国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

信息与计算科学丛书——74

分数阶偏微分方程数值方法及其应用

刘发旺　庄平辉　刘青霞　著

科学出版社

国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

“十二五”国家重点图书出版规划项目

信息与计算科学丛书　74

分数阶偏微分方程数值方法及其应用

刘发旺　庄平辉　刘青霞　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书详细地介绍分数阶偏微分方程的数值方法. 这些分数阶偏微分方程包括空间、时间、时间-空间分数阶偏微分方程，反常次扩散方程，修正的反常次扩散方程，分数阶 Cable 方程，也包括时间-空间分数阶偏微分方程，多项时间-空间分数阶偏微分方程和变分数阶偏微分方程，以及人类大脑组织中的反常扩散模型，非均匀介质中扩散过程的分数阶模型。所讨论的数值方法包括有限差分方法、有限元方法、谱方法、有限体积方法、无网格方法和矩阵转换技巧，详细介绍如何构造适当的数值方法，并讨论了数值方法的稳定性和收敛性，以及数值分析技巧和方法，给出了部分数值结果。同时也介绍了分数阶偏微分方程的一些数值实例，最后介绍所提出的数值方法在医学工程和心脏科学中的应用。

本书内容丰富，语言流畅，结构严谨，逻辑清晰，叙述详细，便于自学，可作为研究生学习分数阶计算课程的教材，也可供相关研究人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

分数阶偏微分方程数值方法及其应用/刘发旺，庄平辉，刘青霞著. —北京：科学出版社，2015.11

(信息与计算科学丛书；74)

ISBN 978-7-03-046335-7

Ⅰ. ①分… Ⅱ. ①刘… ②庄… ③刘… Ⅲ. ①偏微分方程-数值方法 Ⅳ. ①O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 270033 号

责任编辑：李静科 赵彦超 / 责任校对：钟 洋
责任印制：肖 兴 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京通州皇家印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 11 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2015 年 11 月第一次印刷 印张：29 3/4
字数：597 000

定价：178.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《信息与计算科学丛书》序

20 世纪 70 年代末，由已故著名数学家冯康先生任主编、科学出版社出版了一套《计算方法丛书》，至今已逾 30 册. 这套丛书以介绍计算数学的前沿方向和科研成果为主旨，学术水平高、社会影响大，对计算数学的发展、学术交流及人才培养起到了重要的作用.

1998 年教育部进行学科调整，将计算数学及其应用软件、信息科学、运筹控制等专业合并，定名为“信息与计算科学专业”. 为适应新形势下学科发展的需要，科学出版社将《计算方法丛书》更名为《信息与计算科学丛书》，组建了新的编委会，并于 2004 年 9 月在北京召开了第一次会议，讨论并确定了丛书的宗旨、定位及方向等问题.

新的《信息与计算科学丛书》的宗旨是面向高等学校信息与计算科学专业的高年级学生、研究生以及从事这一行业的科技工作者，针对当前的学科前沿、介绍国内外优秀的科研成果. 强调科学性、系统性及学科交叉性，体现新的研究方向. 内容力求深入浅出，简明扼要.

原《计算方法丛书》的编委和编辑人员以及多位数学家曾为丛书的出版做了大量工作，在学术界赢得了很好的声誉，在此表示衷心的感谢. 我们诚挚地希望大家一如既往地关心和支持新丛书的出版，以期为信息与计算科学在新世纪的发展起到积极的推动作用.

石钟慈

2005 年 7 月

前　言

分数阶计算 (即任意阶的积分和微分的计算) 是一个古老而又新鲜的研究领域. 特别是十多年来分数阶微分方程及其应用得到了广泛的关注, 其主要归因于分数阶微积分理论自身的迅速发展及其在数学、物理、化学、生物、医学、力学、控制理论、信号和图像处理、环境科学以及金融等各类学科中的广泛应用. 分数阶微分方程是广义、非整数阶的微分方程. 它能获取在时间和空间上具有幂律内存内核的非局部关系, 这为描述不同物质的记忆和继承性质提供了强有力的工具. 这些研究具有明确的物理背景, 同时又开辟了一个广阔而崭新的科学研究领域, 其中包括分数阶动力系统新的理论分析和数值方法.

分数阶计算在许多研究领域中已有不少成功的应用, 凸显了其独特和不可替代的作用. 分数阶微分方程数值计算的理论和应用在国际上已成为最活跃的研究领域之一.

