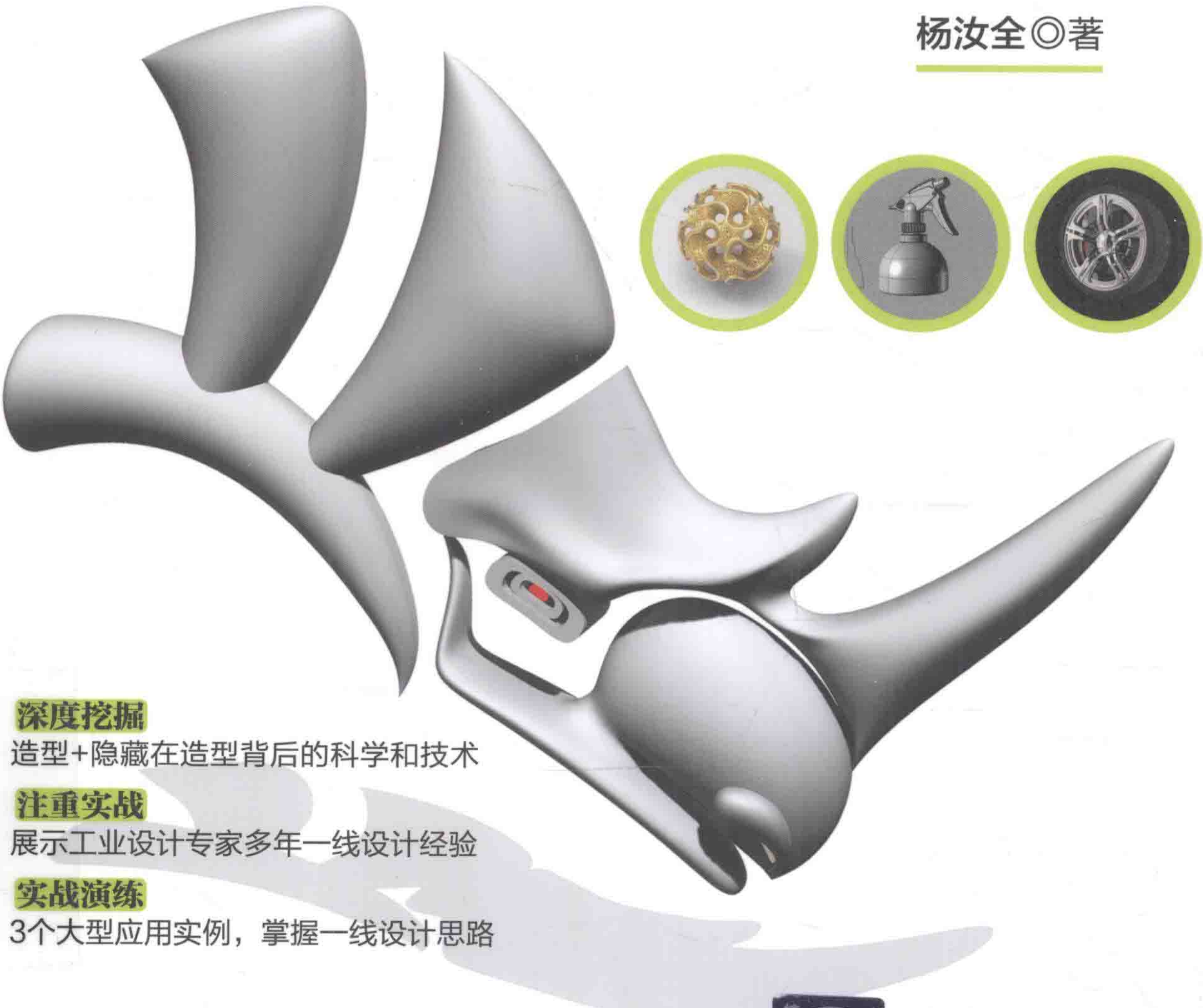
一本写给设计师看的关于NURBS的书

探秘Rhino

产品三维设计进阶必读

杨汝全◎著



深度挖掘

造型+隐藏在造型背后的科学和技术

注重实战

展示工业设计专家多年一线设计经验

实战演练

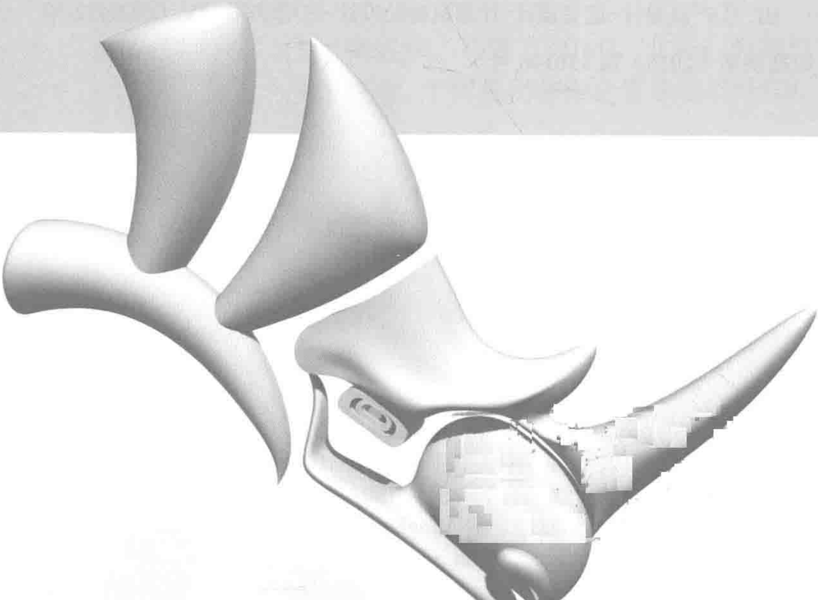
3个大型应用实例，掌握一线设计思路

清华大学出版社

探秘Rhino

产品三维设计进阶必读

杨汝全◎著



清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要内容包括 NURBS 的数学原理、Rhino 主要命令的原理和算法、3 个 Rhino 模型的详细建模步骤以及 Maxwell Render 渲染器的详细使用方法。

