，且成等差数列，其中一边的长度应为

(A) 22; (B) 58; (C) 81; (D) 91;

(E) 361.

12. 若P，Q，M都是正数且$Q<100$，现在把M增加$P\%$，再把所得的结果减少$Q\%$。这样所得的数仍大于M，那么必须而且只须

(A) $P>Q$; (B) $P>\frac{Q}{100-Q}$,

(C) $P>\frac{Q}{1-Q}$, (D) $P>\frac{100Q}{100+Q}$,

(E) $P>\frac{100Q}{100-Q}$.

13. 假定每到一年的年末，某笔款子的价值要比这一年的年初损失10%，试求最小的正整数n，使在第n年后，这笔款子的价值至少要损失90%（lg3的精确到千分之一的近似值是0.477）。

(A) 14; (B) 16; (C) 18; (D) 20;

(E) 22.

14. 一个各项为实数的等比数列的前二项的和是7，前六项的和是91，那么前四项的和是

(A) 28; (B) 32; (C) 35; (D) 49;

(E) 84.

15. 若$b>1$，$x>0$，且$(2x)^{\log_b 2}-(3x)^{\log_b 3}=0$，那么$x$是

(A) $\frac{1}{216}$, (B) $\frac{1}{6}$, (C) 1; (D) 6;

(E) 不能唯一确定。

16. 以三进位制表示的数x是

$$12112211122211112222,$$

则以九进位制表示的这个数的第一位数字（左边的）是

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4; (E) 5.

17. 函数$f(x)$在$x=0$处没有定义，对于所有的非零实

数 x，都有

$$f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x。$$

适合方程 $f(x)=f(-x)$ 的 x 的值有多少个？

(A) 恰好只有一个实数；

(B) 恰好有两个实数；

(C) 没有；

(D) 无穷多个，但不是所有非零实数；

(E) 所有非零实数。

18. 方程 $\frac{x}{100}=\sin x$ 的实数解的个数有多少个？

(A) 61； (B) 62； (C) 63； (D) 64； (E) 65。

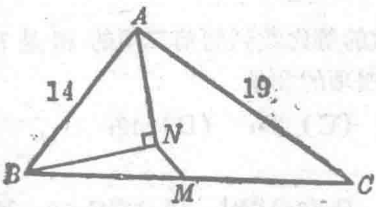

图 2-4

19. 如图2-4，在△ABC中，M是边BC的中点，AN平分$\angle BAC$，$BN\perp AN$，且$\angle BAC$的角度是θ。

若AB长度为14，AC长度为19，则MN长度是

(A) 2； (B) $\frac{5}{2}$； (C) $\frac{5}{2}-\sin\theta$；

(D) $\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta$； (E) $\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)$。

20. 一条光线从点A出发，在一平面内传播，该光线在两条直线AD和CD之间反射几次后，垂直射到点B上(B点在AD或CD上)然后又按原光路返回A点(如图 2-5)，在

每一个反射点上，两条光线与反射线所夹的角相等(图2-5是$n=3$时的光线线路图)。若$\angle CDA=8^{\circ}$，则n的最大值应是多少？

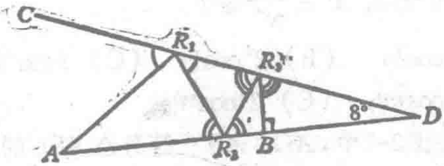

图 2-5

(A) 6; (B) 10; (C) 38; (D) 98;

(E) 没有。

21. 三角形三边之长为a, b, c，且

$$(a+b+c)(a+b-c)=3ab,$$

边长为c的边所对的角的度数是

(A) 15°; (B) 30°; (C) 45°; (D) 60°;

(E) 150°.

22. 在空间直角坐标系中，通过坐标为(i, j, k) 4个不同的点的直线有多少条(i, j, k是不大于4的正整数)？

(A) 60; (B) 64; (C) 72; (D) 76;

(E) 100.

23. 等边$\triangle ABC$外接一圆，第二个圆与外接圆内切于T，与边AB和AC分别切于P, Q，如图2-6。若BC的长度为12，那么线段PQ的长度是