作者对分数阶计算的研究兴趣始于 2000 年. Fawang Liu 教授, Ian Turner 教授和 Vo Anh 教授从事模拟海水入侵地下水层的研究项目 (澳大利亚国家研究基金 (ARC Sprit grant C10024101)) 中, 发现分数阶模型能更加准确地模拟具有记忆遗传和路径依赖等反常扩散的性态. 要模拟这些反常扩散的性态, 数值模拟是必不可少的. 由于分数阶微分方程数值方法及其理论分析缺乏系统的研究. 我们先后在澳大利亚昆士兰科技大学和中国厦门大学组建了分数阶微分方程的学术团队, 专注于分数阶偏微分方程数值方法和数值分析的研究.

随着分数阶偏微分方程应用的不断深入, 分数阶偏微分方程的求解成为一项迫切需要解决的研究工作. 由于分数阶偏微分方程的解析解中大多带有特殊函数 (如多变量的 Mittag-Leffler 函数), 并且这些特殊函数的计算是相当困难的, 而且绝大多数的非线性分数阶微分方程是不可能得到解析解的. 因此研究者越来越关注分数阶微分方程的数值方法和数值分析.

近十多年来, 分数阶偏微分方程及其应用已经引起我国越来越多的学者的高度重视. 但是, 对于许多学者, 目前分数阶偏微分方程数值方法及其理论分析还处在起步阶段. 国内许多研究生、高校教师和研究人员希望能有一本系统介绍分数阶偏微分方程数值方法及其理论分析的专著. 本书的宗旨是提供一本适合于研究生的教材和分数阶计算的研究人员的参考书. 作者结合其团队在这一领域的研究成果, 以及对工程和科学领域中出现的分数阶偏微分方程的数值方法及其理论分析等方面

的资料的系统收集和整理, 撰写成本书.

本书将详细地介绍分数阶偏微分方程的数值方法. 这些分数阶偏微分方程包括空间、时间、时间-空间分数阶偏微分方程, 反常次扩散方程, 修正的反常次扩散方程, 分数阶 Cable 方程, 也包括时间-空间分数阶偏微分方程, 多项时间-空间分数阶偏微分方程和变分数阶偏微分方程. 分数阶偏微分方程的数值方法及其理论分析包括有限差分方法、有限元方法、谱方法、有限体积方法、无网格方法和矩阵转换技巧. 此外, 本书还介绍如何构造适当的数值方法, 讨论数值方法的稳定性和收敛性, 以及数值分析技巧和方法, 给出部分数值结果. 同时本书也介绍分数阶偏微分方程的一些数值实例. 我们希望本书能够带动我国更多的学者进入分数阶微分方程研究的国际前沿领域, 以推动我国在这一研究领域上更加蓬勃发展.

本书共十章. 第 1 章介绍分数阶微积分基础知识. 第 2 章为空间分数阶偏微分方程的差分方法, 考虑空间分数阶扩散方程/空间分数阶对流-扩散方程, 介绍空间分数阶导数的差分近似, 几种常用的差分格式和算法 (例如显式、隐式、Crank-Nicholson 格式、加权格式、L-算法、分数阶行方法), 以及外推技巧和快速算法. 本章介绍一些数值分析技巧, 给出稳定性和收敛性的分析; 介绍含有空间分数阶 Laplace 算子的扩散方程, 以及复合介质中含有空间分数阶 Laplace 算子的分数阶扩散方程的分析解和数值解; 还介绍双侧空间分数阶非线性变系数扩散方程和二维分数阶渗透方程的有限差分方法. 第 3 章为时间、时间-空间分数阶偏微分方程的差分方法, 介绍时间分数阶导数的差分近似和求解时间-空间 (时间) 分数阶偏微分方程, 一类反常次扩散方程的差分方法, 给出稳定性和收敛性的分析. 这些方法和技巧可以推广和应用于解时间、时间-空间分数阶偏微分方程. 最后介绍在生物系统中分数阶非线性动力系统的反问题. 这个参数估计技巧可以推广和应用于一类分数阶非线性动力系统的参数估计问题. 第 4 章为多项时间-空间分数 (分布) 阶偏微分方程. 该章主要介绍多项时间分数阶偏微分方程和多项时间-空间分数阶偏微分方程的解析解和差分方法. 我们也讨论时间和空间分布阶偏微分方程的差分方法和数值分析. 第 5 章为变分数阶偏微分方程的差分方法. 本章主要介绍求解空间变分数阶扩散方程, 时间变分数阶移动/不动对流-扩散方程, 时间变分数阶扩散方程和时间-空间变分数阶对流-扩散方程的差分方法, 以及稳定性和收敛性的分析; 最后介绍二维空间变分数阶偏微分方程的交替方向方法和给出稳定性和收敛性的分析. 第 6 章为分数阶偏微分方程的有限元法. 本章主要介绍时间分数阶 Cable 方程、空间分数阶对流-扩散方程、时间-空间分数阶扩散方程、二维空间分数阶扩散方程、二维时间-空间分数阶扩散方程的有限元方法, 以及稳定性和收敛性分析. 我们也介绍二维时间-空间分数阶 Bloch-Torrey 方程的有限元方法. 第 7 章为分数阶偏微分方程的谱方法. 本章主要介绍时间分数阶 Fokker-Planck 方程, 一维时间-空间分数阶扩散方程的高阶空间-时间谱方法、二维 Riesz 空间分数阶非线性反应-扩散方程的