与其他介绍 Rhino 及建模教学的图书不同的是，本书对支撑 Rhino 建模的数学方法——NURBS 做了详细和易懂的解析，在此基础上对 Rhino 的一些命令的原理和算法也做了详尽的分析，读者学习了这些内容后会对 NURBS 和 Rhino 有更加深刻和科学的理解，能够真正成为产品三维设计的高手。本书的 Rhino 建模案例中提供的建模方法，也力求使所建模型精准、简单、优美，具有更高的模型质量。本书最后部分对基于物理光学的 Maxwell Render 渲染器的原理和使用程序做了详细的分析，读者掌握后就可以很容易地创作出超级真实的产品表现。理解了 NURBS 的数学原理，也有助于读者更快速地掌握其他使用 NURBS 曲线曲面的建模工具，如 Alias、Maya、Catia 等。

本书适合专业设计师、大专院校学生以及三维设计爱好者中对 Rhino 有一定基础的中等建模水平的读者进阶使用。

图书在版编目（CIP）数据

探秘 Rhino：产品三维设计进阶必读/杨汝全著．—北京：清华大学出版社，2016
ISBN 978-7-302-40595-5

I. ①探…　II. ①杨…　III. ①产品设计-造型设计-计算机辅助设计-应用软件　IV. ①TB472-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 150146 号

责任编辑：贾小红
封面设计：刘　超
版式设计：魏　远
责任校对：王　云
责任印制：何　芊

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京亿浓世纪彩色印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　印　　张：25.5　　字　　数：603 千字
版　　次：2016 年 1 月第 1 版　　印　　次：2016 年 1 月第 1 次印刷
印　　数：1～2500
定　　价：88.00 元

产品编号：044248-01

前　言

进入数字化时代以后，用计算机建立产品数字模型成为设计流程中的重要一环。在众多的建模工具中，Rhino 以其专业性强、短小精悍、比较低的价格等优点受到众多设计师的青睐。作为一个设计从业人员，我一直把 Rhino 作为设计的有力工具，用它来建立产品模型。但是在使用 Rhino 的过程中，我对它也存在诸多的疑问，例如节点、编辑点、控制点、曲线阶数等概念，很难直观地去理解，而这种疑问又会妨碍我去更深刻和高效地理解和使用这个工具。怀着解答这些疑问的目的，我尝试着去寻找答案，在此过程中发现 Rhino 其实是建立在严密的数学基础上的，这些概念基本上就是数学上的概念，凭着自己大学所学的那点较少的高等数学的知识，凭着想要把这些问题搞懂的求知欲望，浏览了众多的资料之后，对于 NURBS 的数学原理算是有了一个基本的认识，对于 Rhino 也有了更深入的理解。在这个寻找答案的过程中，我发现买不到关于 Rhino 的数学书，大部分关于 NURBS 的书都是数学专业人员写的，对于设计师来讲非常难懂，因此我就有了把 Rhino 背后的数学从设计师的角度写出来的想法，能够使设计师们更好地理解 NURBS，更好地使用 Rhino，更好地设计产品，毕竟产品的设计不仅仅是造型，还有隐藏在造型背后的科学和技术。我写书的想法有幸得到了清华大学出版社的理解和支持，最后促成了本书的完成。

本书的目的之一是帮助设计师以及广大的 Rhino 使用者理解 NURBS 的概念、数学原理以及曲线曲面的构造特征，从而深入地理解 Rhino 的相关概念、指令内涵、指令之间的关系以及曲线曲面的构造原理，并在此基础上建构高质量的 Rhino 模型。不理解 NURBS 的数学原理，就难以真正理解 Rhino 中的节点、定义域、权值、周期曲线等概念。类似于 Rhino 这样的软件，其 3 个重要的组成部分就是数学原理、算法和程序代码系统以及用户使用界面。而现实中，很多设计师用户可能对 Rhino 的最后一个组成部分（也就是用户使用界面）很熟悉，即使用软件很熟练，但却对前两个部分完全不熟悉或者不懂。如果他们能够对前两个部分略有理解或理解得稍微深入一些，那么他们的软件应用水平无疑就会更上一个台阶。但是要完全搞懂这些，我们可能需要回到大学去拿一个数学学位、一个编程的学位、一个设计的学位，真的是难以完成。到目前为止，已经有很多关于 NURBS 的书籍、论文出版，这些资料大都充满了令人费解的数学定义、公式、推导和证明，以及令人头疼不已的算法和程序代码，常常使想搞懂它们的设计师用户烦恼得挠破头皮，显然这些资料是写给数学家和工程师看的，而不是给设计师看的。因此，本书的目标就是力图写一本给设计师看的关于 NURBS 的书，使他们不用啃那些密密麻麻的数学公式，就能够对 NURBS 有更深层次的理解。当然涉及数学原理，本书还是要有数学公式，我力图把数学定义和公式的数量减到最精简的程度，减少数学语言的使用而尽量使用容易理解的词汇，虽然这样使概念的解释和算法的推导显得不如数学上那么严密，但却使 NURBS 原理更通俗易懂。即便如此精简，仍然需要读者保持一定耐心仔细看完这些数学原理和过程推导，等理解了 NURBS 的原理以后，你会发现所有的努力和耐心都是值得的。

理解了 NURBS 的基本原理后，读者不仅能够更好地掌握 Rhino，而且能够更好地掌握其他所有包含 NURBS 建模的 3D 应用，如 Alias Design、3ds Max、Maya、Catia 等，同时对于高效、优质地建立 NURBS 模型，对于理解产品的加工和生产流畅，都是大有裨益的。

本书的另一个目的是探讨如何高质、高效地进行建模和渲染，因此本书的主体部分通过探讨 3 个产品模型的建模步骤，使读者能够运用 Rhino 建立高质量的产品数据模型。本书的最后一章探讨了 Maxwell Render 渲染工具的使用方法和流程。Maxwell Render 是我用过的最逼真和强大的渲染工具，非常适合作为产品表现的渲染工具。

由于只能在课余时间写作，本书断断续续持续了两年多才完成，感谢清华大学出版社贾小红编辑的信任，一直耐心地等我完成了全书的写作，也感谢我的妻子王华、学生谢阁浩细心地帮我整理版面。最后尤其要感谢的是那些促进科技前行的数学家、工程师、程序员们，是他们的努力使我们有了更好用、更高效的设计工具。

书中所配案例的源文件、效果文件及高清图例文件可到清华大学出版社网站（www.tup.com.cn）及蒲公英教育平台（www.catics.org）上进行下载。

杨汝全

2015 年 12 月 30 日于广州

目　　录

第 1 章　什么是 NURBS

1.1　Rhino 建模与 NURBS 方法

自 20 世纪 40 年代发明电子计算机以来，人类就一直试图在生产和生活的各个领域充分发挥它的计算优势，提高工作、生活的效率和质量。电子计算机是建立在电子电路的基础上，以二进制数字为语言进行计算的装置，它的优势在于计算速度快，计算精度高，尤其适合需要大量运算的领域应用。在各种工程领域，例如机械、车辆、航空航天、建筑、桥梁等，其工程设计中往往需要进行大量的分析和计算，如各种力学、振动、空气动力、热分析等，因此，工程设计领域是最早应用计算机作为设计工具的领域之一。随着计算机硬件、计算机图形学的迅速发展，目前，计算机作为辅助工具已经应用到了设计（Computer Aided Design，CAD）、分析（Computer Aided Engineering，CAE）、制造（Computer Aided Manufacturing，CAM）等工程领域的各个环节。其中在形态设计方面，鼠标、键盘、手绘板等人机交互工具取代了圆规、丁字尺和描图笔，显示器和打印机取代了硫酸纸和蓝图。目前，在产品设计和生产的所有领域都已经实现了无纸化，全部设计工作均可以由数码来完成。设计工具的进化大大提高了设计人员的工作效率，同时也在很大程度上拓展了设计人员的想象力和创造性空间。

在工业设计领域，设计人员的很大一部分工作是处理线条、体量、比例等外观形态以及材质外观效果，他们需要的是灵活、交互的形态设计工具和逼真的产品效果展示工具。目前，有许多计算机辅助设计工具都能够满足这一要求，Rhinoceros® 就是其中之一。

Rhinoceros®（以下简称 Rhino）是一款由美国 Robert McNeel & Associate（以下简称 McNeel）开发的辅助设计软件，其主要的功能目标是辅助设计师进行更自由的产品、建筑等形态方面的设计。它的核心是 NURBS 曲线曲面理论，它的点、线、面、体的建模指令都是建立在这个核心和相关算法的基础之上的。Rhino 所建立的模型，是存储在计算机内的一系列数据，这些数据代表点、线、面、体等各种造型要素，并通过特定的图形算法计算显示在屏幕上。NURBS 曲线曲面理论的发展源自工程设计领域，自 20 世纪 60 年代至 80 年代，理论发展逐渐成熟并在计算机辅助设计领域投入商业应用，Rhino 就是在此基础上开发并逐渐完善起来的。

1992 年，McNeel 与 AG（Applied Geometry）合作，负责将 AG 的一个 NURBS 几何算法库 AGLib 整合到 AutoCAD 中，同年 McNeel 与 AG 达成协议共同开发 AutoCAD 的 NURBS 模块 AccuModel。1993 年，McNeel 完全接手开发工作，并于当年 11 月完成了阶段性成果 Sculptura 2，并给它起了一个外号叫 Rhinoceros。1994 年，McNeel 与 AG 达成协议，McNeel 获得许可使用 AGLib，AG 公司负责升级和维护，并于当年发布了 Rhino 的测试版本，1994 年 8 月，McNeel 正式将 Sculptura 命名为 Rhinoceros，并注册了商标。1994

年 11 月，Alias 公司正式收购了 AG 公司，1995 年 1 月，McNeel 接受 AG 对 AGLib 最后一次的升级维护。1998 年 10 月，Rhino 1.0 版本正式发布，1999 年 1 月，升级为 1.1 版本，2000 年 8 月，发布 Rhino 2.0 测试版和 Flamingo 渲染器，2001 年 9 月，正式发布 Rhino 2.0 版本。Rhino 2.0 使用了 AGLib 中的技术，而 McNeel 使用 AGLib 的许可到 2002 年底到期，因而 McNeel 开发了新的核心并于 2003 年 1 月发布了包含新核心的 Rhino 3.0 版本，经过几年的不断升级完善，于 2007 年 1 月发布了 Rhino 4.0 版本，于 2012 年发布 Rhino 5.0 版本。①