Crank-Nicolson 交替方向谱方法, 并应用于分数阶 FitzHugh-Nagumo 模型; 也介绍求解具有分数阶 Laplace 算子的反常扩散方程的高阶谱方法, 以及给出稳定性和收敛性分析. 第 8 章为分数阶偏微分方程的有限体积方法和无网格方法. 本章分为两部分. 第一部分主要介绍空间分数阶对流-扩散方程的有限体积方法, 双侧空间分数阶扩散方程一个新的分数阶有限体积方法、二维空间分数阶反应-扩散方程的非结构网格有限体积格式及其预处理 Lanczos 方法. 第二部分主要介绍无网格方法. 特别介绍径向基点插值方法、时间分数阶扩散方程的 RPCM 逼近和空间分数阶扩散方程的 RPCM 逼近. 第 9 章为人类大脑组织中的反常扩散模型的数值模拟. 本章分为三部分. 第一部分主要介绍链接大脑的计算模拟. 第二部分主要介绍分数阶 Bloch 方程的数值模拟. 第三部分主要介绍时间-空间 Bloch-Torrey 方程的数值模拟. 第 10 章介绍在非均匀介质的扩散过程的分数阶数值模型, 以及在心脏科学中的应用. 本章分为五部分. 第一部分主要介绍在非均匀介质的扩散过程的分数阶模型. 第二部分主要介绍数值模拟二维的 Riesz 分数阶空间中的非线性反应-扩散模型. 第三部分主要介绍数值模拟二维变分数阶非线性反应-扩散模型. 第四部分主要介绍数值模拟近似不规则域上的二维分数阶非线性反应-扩散模型. 第五部分把这些技巧用于模拟在心脏科学中的分数阶数值模型.

在这一领域, 我们发现大量未解决的问题. 我们希望能引起更多的分数阶同行的关注; 交流和探讨分数阶微分方程计算方法和理论的发展, 以及目前国内外感兴趣的课题和方向, 探讨合作的可能性; 凝聚一些可能的可合作的研究问题, 建立长期的国际合作关系.

在分数阶微分方程数值方法的理论和应用课题 (澳大利亚国家研究基金 (ARC Sprit grant C10024101, ARC grant LP0348653, DP0986766, DP120103770, CEO348-221, DP0559807) 和中国国家自然科学研究基金 (10271098) 的研究中, 我们始终得到澳大利亚昆士兰科技大学的 Ian Turner 教授, Vo Anh 教授, 英国牛津大学的 Keven Burrage 教授, 美国密歇根州立大学的 Mark M. Meerschaert 教授, 布朗大学的 George Karniadakis, 加利福尼亚大学的 YangQuan Chen 教授, 伊利诺伊大学的 Richard L. Magin 教授, 斯洛伐克科希策技术大学的 Igor Podlubny 教授, 土耳其詹卡亚大学的 Dumitru Baleanu 教授, 南伊利诺伊大学的 Om P. Agrawal 教授, 意大利博洛尼亚大学的 Francesco Mainardi 教授, 德国波茨坦大学的 Ralf Metzler, 德国 Kai Diethelm 教授, 德国应用科学柏林 Beuth 大学 Yury Luchko 教授, 约旦大学的 Shaher Momani 教授, 英国卡迪夫大学的 Nikolai N. Leonenko 教授, 澳大利亚昆士兰科技大学的 Yuantong Gu 教授, Timothy Moroney 博士, 澳大利亚新南威尔士大学 Bruce Henry 教授, 美国南卡罗来纳大学的 Hong Wang 教授, 美国密歇根州立大学的 Alla Sikorskii 博士, 西班牙埃斯特雷马杜拉大学 Santos Bravo Yuste 教授, 中国北京应用物理与计算数学研究所的郭柏灵院士, 南方科技大学的汤涛教授, 上海