1.2 NURBS 发展简史

NURBS 是 NonUniform Rational B-Splines 的首字母缩写，全称为“非均匀有理 B 样条”，是一种在计算机辅助几何设计 CAGD（Computer Aided Geomery Design）中表达曲线、曲面的数学方法。

在使用计算机进行辅助设计之前，设计人员使用绘图笔、丁字尺、圆规、三角板、曲线尺等工具在纸面上描绘设计图纸，应用画法几何和系列的工程制图的方法表达产品的尺寸、结构、装配等。画法几何使用 3 个互相垂直方向的平行投影来表达产品结构，这种表达方式适合表达方体、圆体以及有明确边界线的物体，对于二次圆锥曲线以外复杂曲线曲面的表达则力不从心。因此产品的设计常常采用最简单的几何形体进行设计，产品的形态以直线、多边形、圆、椭圆为主。而在实际工程应用中，如果需要制造具有曲线曲面的产品，例如船壳、飞机壳体、汽车壳体等，设计和制造通常都是近似的方式，没有精确的数学表达方法。例如造船，设计人员在图纸上画出船的龙骨或船壳曲线，在制造时由放样员（Loftsman）将图纸上的曲线放大到实际制造的尺寸，并使之与图纸上的曲线形状一致。放样员使用一种材质、尺寸均匀一致的有弹性的木条、金属条或者塑料条制成的细长条作为工具，在需要弯曲的地方用压铁对它施加一个作用力，使之弯曲变形，然后调整施加作用力的地点和大小，使细长条达到想要的形状。如图 1.1 所示，这个细长条就叫做样条（Spline）。由于样条材质均匀，它在受力变形后整体仍可保持平滑、光顺。

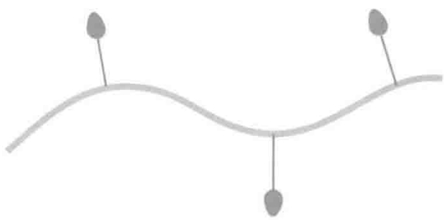


图 1.1　样条

计算机时代来临后，人们想要用计算机进行辅助设计，用它来设计、绘制各种图形，尤其在飞机、汽车等制造领域，更需要用它来绘制各种各样的曲线曲面。目前的计算机只能处理数据并对之进行数学运算，所以，要用计算机绘制曲线曲面，必须有数学方法来精确地表达曲线和曲面，这样计算机可以通过方程式计算出曲线、曲面上所有的点，并在屏幕上或其他输出设备上绘制出来。因此，寻找灵活、高效地表示曲线曲面的数学方法，一直是计算机辅助几何设计中的一项主要工作内容。

放样员使用的样条，由于它的材质统一均匀，材料分子间的作用力也是均匀而连续的，所以它在受力变形时仍然能够保持光滑。通过力学计算，很容易发现样条在相邻两个压铁

之间的曲线方程是一个三次多项式。受此启发，工程师和数学家们试图寻找描述曲线的优秀数学方法，并在过去的几十年间不断取得成果。

最早提出样条理论的是舍恩伯格（Schoenberg），他于 1946 年发表论文，阐述了样条理论。1963 年，美国波音飞机公司的弗格森（Ferguson）提出，可以把曲线曲面表示为参数的矢函数：用参数多项式表达曲线时，可以采用不同的“基函数”（如后来的 NURBS 中的字母 B 就是指其采用了“B 样条”基函数），由不同的基函数构造的曲线具有不同的特征。同样在 20 世纪 60 年代，美国麻省理工学院的史蒂夫·孔斯（Steve Coons）提出了 Coons 方法，用分片的曲面拼接来构造更复杂的大曲面。另一位在此领域做出重要贡献的是法国雷诺汽车公司的工程师贝塞尔（Bezier）。1962 年，他提出了能够使用户方便地移动控制点来修改曲线形状的曲线表示方法——Bezier 方法，并在此理论基础上建立了一套自由曲线曲面设计系统——UNISURF，这套系统引起了许多大型飞机公司的兴趣，并在设计生产中投入了应用。贝塞尔方法使用了“伯恩斯坦”基函数，这在今天已经成为贝塞尔曲线曲面的标准定义。20 世纪 70 年代初，英国剑桥大学的罗宾·佛瑞斯特（Robin Forrest）完善了曲线分割和曲线升阶的计算方法，并成功地在剑桥大学的 CAD 实验室中使用自己开发的数控 CAD 切割机切割出 B 样条曲面模型。在同一时期，通用汽车公司的 de Boor 使用一个在当时不常用的基函数——B 样条基函数来描述曲线并提出了它的算法，英格兰的 Cox 也提出了同样的方程，这种方法成为今天描述 B 样条基函数的典型方法，我们称之为 de Boor & Cox 算法。1971 年，瑞奇·雷森弗德（Rich Riesenfeld）和来自通用汽车研究实验室的比尔·高登（Bill Gordon）将 de Boor & Cox 算法和曲线描述结合起来，提出了 B 样条曲线的矢量描述方法。1974 年，在美国犹他大学举办的世界第一次计算机辅助设计国际会议上，正式将计算机辅助设计定名为 CAGD（计算机辅助几何设计）。1979 年，瑞奇·雷森弗德（Rich Riesenfeld）和伊莱恩·科恩（Elaine Cohen）为解决非均匀节点的计算问题，与挪威奥斯陆大学的汤姆·里奇（Tom Lyche）合作，共同提出了针对非均匀 B 样条的“奥斯陆算法”，利用这种算法，用户可以插值计算和细分非均匀 B 样条，可以在需要的地方对曲线进行局部的调整，如插入节点等操作，从而使非均匀 B 样条得到广泛的应用。1983 年，美国 SDRC（Structural Dynamics Research Corporation）公司首先将基于 NURBS 的几何造型系统 GEOMOD 推向商业应用，此后，越来越多的 CAD 软件系统开始采用 NURBS 作为曲面建造方式，NURBS 曲线曲面也成为初始图形信息交换系统 IGES（Initial Graphics Exchanges Standard）中曲线曲面的定义标准。

1.3　显函数、隐函数、参数和矢量方程

首先来看一下 NURBS 曲线的数学定义：

$$\boldsymbol{Q}(u)=\frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(u)\cdot \boldsymbol{P}_i \cdot w_i}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(u)\cdot w_i} \tag{1.1}$$

这里，i 是 NURBS 曲线的节点序号；k 是 NURBS 曲线的阶数（Degree）；$N_{i,k}(u)$是 B 样条基函数；$\boldsymbol{P}_i$ 是 NURBS 曲线的控制点矢量；w_i 是第 i 个控制点的权值。

这个公式看起来有些复杂，要充分理解它，需要具备一些数学知识。下面我们把这些知识分解开，循序渐进地来学习。

1.3.1 显函数、隐函数和参数方程

式（1.1）是一个 NURBS 曲线的方程式，它是一个参数方程，也是一个矢量方程。

什么是参数方程呢？我们都知道，在直角坐标系中，曲线的方程可以用函数 $y=f(x)$ 的形式来表示。例如，$y=x+1$ 是一条直线的方程。同时，曲线的方程可以用 $f(x,y)=0$ 来表示。例如，$x^2+y^2-4=0$ 是半径为 2 的圆的方程。用 $y=f(x)$形式表示的函数叫做显函数，而用 $f(x,y)=0$ 表示的函数叫做隐函数。由于这两种表示方法都与坐标系相关，随着坐标系的变换，曲线方程也不同，因此，在 CAD 系统中通常不使用这两种函数形式，而使用参数方程来表示。

参数方程的数学形式为：

$$x=f(u);\quad y=g(u);\quad z=h(u) \tag{1.2}$$

一条曲线上的点的坐标（x,y,z）都是另一个参数 u 的函数，其中参数 u 在某一取值区间上取值，我们把这个取值区间叫做该曲线的参数域或定义域。u 在定义域内每取一个数值，根据函数关系，就可以计算出一个与之相对应的空间点的坐标（x,y,z）。当 u 在定义域内变动时，可以计算出一系列点的坐标，把这些点连接起来，就可绘制出一条曲线。NURBS 曲线的方程式（1.1）就是一个参数方程，曲线 $\boldsymbol{Q}(u)$是参数 u 的函数，当 u 在某一区间上变动取值时，计算机就可以根据方程计算出曲线坐标，并在坐标系中绘制出曲线。如图 1.2 所示，绿色的线条表示参数 u 的定义域，桔黄的线条是计算出的空间曲线，曲线 $\boldsymbol{Q}(u)$上的点与定义域中的参数 u 一一对应。

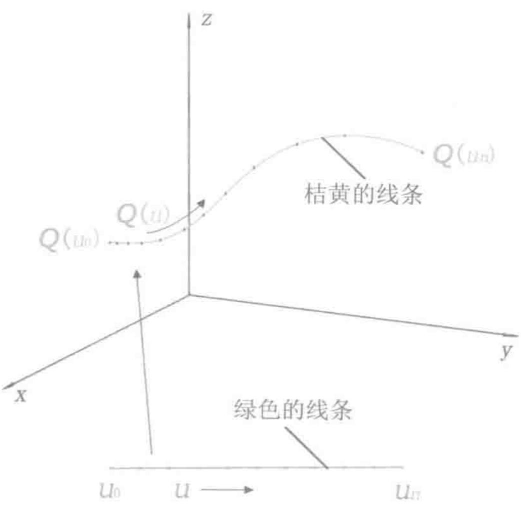


图 1.2　曲线 $\boldsymbol{Q}(u)$上的点与定义域中的参数 u 一一对应

仔细观察方程式（1.1），先不考虑分母，只观察分子，它由 3 个部分组成：$N_{i,k}(u)$（红色部分），$\boldsymbol{P}_i$（蓝色部分），w_i（绿色部分）。式中并没有出现 $x=f(u)$、$y=g(u)$、$z=h(u)$ 的形式，也就是说，没有出现曲线的坐标，那么曲线的坐标是如何计算出来的呢？

其实式（1.1）不仅是一个参数方程，还是一个矢量方程，坐标是隐藏在矢量中的。

1.3.2 矢量方程

在式（1.1）中，$\boldsymbol{P}_i$ 是一个矢量，最终的计算结果 $\boldsymbol{Q}(u)$ 也是一个矢量。我们来回顾一下矢量代数和解析几何的部分内容。

- 矢量：既有大小又有方向的量，如图 1.3 中的矢量 $\boldsymbol{Q}_1$ 和 $\boldsymbol{Q}_2$。
- 矢量的和：两个矢量的和是一个新矢量，它满足平行四边形法则，是以原来两个矢量为邻边组成的平行四边形的对角线（如图 1.4 中的 $\boldsymbol{Q}_3$）。