大学的李常品教授, 山东大学的蒋晓芸教授, 北京科技大学的郑连存教授, 中国科学院计算数学与科学工程计算研究所的唐贻发教授, 东南大学的孙志忠教授, 河海大学的陈文教授, 兰州大学的邓伟华教授, 北京大学的谭文长教授, 湘潭大学的周勇教授、喻祖国教授和肖爱国教授, 澳门大学的孙海卫教授、金小庆教授, 中南大学的郑洲顺教授, 东华大学的寇春海教授, 西南财经大学的马敬堂教授, 电子科技大学的黄廷祝教授, 西北工业大学的聂玉峰教授, 内江师范大学的吴国成博士, 河海大学的孙洪广教授, 北京计算科学研究中心的赵璇博士, 南京邮电大学高广花博士, 四川大学的蒲亦菲教授、张茹博士, 中国地质大学的廉海荣副教授, 西安理工大学李灿博士的指导、帮助和支持. 特在此表示深深的谢意. 我们特别感谢石钟慈院士对本书出版给予的大力支持和帮助.

在过去十五年关于本课题的研究过程中, 我们团队成员和合作者有 Qianqian Yang 博士、Qiang Yu 博士、陈世平教授、陈昌明教授、章红梅副教授、沈淑君副教授、陈景华副教授、蒋卉教授、叶海平副教授、郑敏玲副教授、曾凡海博士、陈善镇博士、胡秀玲博士、陈爱敏副教授、李景副教授、林然博士、杨晨航博士、陈雪娟副教授、林玉闽副教授、卢璇珠副教授、王学彬副教授、袁占斌博士、赵艳敏副教授、Hala A. Hejazi 博士、黄凤辉副教授、李春蕊博士以及封利波、卜玮平等, 他们都为此付出了辛勤的劳动.

由于时间和作者水平有限, 书中难免有不妥之处, 欢迎读者批评指正 (电子邮箱: f.liu@qut.edu.au).

刘发旺 (Fawang Liu)
澳大利亚昆士兰科技大学数学科学学院
庄平辉　刘青霞
厦门大学数学科学学院
2015 年 11 月 29 日

目　录

第 1 章　分数阶微积分基础

在不同的研究领域中分数阶积分和分数阶导数有各种不同的定义, 本章就一些常见的分数阶积分和分数阶导数, 给出本书用到分数阶导数的基本性质, 更多内容见 Samko 等[1], Diethelm[2], Kilbas 等[3], 以及 Podlubny[4] 等文献.

1.1　一些特殊函数的定义和性质

本节介绍本书用到的一些特殊函数.

1.1.1　Gamma 函数

分数阶计算的基本函数之一是 Gamma 函数 $\Gamma(z)$. Gamma 函数是广义的阶乘 $n!$, 且也允许 n 取非整数, 甚至取复数值.

定义 1.1　第二类 Euler 积分

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty} x^{z-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x,\quad \mathrm{Re}(z)>0, \tag{1.1.1}$$

称为 Gamma 函数. 这里 z 是一个复数, $\mathrm{Re}(z)$ 表示取其实部的值.

利用分部积分, Gamma 函数具有下列递推公式:

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z),\quad \mathrm{Re}(z)>0. \tag{1.1.2}$$

如果 $-n<\mathrm{Re}(z)\leqslant -n+1$ (这里 n 是一正整数), 那么

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n}=\frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}. \tag{1.1.3}$$

Gamma 函数的性质:

(1) $\Gamma(0)=1$, 且对于任意正整数 n, 有 $\Gamma(n)=(n-1)!$;

(2) 对于任意正整数 n, 有

$$\Gamma(z+n)=(z)_n\Gamma(z),$$

$$\Gamma(z-n)=\frac{\Gamma(z)}{(z-n)_n}=\frac{(-1)^n}{(1-z)_n}\Gamma(z),\quad z\neq 1,2,3,\cdots;$$

(3) $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.