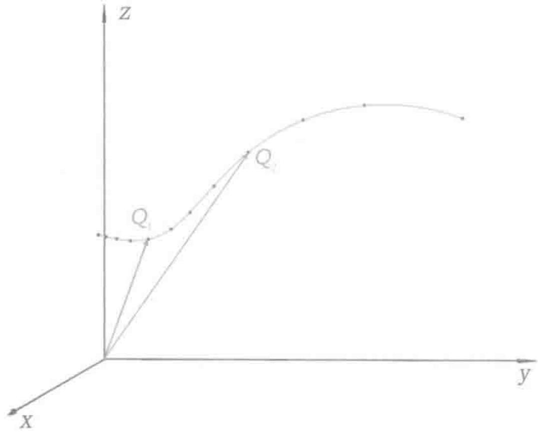


图 1.3　空间矢量 $\boldsymbol{Q}_1$ 和 $\boldsymbol{Q}_2$

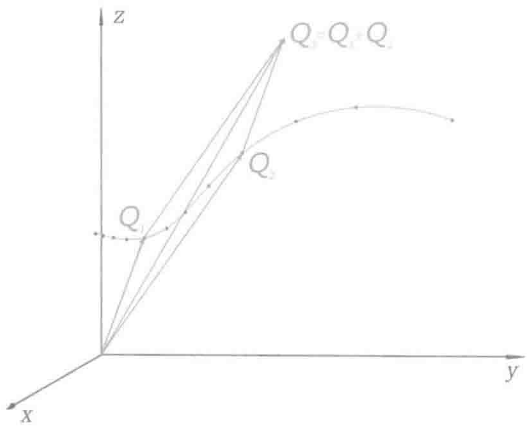


图 1.4　矢量的和

- 矢量的数乘：一个实数 a 与一个矢量 $\boldsymbol{Q}_1$ 相乘，结果仍然是一个矢量，它的长度是矢量 $\boldsymbol{Q}_1$ 的 a 倍，它的方向与原矢量 $\boldsymbol{Q}_1$ 相同。
- 矢量的坐标：在图 1.5 中，矢量 $\boldsymbol{Q}_2$ 由坐标系的原点 O 指向点 A，点 A 的坐标为(x,y,z)，我们注意到，一个点 A 可以确定一个矢量 $\boldsymbol{Q}_2$，同样一个矢量 $\boldsymbol{Q}_2$ 也确定一个点 A，二者之间是一一对应的关系，因此可以把点 A 的坐标（X_A,Y_A,Z_A）叫做矢量 $\boldsymbol{Q}_2$ 的坐标。

所以，一条曲线上的所有点的坐标都可以用从原点指向该点的矢量来表示，曲线方程可以用矢量方程来表示，只要计算出一系列的矢量，就可以确定坐标绘制出曲线。如图 1.6 所示，只要依据式（1.1）计算出 $\boldsymbol{Q}(1)$、$\boldsymbol{Q}(2)$、……、$\boldsymbol{Q}(n)$ 一系列矢量，就可以确定 NURBS 曲线 $\boldsymbol{Q}(u)$ 上系列点的坐标。

再一次观察式（1.1），计算结果 $\boldsymbol{Q}(u)$ 是一系列的矢量，等式右边只有 $\boldsymbol{P}_i$ 是矢量（$\boldsymbol{P}_i$ 是 NURBS 曲线的控制点矢量，这些控制点矢量由用户在创建曲线时输入），用户使用（控制点曲线）指令创建曲线时，需要一系列控制点。

- 曲线的矢量方程：如图 1.7 所示为一条直线，1、2 为直线上的两个点，$\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$

为其对应的矢量，r 为点 1 和点 2 之间的距离，d 为直线上任意一点 P 到点 1 的距离，$\boldsymbol{Q}(u)$为点 P 对应的矢量，$\boldsymbol{e}$ 为与直线平行的长度为 1 的单位矢量。

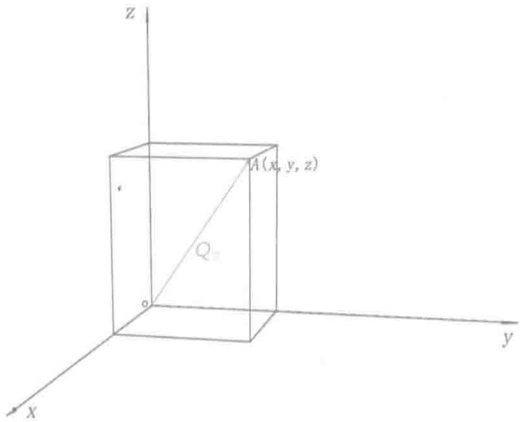


图 1.5　点 A 和矢量 $\boldsymbol{Q}_2$ 的对应关系

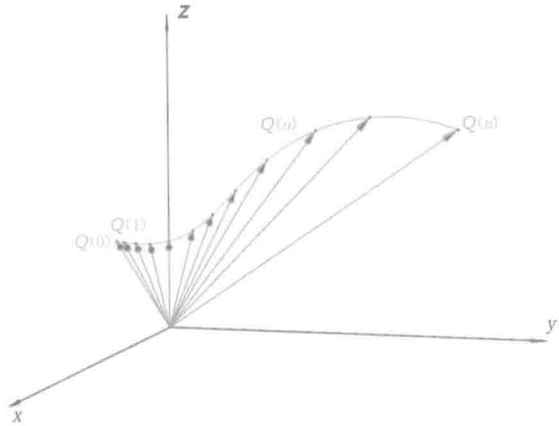


图 1.6　曲线上的点及与之对应的矢量

起点在点 1，终点在点 P 的矢量为 $d\boldsymbol{e}$，根据矢量加法的平行四边形法则，有：

$$\boldsymbol{Q}(u)=\boldsymbol{P}_1+d\boldsymbol{e}$$

同理：

$$\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{P}_1+r\boldsymbol{e}$$

将以上两个方程消去 $\boldsymbol{e}$，则有

$$\boldsymbol{Q}(u)=(1-\frac{d}{r})\boldsymbol{P}_1+\frac{d}{r}\boldsymbol{P}_2 \tag{1.3}$$

令 $u=\dfrac{d}{r}$，则式（1.3）可表示为：

$$\boldsymbol{Q}(u)=(1-u)\boldsymbol{P}_1+u\boldsymbol{P}_2 \tag{1.4}$$

式（1.4）的几何说明如图 1.8 所示。假设 $u=\dfrac{d}{r}=\dfrac{1}{4}$，则 $\boldsymbol{Q}(u)=\dfrac{3}{4}\boldsymbol{P}_1+\dfrac{1}{4}\boldsymbol{P}_2$，采用几何作图法则可以做出 $\boldsymbol{Q}(u)$。图 1.9 和图 1.10 分别是 $u=\dfrac{1}{2}$ 和 $u=\dfrac{3}{4}$ 时的计算结果。

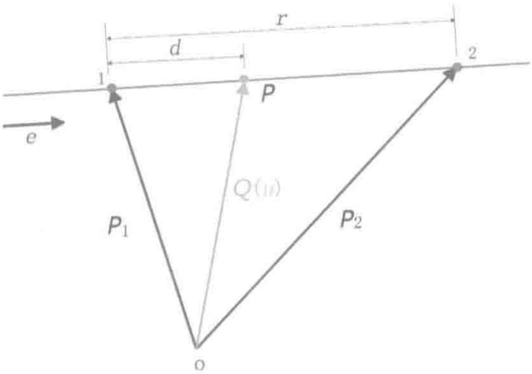


图 1.7　直线的矢量方程

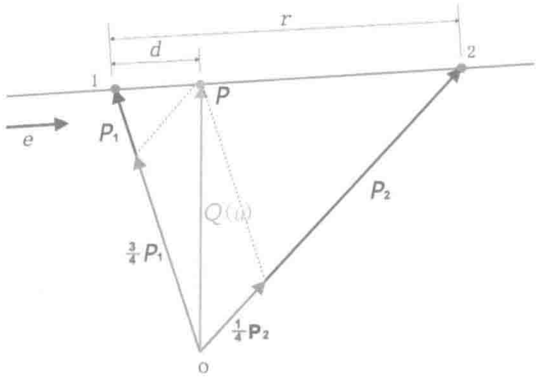


图 1.8　直线矢量方程的几何意义

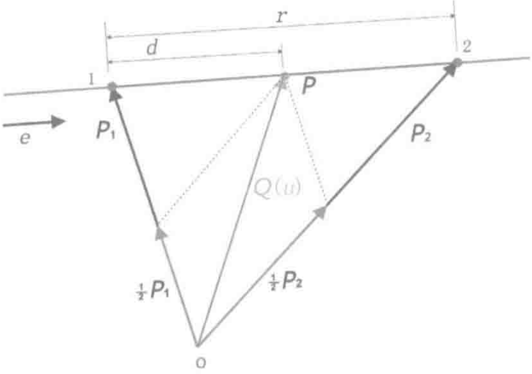


图 1.9 $u=\dfrac{1}{2}$

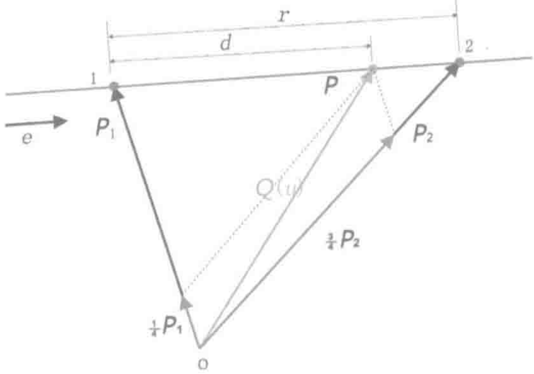


图 1.10 $u=\dfrac{3}{4}$

曲线 $\boldsymbol{Q}(u)$是参数 u 的函数，随着 u 取不同的值，可以算出曲线上所有的点。进一步，可以把式（1.4）表示为

$$\boldsymbol{Q}(u)=f_1(u)\boldsymbol{P}_1+f_2(u)\boldsymbol{P}_2 \tag{1.5}$$

很明显：$f_1(u)+f_2(u)=1$。我们把式（1.5）用求和符号 $\boldsymbol{\Sigma}$ 来表示：

$$\boldsymbol{Q}(u)=\sum_{i=1}^{2}f_i(u)\boldsymbol{P}_i \tag{1.6}$$

根据式（1.6）可以推测，假设这个直线方程可以推广到曲线，那么任一空间曲线的矢量方程可表示为

$$\boldsymbol{Q}(u)=\sum_{i=1}^{n}f_i(u)\boldsymbol{P}_i \tag{1.7}$$

后面我们将明白，这个方程是用多项式表达空间曲线的矢量方程的一般形式，在式（1.7）中，函数 $f_i(u)$叫做基函数。推广到一般，曲线的矢量方程可表示为一些指定的矢量 $\boldsymbol{P}_i$ 和特定基函数的乘积的和。基函数的采用不是唯一的，可以有很多种形式，采用不同的基函数，曲线就具有不同的造型和性质。式（1.5）中，可以认为基函数 $f_1(u)$和 $f_2(u)$是矢量 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$ 的系数，结合图 1.8～图 1.10 可以看出，基函数的几何意义就是使已知矢量乘以各自的系数，然后再求和矢量，结果就是所求的曲线。按照这样的直观几何意义来理解，我们就很容易理解后面要讨论的 B 样条曲线的方程式了。

到这里，我们已经能够理解式（1.1）中部分参数的含义了。下面将再接再厉，继续学习其中的参数及其含义。

1.4 NURBS 的参数方程及其特性

1.4.1 Bezier 曲线及其用途

之所以要讨论 Bezier 曲线，是因为它对 NURBS 曲线的产生起到了启发和促进的作用，可以使我们对 NURBS 的发展有更清晰的理解。自工业革命以来，机械工程大都采用直线

和圆弧等二次圆锥曲线能用方程表示的曲线来设计零部件，而对于自由曲线曲面的描绘则办法不多，没有确切的数学表达式，只能近似而不能精确地设计它们的形态。进入 20 世纪后期，一些曲面较多的产品，例如汽车、飞机、轮船等，需要用更灵活的曲线描绘方法来设计。另外，工业设计的发展促进了产品外观的多样化，产品造型设计的美学需求要求有更自由、简便、精确的曲线曲面描绘方法，要求建立自由曲线曲面的数学模型。为顺应这种需求，法国雷诺汽车公司的工程师贝塞尔（Pierre Bézier）对此进行研究，建立了一套自由曲线曲面设计系统——UNISURF。贝塞尔出生于工程师世家，在巴黎工艺高等专科学校获得机械工程师学位，后来在巴黎大学获得科学博士学位，大学毕业后加入了雷诺汽车公司，并在此工作了 42 年，直至 1975 年退休。在 20 世纪 60 年代，他对 CAD/CAM 领域的曲线数学描述产生了兴趣，对此进行研究并提出了自己的解决方案。他采用一种数学方法来设计曲线，产生的曲线可以由一系列点来交互控制，这些点叫做控制点，设计师只要移动控制点的位置，就可以很方便地改动曲线的形状，非常直观，曲线非常光滑。

我们可以通过割角法来引出贝塞尔曲线方程[②]。在探索曲线数学模型的研究中，对于如何产生自由曲线，一个很自然的想法就是类似于曲面零件的磨削加工过程，把一个有棱角的毛坯不断地磨去棱角从而磨出曲面。Lane 和 Riesenfeld 提出，可以采用对多边形进行割角的方法来产生曲线。

如图 1.11 所示，P_0、P_1、P_2、P_3、P_4 为一个空间四边形的顶点，这个四边形各边的中点是 $P_{1,0}$、$P_{1,1}$、$P_{1,2}$、$P_{1,3}$（用第一个下标表示第一次割角，第二个下标表示序号），得到 3 条线段 $P_{1,0}P_{1,1}$、$P_{1,1}P_{1,2}$、$P_{1,2}P_{1,3}$，再连接这 3 条线段的中点 $P_{2,0}$、$P_{2,1}$、$P_{2,2}$，又得到两条线段，再连接这两条线段的中点 $P_{3,0}$、$P_{3,1}$，求出线段 $P_{3,0}P_{3,1}$ 的中点 $P_{4,0}$，这样得到两个新的四边形 P_0、$P_{1,0}P_{2,0}$、$P_{3,0}P_{4,0}$ 和 $P_{4,0}P_{3,1}P_{2,2}P_{1,3}P_4$。

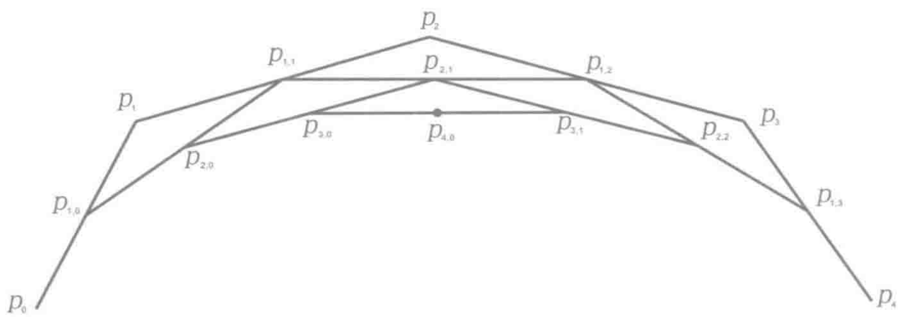


图 1.11　割角法产生曲线

再对这两个新四边形重复上述的过程，依此类推，不断重复，可以证明（证明过程从略）最终产生的新多边形的极限会收敛于一条曲线，这条曲线就是 Bezier 曲线，它的方程式为

$$\boldsymbol{Q}(u)=\sum_{i=1}^{n}B_{i,n}(u)\boldsymbol{P}_i \tag{1.8}$$

观察式（1.8）会发现，贝塞尔曲线的方程符合式（1.7）对空间曲线矢量方程的推测，式中，$B_{i,n}(u)$是基函数（Basis Function），$\boldsymbol{P}_i$ 称为控制点（Control Point）。再对比式（1.4）和式（1.8）会发现，二者的基函数不一样，Bezier 曲线的基函数 $B_{i,n}(u)$为[③]：